

I- GIẢI TÍCH TỔ HỢP

- Giai thừa :** $n! = 1.2...n$
 $0! = 1$
 $n! / (n - k)! = (n - k + 1).(n - k + 2) ... n$
- Nguyên tắc cộng :** Trường hợp 1 có m cách chọn, trường hợp 2 có n cách chọn; mỗi cách chọn đều thuộc đúng một trường hợp. Khi đó, tổng số cách chọn là : $m + n$.
- Nguyên tắc nhân :** Hiện tượng 1 có m cách chọn, mỗi cách chọn này lại có n cách chọn hiện tượng 2. Khi đó, tổng số cách chọn liên tiếp hai hiện tượng là : $m \times n$.
- Hoán vị :** Có n vật khác nhau, xếp vào n chỗ khác nhau. Số cách xếp : $P_n = n !$.
- Tổ hợp :** Có n vật khác nhau, chọn ra k vật. Số cách chọn : $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$
- Chỉnh hợp :** Có n vật khác nhau. Chọn ra k vật, xếp vào k chỗ khác nhau số cách : $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$, $A_n^k = C_n^k \cdot P_k$

Chỉnh hợp = tổ hợp rồi hoán vị

7. Tam giác Pascal :

1					C_0^0
1	1				C_1^0 C_1^1
1	2	1			C_2^0 C_2^1 C_2^2
1	3	3	1		C_3^0 C_3^1 C_3^2 C_3^3
1	4	6	4	1	C_4^0 C_4^1 C_4^2 C_4^3 C_4^4

Tính chất :

$$C_n^0 = C_n^n = 1, C_n^k = C_n^{n-k}$$

$$C_n^{k-1} + C_n^k = C_{n+1}^k$$

8. Nhị thức Newton :

$$* (a + b)^n = C_n^0 a^n b^0 + C_n^1 a^{n-1} b^1 + \dots + C_n^n a^0 b^n$$

$$a = b = 1 : \dots C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n = 2^n$$

Với a, b $\in \{\pm 1, \pm 2, \dots\}$, ta chứng minh được nhiều đẳng thức chứa :

$$C_n^0, C_n^1, \dots, C_n^n$$

$$* (a + x)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} x + \dots + C_n^n x^n$$

Ta chứng minh được nhiều đẳng thức chứa $C_n^0, C_n^1, \dots, C_n^n$ bằng cách :

- Đạo hàm 1 lần, 2 lần, cho $x = \pm 1, \pm 2, \dots$ a = $\pm 1, \pm 2, \dots$

- Nhân với x^k , đạo hàm 1 lần, 2 lần, cho $x = \pm 1, \pm 2, \dots$, a = $\pm 1, \pm 2, \dots$

- Cho a = $\pm 1, \pm 2, \dots$, $\int_0^{\pm 1}$ hay $\int_0^{\pm 2}$... hay \int_α^β

Chú ý :

$$* (a + b)^n : a, b \text{ chứa } x. \text{ Tìm số hạng độc lập với } x : C_n^k a^{n-k} b^k = Kx^m$$

Giải pt : $m = 0$, ta được k.

$$* (a + b)^n : a, b \text{ chứa căn. Tìm số hạng hữu tỷ.}$$

$$C_n^k a^{n-k} b^k = Kc^{\frac{m}{p}} d^{\frac{r}{q}}$$

Giải hệ pt : $\begin{cases} m/p \in Z \\ r/q \in Z \end{cases}$, tìm được k

* Giải pt, bpt chứa $A_n^k, C_n^k \dots$: đặt điều kiện k, $n \in \mathbb{N}^* \dots$, $k \leq n$. Cần biết đơn giản các giai thừa, qui đồng mẫu số, đặt thừa số chung.

- * Cần phân biệt : qui tắc cộng và qui tắc nhân; hoán vị (xếp, không bốc), tổ hợp (bốc, không xếp), chỉnh hợp (bốc rồi xếp).
- * Áp dụng sơ đồ nhánh để chia trường hợp , tránh trùng lặp hoặc thiếu trường hợp.
- * Với bài toán tìm số cách chọn thỏa tính chất p mà khi chia trường hợp, ta thấy số cách chọn không thỏa tính chất p ít trường hợp hơn, ta làm như sau :
 số cách chọn thỏa p.
 = số cách chọn tùy ý - số cách chọn không thỏa p.
 Cần viết mệnh đề phủ định p thật chính xác.
- * Vé số, số biên lai, bảng số xe ... : chữ số 0 có thể đứng đầu (tính từ trái sang phải).
- * Dấu hiệu chia hết :
 - Cho 2 : tận cùng là 0, 2, 4, 6, 8.
 - Cho 4 : tận cùng là 00 hay 2 chữ số cuối hợp thành số chia hết cho 4.
 - Cho 8 : tận cùng là 000 hay 3 chữ số cuối hợp thành số chia hết cho 8.
 - Cho 3 : tổng các chữ số chia hết cho 3.
 - Cho 9 : tổng các chữ số chia hết cho 9.
 - Cho 5 : tận cùng là 0 hay 5.
 - Cho 6 : chia hết cho 2 và 3.
 - Cho 25 : tận cùng là 00, 25, 50, 75.

II- ĐẠI SỐ

1. **Chuyển vế :** $a + b = c \Leftrightarrow a = c - b; ab = c \Leftrightarrow \begin{cases} b = c = 0 \\ b \neq 0 \\ a = c/b \end{cases}$

$$a/b = c \Leftrightarrow \begin{cases} a = bc \\ b \neq 0 \end{cases}; \quad a^{2n+1} = b \Leftrightarrow a = \sqrt[2n+1]{b}$$

$$a^{2n} = b \Leftrightarrow a = \pm \sqrt[2n]{b}, \quad a = \sqrt[2n]{b} \Leftrightarrow \begin{cases} b = a^{2n} \\ a \geq 0 \end{cases}$$

$$a = |b| \Leftrightarrow \begin{cases} b = \pm a \\ a \geq 0 \end{cases}, \quad a = \log_{\alpha} b \Leftrightarrow b = \alpha^a$$

$$a + b < c \Leftrightarrow a < c - b; \quad ab < c \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0, c > 0 \\ b > 0 \\ a < c/b \\ b < 0 \\ a > c/b \end{cases}$$

2. Giao nghiệm :

$$\begin{cases} x > a \\ x > b \end{cases} \Leftrightarrow x > \max\{a, b\}; \quad \begin{cases} x < a \\ x < b \end{cases} \Leftrightarrow x < \min\{a, b\}$$

$$\begin{cases} x > a \\ x < b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a < x < b (\text{nếu } a < b) \\ \text{VN} (\text{nếu } a \geq b) \end{cases}; \quad \begin{cases} p \vee q \\ \Gamma \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p \\ \Gamma \\ q \\ \Gamma \end{cases}$$

Nhiều dấu v : vẽ trục để giao nghiệm.

3. Công thức cần nhớ :

a. $\sqrt{\quad}$: chỉ được bình phương nếu 2 vế không âm. Làm mất $\sqrt{\quad}$ phải đặt điều kiện.

$$\sqrt{a} = b \Leftrightarrow \begin{cases} b \geq 0 \\ a = b^2 \end{cases}, \quad \sqrt{a} \leq b \Leftrightarrow \begin{cases} b \geq 0 \\ 0 \leq a \leq b^2 \end{cases}$$

$$\sqrt{a} \geq b \Leftrightarrow \begin{cases} b < 0 \\ a \geq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} b \geq 0 \\ a \geq b^2 \end{cases}$$

$$\sqrt{ab} = \begin{cases} \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} & (\text{nếu } a, b \geq 0) \\ \sqrt{-a} \cdot \sqrt{-b} & (\text{nếu } a, b < 0) \end{cases}$$

b. $|\cdot|$: phá $|\cdot|$ bằng cách bình phương : $|a|^2 = a^2$ hay bằng định nghĩa :

$$|a| = \begin{cases} a & (\text{nếu } a \geq 0) \\ -a & (\text{nếu } a < 0) \end{cases}$$

$$|a| = b \Leftrightarrow \begin{cases} b \geq 0 \\ a = \pm b \end{cases}; |a| = |b| \Leftrightarrow a = \pm b$$

$$|a| \leq b \Leftrightarrow -b \leq a \leq b$$

$$|a| \geq b \Leftrightarrow b < 0 \text{ hay } \begin{cases} b \geq 0 \\ a \leq -b \vee a \geq b \end{cases}$$

$$|a| \leq |b| \Leftrightarrow a^2 - b^2 \leq 0$$

c. Mũ : $y = a^x, x \in \mathbb{R}, y > 0, y \uparrow$ nếu $a > 1, y \downarrow$ nếu $0 < a < 1$.

$$a^0 = 1; a^{-m/n} = 1/\sqrt[n]{a^m}; a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$a^m / a^n = a^{m-n}; (a^m)^n = a^{m \cdot n}; a^n / b^n = (a/b)^n$$

$$a^n \cdot b^n = (ab)^n; a^m = a^n \Leftrightarrow (m = n, 0 < a \neq 1) \vee a = 1$$

$$a^m < a^n \Leftrightarrow \begin{cases} m < n & (\text{nếu } a > 1) \\ m > n & (\text{nếu } 0 < a < 1) \end{cases}, \alpha = a^{\log_a \alpha}$$

d. $\log : y = \log_a x, x > 0, 0 < a \neq 1, y \in \mathbb{R}$

$y \uparrow$ nếu $a > 1, y \downarrow$ nếu $0 < a < 1, \alpha = \log_a a^\alpha$

$$\log_a(MN) = \log_a M + \log_a N \quad (\Leftarrow)$$

$$\log_a(M/N) = \log_a M - \log_a N \quad (\Leftarrow)$$

$$\log_a M^2 = 2 \log_a |M|, 2 \log_a M = \log_a M^2 \quad (\Rightarrow)$$

$$\log_a M^3 = 3 \log_a M, \log_a c = \log_a b \cdot \log_b c$$

$$\log_b c = \log_a c / \log_a b, \log_{a^\alpha} M = \frac{1}{\alpha} \log_a M$$

$$\log_a(1/M) = -\log_a M, \log_a M = \log_a N \Leftrightarrow M = N$$

$$\log_a M < \log_a N \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < M < N & (\text{nếu } a > 1) \\ M > N > 0 & (\text{nếu } 0 < a < 1) \end{cases}$$

Khi làm toán log, nếu miền xác định nơi rộng : dùng điều kiện chặn lại, tránh dùng công thức làm thu hẹp miền xác định. Mất log phải có điều kiện.

4. Đổi biến :

a. Đơn giản : $t = ax + b \in \mathbb{R}, t = x^2 \geq 0, t = \sqrt{x} \geq 0, t = |x| \geq 0, t = a^x > 0, t = \log_a x \in \mathbb{R}$

Nếu trong đề bài có điều kiện của x , ta chuyển sang điều kiện của t bằng cách biến đổi trực tiếp bất đẳng thức.

b. Hàm số : $t = f(x)$ dùng BBT để tìm điều kiện của t . Nếu x có thêm điều kiện, cho vào miền xác định của f .

c. Lượng giác : $t = \sin x, \cos x, \tan x, \cot x$. Dùng phép chiếu lượng giác để tìm điều kiện của t .

d. Hàm số hợp : từng bước làm theo các cách trên.

5. Xét dấu :

a. Đa thức hay phân thức hữu tỷ, dấu A/B giống dấu A.B; bên phải cùng dấu hệ số bậc cao nhất; qua nghiệm đơn (bội lẻ) : đổi dấu; qua nghiệm kép (bội chẵn) : không đổi dấu.

b. Biểu thức $f(x)$ vô tỷ : giải $f(x) < 0$ hay $f(x) > 0$.

c. Biểu thức $f(x)$ vô tỷ mà cách b không làm được : xét tính liên tục và đơn điệu của f , nhằm 1 nghiệm của pt $f(x) = 0$, phác họa đồ thị của f , suy ra dấu của f .

6. So sánh nghiệm phương trình bậc 2 với α :

$$f(x) = ax^2 + bx + c = 0 \quad (a \neq 0)$$

* $S = x_1 + x_2 = -b/a$; $P = x_1x_2 = c/a$

Dùng S, P để tính các biểu thức đối xứng nghiệm. Với đẳng thức $g(x_1, x_2) = 0$ không đối xứng, giải hệ pt :

$$\begin{cases} g = 0 \\ S = x_1 + x_2 \\ P = x_1 \cdot x_2 \end{cases}$$

Biết S, P thỏa $S^2 - 4P \geq 0$, tìm x_1, x_2 từ pt : $X^2 - SX + P = 0$

* Dùng Δ, S, P để so sánh nghiệm với 0 :

$$x_1 < 0 < x_2 \Leftrightarrow P < 0, \quad 0 < x_1 < x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases}$$

$$x_1 < x_2 < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0 \\ S < 0 \end{cases}$$

* Dùng $\Delta, af(\alpha), S/2$ để so sánh nghiệm với α : $x_1 < \alpha < x_2 \Leftrightarrow af(\alpha) < 0$

$$\alpha < x_1 < x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ a.f(\alpha) > 0 \\ \alpha < S/2 \end{cases} ; \quad x_1 < x_2 < \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ a.f(\alpha) > 0 \\ S/2 < \alpha \end{cases}$$

$$\alpha < x_1 < \beta < x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} a.f(\beta) < 0 \\ a.f(\alpha) > 0 \\ \alpha < \beta \end{cases} ; \quad x_1 < \alpha < x_2 < \beta \Leftrightarrow \begin{cases} a.f(\alpha) < 0 \\ a.f(\beta) > 0 \\ \alpha < \beta \end{cases}$$

7. Phương trình bậc 3 :

a. Viète : $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$

$$x_1 + x_2 + x_3 = -b/a, \quad x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = c/a, \quad x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = -d/a$$

Biết $x_1 + x_2 + x_3 = A, \quad x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = B, \quad x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = C$

thì x_1, x_2, x_3 là 3 nghiệm phương trình : $x^3 - Ax^2 + Bx - C = 0$

b. Số nghiệm phương trình bậc 3 :

• $x = \alpha \vee f(x) = ax^2 + bx + c = 0 \quad (a \neq 0)$:

$$3 \text{ nghiệm phân biệt} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ f(\alpha) \neq 0 \end{cases}$$

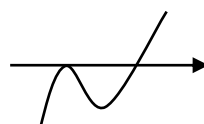
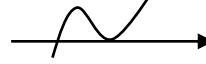
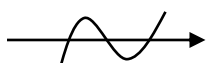
$$2 \text{ nghiệm phân biệt} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ f(\alpha) = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} \Delta = 0 \\ f(\alpha) \neq 0 \end{cases}$$

$$1 \text{ nghiệm} \Leftrightarrow \Delta < 0 \text{ hay } \begin{cases} \Delta = 0 \\ f(\alpha) = 0 \end{cases}$$

• Phương trình bậc 3 không nhằm được 1 nghiệm, m tách được sang 1 vế : dùng sự tương giao giữa (C) : $y = f(x)$ và (d) : $y = m$.

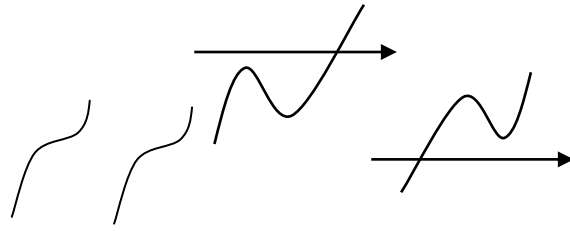
• Phương trình bậc 3 không nhằm được 1 nghiệm, m không tách được sang 1 vế : dùng sự tương giao giữa (C_m) : $y = f(x, m)$ và (Ox) : $y = 0$

$$3 \text{ nghiệm} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_{y'} > 0 \\ y_{CD} \cdot y_{CT} < 0 \end{cases}$$



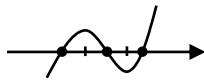
$$2 \text{ nghiệm} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_{y'} > 0 \\ y_{CB} \cdot y_{CT} = 0 \end{cases}$$

$$1 \text{ nghiệm} \Leftrightarrow \Delta_{y'} \leq 0 \vee \begin{cases} \Delta_{y'} > 0 \\ y_{CB} \cdot y_{CT} > 0 \end{cases}$$



c. Phương trình bậc 3 có 3 nghiệm lập thành CSC :

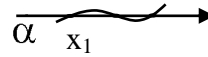
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_{y'} > 0 \\ y_{uốn} = 0 \end{cases}$$



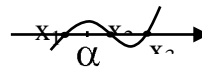
d. So sánh nghiệm với α :

- $x = x_0 \vee f(x) = ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) : so sánh nghiệm phương trình bậc 2 $f(x)$ với α .
- Không nhằm được 1 nghiệm, m tách được sang 1 vế : dùng sự tương giao của $f(x) = y$: (C) và $y = m$: (d) , đưa α vào BBT.
- Không nhằm được 1 nghiệm, m không tách được sang 1 vế : dùng sự tương giao của $(C_m) : y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ (có m) ,(a > 0) và (Ox)

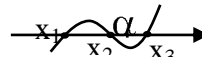
$$\alpha < x_1 < x_2 < x_3 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_{y'} > 0 \\ y_{CB} \cdot y_{CT} < 0 \\ y(\alpha) < 0 \\ \alpha < x_{CB} \end{cases}$$



$$x_1 < \alpha < x_2 < x_3 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_{y'} > 0 \\ y_{CB} \cdot y_{CT} < 0 \\ y(\alpha) > 0 \\ \alpha < x_{CT} \end{cases}$$



$$x_1 < x_2 < \alpha < x_3 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_{y'} > 0 \\ y_{CB} \cdot y_{CT} < 0 \\ y(\alpha) < 0 \\ x_{CB} < \alpha \end{cases}$$



$$x_1 < x_2 < x_3 < \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_{y'} > 0 \\ y_{CB} \cdot y_{CT} < 0 \\ y(\alpha) > 0 \\ x_{CT} < \alpha \end{cases}$$



8. Phương trình bậc 2 có điều kiện :

$$f(x) = ax^2 + bx + c = 0 \quad (a \neq 0), x \neq \alpha$$

$$2 \text{ nghiệm} \Leftrightarrow \begin{cases} f(\alpha) \neq 0 \\ \Delta > 0 \end{cases}, \quad 1 \text{ nghiệm} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ f(\alpha) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Delta = 0 \\ f(\alpha) \neq 0 \end{cases}$$

$$\text{Vô nghiệm} \Leftrightarrow \Delta < 0 \vee \begin{cases} \Delta = 0 \\ f(\alpha) = 0 \end{cases}$$

Nếu a có tham số, xét thêm a = 0 với các trường hợp 1 nghiệm, VN.

9. Phương trình bậc 4 :

a. Trùng phương : $ax^4 + bx^2 + c = 0 (a \neq 0) \Leftrightarrow \begin{cases} t = x^2 \geq 0 \\ f(t) = 0 \end{cases}$

$$t = x^2 \Leftrightarrow x = \pm \sqrt{t}$$

$$4 \text{ nghiệm} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases} ; 3 \text{ nghiệm} \Leftrightarrow \begin{cases} P = 0 \\ S > 0 \end{cases}$$

$$2 \text{ nghiệm} \Leftrightarrow \begin{cases} P < 0 \\ \Delta = 0 \\ S/2 > 0 \end{cases} ; 1 \text{ nghiệm} \Leftrightarrow \begin{cases} P = 0 \\ S < 0 \\ \Delta = 0 \\ S/2 = 0 \end{cases}$$

$$VN \Leftrightarrow \Delta < 0 \vee \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ P > 0 \\ S < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \Delta < 0 \vee \begin{cases} P > 0 \\ S < 0 \end{cases}$$

$$4 \text{ nghiệm CSC} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < t_1 < t_2 \\ \sqrt{t_2} = 3\sqrt{t_1} \end{cases}$$

$$\text{Giải hệ pt : } \begin{cases} t_2 = 9t_1 \\ S = t_1 + t_2 \\ P = t_1 \cdot t_2 \end{cases}$$

b. $ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0$. Đặt $t = x + \frac{1}{x}$. Tìm đk của t bằng BBT : $|t| \geq 2$

c. $ax^4 + bx^3 + cx^2 - bx + a = 0$. Đặt $t = x - \frac{1}{x}$. Tìm đk của t bằng BBT : $t \in \mathbb{R}$.

d. $(x+a)(x+b)(x+c)(x+d) = e$ với $a+b=c+d$. Đặt : $t = x^2 + (a+b)x$. Tìm đk của t bằng BBT.

e. $(x+a)^4 + (x+b)^4 = c$. Đặt : $t = x + \frac{a+b}{2}$, $t \in \mathbb{R}$.

10. Hệ phương trình bậc 1 : $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$. Tính :

$$D = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}, D_x = \begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix}, D_y = \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}$$

$$D \neq 0 : \text{nghiệm duy nhất } x = D_x/D, y = D_y/D.$$

$$D = 0, D_x \neq 0 \vee D_y \neq 0 : VN$$

$$D = D_x = D_y = 0 : VSN \text{ hay VN (giải hệ với m đã biết).}$$

11. Hệ phương trình đối xứng loại 1 :

Từng phương trình đối xứng theo x, y. Đặt $S = x + y, P = xy$.

ĐK : $S^2 - 4P \geq 0$. Tìm S, P. Kiểm tra đk $S^2 - 4P \geq 0$;

Thế S, P vào pt : $X^2 - SX + P = 0$, giải ra 2 nghiệm là x và y.

(α, β) là nghiệm thì (β, α) cũng là nghiệm; nghiệm duy nhất

$$\Rightarrow \alpha = \beta \Rightarrow m = ?$$

Thay m vào hệ, giải xem có duy nhất nghiệm không.

12. Hệ phương trình đối xứng loại 2 :

Phương trình này đối xứng với phương trình kia. Trừ 2 phương trình, dùng các hằng đẳng thức đưa về phương trình tích $A.B = 0$.

Nghiệm duy nhất làm như hệ đối xứng loại 1.

13. Hệ phương trình đẳng cấp :
$$\begin{cases} ax^2 + bxy + cy^2 = d \\ a'x^2 + b'xy + c'y^2 = d' \end{cases}$$

Xét $y = 0$. Xét $y \neq 0$: đặt $x = ty$, chia 2 phương trình để khử t . Còn 1 phương trình theo y , giải ra y , suy ra t , suy ra x . Có thể xét $x = 0$, xét $x \neq 0$, đặt $y = tx$.

14. Bất phương trình, bất đẳng thức :

* Ngoài các bất phương trình bậc 1, bậc 2, dạng cơ bản của $\sqrt{\quad}$, $|\cdot|$, \log , mũ có thể giải trực tiếp, các dạng khác cần lập bảng xét dấu. Với bất phương trình dạng tích $AB < 0$, xét dấu A, B rồi AB.

* Nhân bất phương trình với số dương : không đổi chiều
số âm : có đổi chiều

Chia bất phương trình : tương tự.

* Chỉ được nhân 2 bất pt vế theo vế, nếu 2 vế không âm.

* Bất đẳng thức Côsi :

$$a, b \geq 0 : \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

Dấu = xảy ra chỉ khi $a = b$.

$$a, b, c \geq 0 : \frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$$

Dấu = xảy ra chỉ khi $a = b = c$.

* Bất đẳng thức Bunhiacốpski : a, b, c, d

$(ac + bd)^2 \leq (a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$; Dấu = xảy ra chỉ khi $a/b = c/d$

15. Bài toán tìm m để phương trình có k nghiệm :

Nếu tách được m, dùng sự tương giao của (C) : $y = f(x)$ và (d) : $y = m$. Số nghiệm bằng số điểm chung.

Nếu có điều kiện của $x \in I$, lập BBT của f với $x \in I$.

16. Bài toán tìm m để bất pt vô nghiệm, luôn luôn nghiệm, có nghiệm $x \in I$:

Nếu tách được m, dùng đồ thị, lập BBT với $x \in I$.

$f(x) \leq m$: (C) dưới (d) (hay cắt)

$f(x) \geq m$: (C) trên (d) (hay cắt)

III- LƯỢNG GIÁC

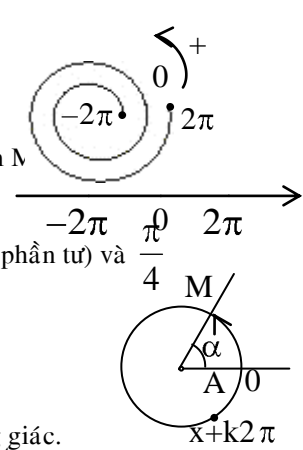
1. Đường tròn lượng giác :

Trên đường tròn lượng giác, góc α đồng nhất với cung AM, đồng nhất với điểm M
1 điểm trên đường tròn lượng giác ứng với vô số các số thực $x + k2\pi$.

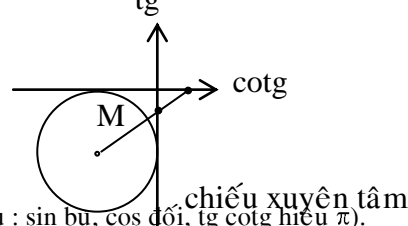
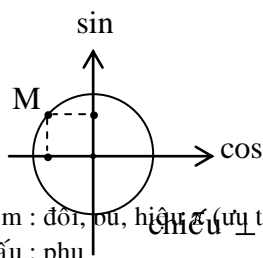
Trên đường tròn lượng giác, nắm vững các góc đặc biệt : bội của $\frac{\pi}{6}$ ($\frac{1}{3}$ cung phân tư) và $\frac{\pi}{4}$

$\frac{1}{2}$ cung phân tư)

$x = \alpha + \frac{2k\pi}{n}$: α là 1 góc đại diện, n : số điểm cách đều trên đường tròn lượng giác.



2. Hàm số lượng giác :



3. Cung liên kết :

* Đổi dấu, không đổi hàm : đổi, bù, hiệu π (ưu tiên không đổi dấu : sin bù, cos đối, tg cotg hiệu π).

* Đổi hàm, không đổi dấu : phụ

* Đổi dấu, đổi hàm : hiệu $\frac{\pi}{2}$ (sin lớn = cos nhỏ : không đổi dấu).

4. Công thức :

a. Cơ bản : đổi hàm, không đổi góc.

b. Cộng : đổi góc $a \pm b$, ra a, b.

- c. Nhân đôi : đổi góc $2a$ ra a .
- d. Nhân ba : đổi góc $3a$ ra a .
- e. Hạ bậc : đổi bậc 2 ra bậc 1. Công thức đổi bậc 3 ra bậc 1 suy từ công thức nhân ba.
- f. Đưa về $t = \operatorname{tg} \frac{a}{2}$: đưa lượng giác về đại số.
- g. Tổng thành tích : đổi tổng thành tích và đổi góc a, b thành $(a \pm b) / 2$.
- h. Tích thành tổng : đổi tích thành tổng và đổi góc a, b thành $a \pm b$.

5. **Phương trình cơ bản** : $\sin \alpha = 0 \Leftrightarrow \cos \alpha = -1$ hay $\cos \alpha = 1 \Leftrightarrow \alpha = k\pi$,

$$\sin \alpha = 1 \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{2} + k2\pi; \sin \alpha = -1 \Leftrightarrow \alpha = -\frac{\pi}{2} + k2\pi,$$

$$\cos \alpha = 0 \Leftrightarrow \sin \alpha = -1 \text{ hay } \sin \alpha = 1 \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi,$$

$$\cos \alpha = 1 \Leftrightarrow \alpha = k2\pi, \cos \alpha = -1 \Leftrightarrow \alpha = \pi + k2\pi$$

$$\sin u = \sin v \Leftrightarrow u = v + k2\pi \vee u = \pi - v + k2\pi$$

$$\cos u = \cos v \Leftrightarrow u = \pm v + k2\pi$$

$$\operatorname{tg} u = \operatorname{tg} v \Leftrightarrow u = v + k\pi$$

$$\operatorname{cotg} u = \operatorname{cotg} v \Leftrightarrow u = v + k\pi$$

6. **Phương trình bậc 1 theo sin và cos** : $a \sin u + b \cos u = c$

* Điều kiện có nghiệm : $a^2 + b^2 \geq c^2$

* Chia 2 vế cho $\sqrt{a^2 + b^2}$, dùng công thức cộng đưa về phương trình cơ bản.

(cách khác : đưa về phương trình bậc 2 theo $t = \operatorname{tg} \frac{u}{2}$)

7. **Phương trình đối xứng theo sin, cos** :

Đưa các nhóm đối xứng về $\sin + \cos$ và $\sin \cdot \cos$.

$$\text{Đặt : } t = \sin u + \cos u = \sqrt{2} \sin \left(u + \frac{\pi}{4} \right), -\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2}, \sin u \cdot \cos u = \frac{t^2 - 1}{2}$$

8. **Phương trình chứa $|\sin u + \cos u|$ và $\sin u \cdot \cos u$** :

$$\text{Đặt : } t = |\sin u + \cos u| = \sqrt{2} \left| \sin \left(u + \frac{\pi}{4} \right) \right|, 0 \leq t \leq \sqrt{2}, \sin u \cdot \cos u = \frac{t^2 - 1}{2}$$

9. **Phương trình chứa $\sin u - \cos u$ và $\sin u \cdot \cos u$** :

$$\text{Đặt : } t = \sin u - \cos u = \sqrt{2} \sin \left(u - \frac{\pi}{4} \right), -\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2}, \sin u \cdot \cos u = \frac{1 - t^2}{2}$$

10. **Phương trình chứa $|\sin u - \cos u|$ và $\sin u \cdot \cos u$** :

$$\text{Đặt : } t = |\sin u - \cos u| = \sqrt{2} \left| \sin \left(u - \frac{\pi}{4} \right) \right|, 0 \leq t \leq \sqrt{2}, \sin u \cdot \cos u = \frac{1 - t^2}{2}$$

11. **Phương trình toàn phương (bậc 2 và bậc 0 theo sin u và cos u)** :

Xét $\cos u = 0$; xét $\cos u \neq 0$, chia 2 vế cho $\cos^2 u$, dùng công thức

$1/\cos^2 u = 1 + \operatorname{tg}^2 u$, đưa về phương trình bậc 2 theo $t = \operatorname{tg} u$.

12. **Phương trình toàn phương mở rộng** :

* Bậc 3 và bậc 1 theo sin u và cos u : chia 2 vế cho $\cos^3 u$.

* Bậc 1 và bậc -1 : chia 2 vế cho cos u.

13. **Giải phương trình bằng cách đổi biến** :

Nếu không đưa được phương trình về dạng tích, thử đặt :

* $t = \cos x$: nếu phương trình không đổi khi thay x bởi $-x$.

* $t = \sin x$: nếu phương trình không đổi khi thay x bởi $\pi - x$.

* $t = \operatorname{tg} x$: nếu phương trình không đổi khi thay x bởi $\pi + x$.

* $t = \cos 2x$: nếu cả 3 cách trên đều đúng

* $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$: nếu cả 3 cách trên đều không đúng.

14. Phương trình đặc biệt :

$$* \quad u^2 + v^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u = 0 \\ v = 0 \end{cases}$$

$$* \quad \begin{cases} u = v \\ u \leq C \\ v \geq C \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = C \\ v = C \end{cases}$$

$$* \quad \begin{cases} u \leq A \\ v \leq B \\ u + v = A + B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = A \\ v = B \end{cases}$$

$$* \quad \sin u \cdot \cos v = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin u = 1 \\ \cos v = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} \sin u = -1 \\ \cos v = -1 \end{cases}$$

$$* \quad \sin u \cdot \cos v = -1 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin u = 1 \\ \cos v = -1 \end{cases} \vee \begin{cases} \sin u = -1 \\ \cos v = 1 \end{cases}$$

Tương tự cho : $\sin u \cdot \sin v = \pm 1$, $\cos u \cdot \cos v = \pm 1$.

15. Hệ phương trình : Với $F(x)$ là \sin , \cos , tg , cotg

a. Dạng 1 :
$$\begin{cases} F(x) \pm F(y) = m & (1) \\ x \pm y = n & (2) \end{cases}$$
 . Dùng công thức đổi + thành nhân,

thế (2) vào (1) đưa về hệ phương trình :
$$\begin{cases} x + y = a \\ x - y = b \end{cases}$$

b. Dạng 2 :
$$\begin{cases} F(x) \cdot F(y) = m \\ x \pm y = n \end{cases}$$
 . Tương tự dạng 1, dùng công thức đổi nhân thành +.

c. Dạng 3 :
$$\begin{cases} F(x) / F(y) = m \\ x \pm y = n \end{cases}$$
 .

Dùng tỉ lệ thức : $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a+c}{b+d} = \frac{a-c}{b-d}$ biến đổi phương trình (1) rồi dùng công thức đổi + thành x.

d. Dạng khác : tìm cách phối hợp 2 phương trình, đưa về các pt cơ bản.

16. Toán Δ :

* Luôn có sẵn 1 pt theo A, B, C : $A + B + C = \pi$

* $A + B$ bù với C, $(A + B)/2$ phụ với $C/2$.

* $A, B, C \in (0, \pi)$; $A/2, B/2, C/2 \in (0, \pi/2)$

$A + B \in (0, \pi)$; $(A + B)/2 \in (0, \pi/2)$;

$A - B \in (-\pi, \pi)$, $(A - B)/2 \in (-\pi/2, \pi/2)$

Dùng các tính chất này để chọn k.

* Đổi cạnh ra góc (đôi khi đổi góc ra cạnh) : dùng định lý hàm sin :

$a = 2R \sin A$ hay định lý hàm cos : $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$

$$* \quad S = \frac{1}{2} a h_a = \frac{1}{2} ab \sin C = \frac{abc}{4R} = pr$$

$$= \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$* \quad \text{Trung tuyến : } m_a = \frac{1}{2} \sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$$

$$* \quad \text{Phân giác : } \ell_a = \frac{2bc \cos \frac{A}{2}}{b+c}$$

IV- TÍCH PHÂN

1. Định nghĩa, công thức, tính chất :

* F là 1 nguyên hàm của $f \Leftrightarrow f$ là đạo hàm của F .

Họ tất cả các nguyên hàm của f :

$$\int f(x)dx = F(x) + C \quad (C \in \mathbb{R})$$

$$* \int du = u + C ; \int u^\alpha du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad \alpha \neq -1$$

$$\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C ; \int e^u du = e^u + C ; \int a^u du = a^u / \ln a + C$$

$$\int \sin u du = -\cos u + C ; \int \cos u du = \sin u + C$$

$$\int du / \sin^2 u = -\cot u + C ; \int du / \cos^2 u = \tan u + C$$

$$* \int_a^b f(x)dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

$$* \int_a^a = 0 ; \int_a^b = -\int_b^a, \int_a^c = \int_a^b + \int_b^c$$

$$\int_a^b (f + g) = \int_a^b f + \int_a^b g ; \int_a^b kf = k \int_a^b f$$

2. Tích phân từng phần :

$$\int u dv = uv - \int v du$$

Thường dùng khi tính tích phân các hàm hỗn hợp.

a. $\int x^n e^x, \int x^n \sin x ; \int x^n \cos x : u = x^n$

b. $\int x^n \ln x : u = \ln x$

c. $\int e^x \sin x, \int e^x \cos x : u = e^x$ hay $dv = e^x dx$

từng phần 2 lần, giải phương trình ẩn hàm f

3. Các dạng thường gặp :

a. $\int \sin^m x \cdot \cos^{2n+1} x : u = \sin x.$

$\int \cos^m x \cdot \sin^{2n+1} x : u = \cos x.$

$\int \sin^{2m} x \cdot \cos^{2n} x : \text{hạ bậc về bậc 1}$

b. $\int \tan^{2m} x / \cos^{2n} x : u = \tan x \quad (n \geq 0)$

$\int \cot^{2m} x / \sin^{2n} x : u = \cot x \quad (n \geq 0)$

c. $\int \text{chứa } a^2 - u^2 : u = a \sin t$

$\int \text{chứa } u^2 - a^2 : u = a / \cos t$

$\int \text{chứa } a^2 + u^2 : u = a \tan t$

d. $\int R(\sin x, \cos x), R : \text{hàm hữu tỷ}$

$R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x) : u = \cos x$

$R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x) : u = \sin x$

$$R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x) \quad : u = \operatorname{tg} x \vee u = \operatorname{cotg} x$$

$$R \text{ đơn giản} : u = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$$

$$\int_0^{\pi/2} : \text{thử đặt } u = \frac{\pi}{2} - x$$

$$\int_0^{\pi} : \text{thử đặt } u = \pi - x$$

e. $\int x^m (a + bx^n)^{p/q}, (m+1)/n \in \mathbb{Z} : u^q = a + bx^n$

f. $\int x^m (a + bx^n)^{p/q}, \frac{m+1}{n} + \frac{p}{q} \in \mathbb{Z} : u^q x^n = a + bx^n$

g. $\int dx / [(hx + k)\sqrt{ax^2 + bx + c}] : hx + k = \frac{1}{u}$

h. $\int R(x, \sqrt{(ax+b)/(cx+d)})$, R là hàm hữu tỷ : $u = \sqrt{(ax+b)/(cx+d)}$

i. \int chứa $(a + bx^k)^{m/n}$: thử đặt $u^n = a + bx^k$.

4. Tích phân hàm số hữu tỷ :

$$\int P(x)/Q(x) : \text{bậc } P < \text{bậc } Q$$

* Đưa Q về dạng tích của $x + a, (x + a)^n, ax^2 + bx + c (\Delta < 0)$

* Đưa P/Q về dạng tổng các phân thức đơn giản, dựa vào các thừa số của Q :

$$x + a \rightarrow \frac{A}{x + a}, (x + a)^n \rightarrow \frac{A_1}{x + a} + \frac{A_2}{(x + a)^2} + \dots + \frac{A_n}{(x + a)^n}$$

$$ax^2 + bx + c (\Delta < 0) \rightarrow \frac{A(2ax + b)}{ax^2 + bx + c} + \frac{B}{ax^2 + bx + c} \left(\int \frac{dx}{ax^2 + bx + c} (\Delta < 0) = \int du / (u^2 + a^2) : \text{đặt } u = a \operatorname{tg} t \right)$$

5. Tính diện tích hình phẳng :

a. D giới hạn bởi $x = a, x = b, (Ox), (C) : y = f(x) : S_D = \int_a^b |f(x)| dx$

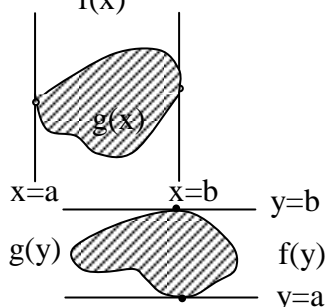
$f(x)$: phân thức hữu tỷ : lập BXD $f(x)$ trên $[a, b]$ để mở $| \cdot |$; $f(x)$: hàm lượng giác : xét dấu $f(x)$ trên cung $[a, b]$ của đường tròn lượng giác.

b. D giới hạn bởi $x = a, x = b, (C) : y = f(x)$

$$(C') : y = g(x) : S_D = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$$

Xét dấu $f(x) - g(x)$ như trường hợp a/.

c. D giới hạn bởi $(C_1) : f_1(x, y) = 0, (C_2) : f_2(x, y) = 0$



$$\alpha / S_D = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$$

$$\beta / S_D = \int_a^b |f(y) - g(y)| dy$$

Với trường hợp α) : nếu biên trên hay biên dưới bị gãy, ta cắt D bằng các đường thẳng đứng ngay chỗ gãy.

Với trường hợp β) : nếu biên phải hay biên trái bị gãy, ta cắt D bằng các đường ngang ngay chỗ gãy.

Chọn tính \int theo dx hay dy để \int dễ tính toán hay D ít bị chia cắt.

Cần giải các hệ phương trình tọa độ giao điểm.

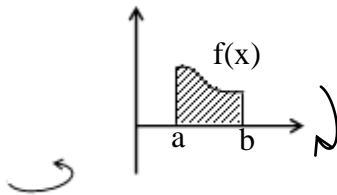
Cần biết vẽ đồ thị các hình thường gặp : các hàm cơ bản, các đường tròn, (E), (H), (P), hàm lượng giác, hàm mũ, hàm $|\cdot|$.

Cần biết rút y theo x hay x theo y từ công thức $f(x,y) = 0$ và biết chọn $+\sqrt{\quad}$ hay $-\sqrt{\quad}$: $y = \dots + \sqrt{\quad}$: trên, $y = \dots - \sqrt{\quad}$: dưới, $x = \dots + \sqrt{\quad}$: phải, $x = \dots - \sqrt{\quad}$: trái

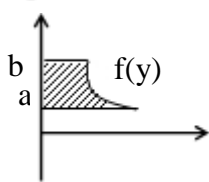
6. Tính thể tích vật thể tròn xoay :

a. D như 5.a/ xoay quanh (Ox) :

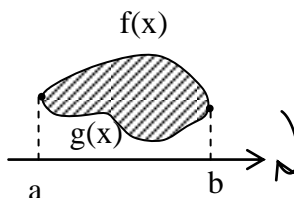
$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$$



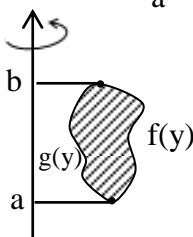
b. $V = \pi \int_a^b f^2(y) dy$



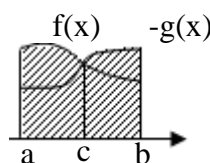
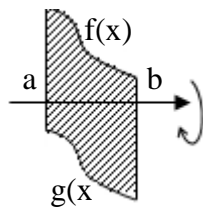
c. $V = \pi \int_a^b [f^2(x) - g^2(x)] dx$



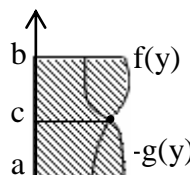
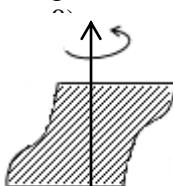
d. $V = \pi \int_a^b [f^2(y) - g^2(y)] dy$



e. $V = \pi \int_a^c f^2(x) dx + \pi \int_c^b g^2(x) dx$



f. $V = \pi \int_a^c g^2(y) dy + \pi \int_c^b f^2(y) dy$



Chú ý : xoay quanh (Ox) : $\int \dots dx$; xoay quanh (Oy) : $\int \dots dy$.

V- KHẢO SÁT HÀM SỐ

1. Tìm lim dạng $\frac{0}{0}$, dạng 1^∞ :

a. Phân thức hữu tỷ : $\lim_{x \rightarrow a} \frac{P(x)}{Q(x)}$ (dạng $0/0$) = $\lim_{x \rightarrow a} \frac{(x-a)P_1(x)}{(x-a)Q_1(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{P_1}{Q_1}$

b. Hàm lg : $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ (dạng $0/0$), dùng công thức $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin u}{u} = 1$

c. Hàm chứa căn : $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ (dạng $0/0$), dùng lượng liên hiệp :

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b) \text{ để phá } \sqrt{\quad}, a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2) \text{ để phá } \sqrt[3]{\quad}$$

d. Hàm chứa mũ hay log (dạng 1^∞) : dùng công thức $\lim_{u \rightarrow 0} (1 + u)^{1/u} = e$

2. Đạo hàm :

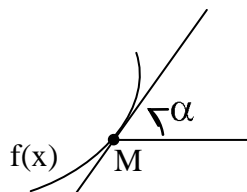
a. Tìm đạo hàm bằng định nghĩa : $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

Tại điểm x_0 mà f đổi công thức, phải tìm đạo hàm từng phía :

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f'_-(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f'_-(x_0) \text{ . Nếu } f'_+(x_0) = f'_-(x_0) \text{ thì } f \text{ có đạo hàm tại } x_0.$$

b. Ý nghĩa hình học :

$$k = \operatorname{tg} \alpha = f'(x_M)$$



c. $f' + : f \uparrow$, $f' - : f \downarrow$
 $f'' + : f \text{ lõm}$, $f'' - : f \text{ lồi}$

d. f đạt CĐ tại $M \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x_M) = 0 \\ f''(x_M) < 0 \end{cases}$

f đạt CT tại $M \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x_M) = 0 \\ f''(x_M) > 0 \end{cases}$

M là điểm uốn của $f \Leftrightarrow f''(x_M) = 0$ và f'' đổi dấu khi qua x_M .

e. Tính đạo hàm bằng công thức : $C' = 0$, $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$, $(\ln x)' = 1/x$, $\log_a x' = \frac{1}{x \ln a}$, $(e^x)' = e^x$

$$(a^x)' = a^x \ln a, (\sin x)' = \cos x, (\cos x)' = -\sin x, (\operatorname{tg} x)' = 1/\cos^2 x, (\operatorname{cot} x)' = -1/\sin^2 x, (ku)' = ku', (u \pm v)' = u' \pm v', (uv)' = u'v + uv', (u/v)' = (u'v - uv')/v^2$$

* Hàm hợp : $(g \circ f)' = g'[f(x)] \cdot f'(x)$

* Đạo hàm lôgarit : lấy log (ln : cơ số e) 2 vế , rồi đạo hàm 2 vế; áp dụng với hàm $[f(x)]^{g(x)}$ hay $f(x)$ dạng tích, thương, chứa $\sqrt[n]{\quad} \dots$

f. Vi phân : $du = u'dx$

3. Tiệm cận :

$\lim_{x \rightarrow a} y = \infty \Rightarrow x = a : \text{tcđ}$

x	a	
y	$\infty \parallel \infty$	

$\lim_{x \rightarrow \infty} y = b \Rightarrow y = b : \text{tcn}$

x	$-\infty$	$+\infty$
y	b	b

$\lim_{x \rightarrow \infty} [y - (ax + b)] = 0 \Rightarrow y = ax + b : \text{tcx}$

x	$-\infty$	$+\infty$
y	∞	∞

* Vẽ đồ thị có tiệm cận :

- t c đ : khi y càng tiến về $\pm \infty$ thì đường cong càng gần đường t c .
- t c x : khi x và y càng tiến về $\pm \infty$ thì đường cong càng gần đường t c .
- t c n : khi x càng tiến về $\pm \infty$ thì đường cong càng gần đường t c .

* Xét $y = \frac{P(x)}{Q(x)}$

- Có tđđ $x = a$ khi $Q(a) = 0, P(a) \neq 0$
- Có tcn khi bậc $P \leq$ bậc Q : với $x \rightarrow \infty$, tìm lim y bằng cách lấy số hạng bậc cao nhất của P chia số hạng bậc cao nhất của Q .
- Có tcn khi P hơn Q 1 bậc, khi đó chia đa thức ta có : $f(x) = ax + b + \frac{P_1(x)}{Q(x)}$, tcn là $y = ax + b$. Nếu $Q = x - \alpha$, có

thể chia Honer.

* Biện luận tiệm cận hàm bậc 2 / bậc 1 :

$$y = ax + b + \frac{c}{dx + e} \quad (d \neq 0)$$

- $a \neq 0, c \neq 0$: có tđđ, tcn
- $a = 0, c \neq 0$: có tcn, tđđ.
- $c = 0$: (H) suy biến thành đt, không có tcn.

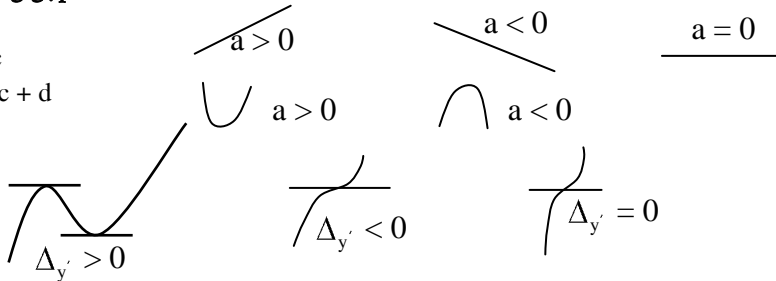
4. Đồ thị các hàm thường gặp :

a/ $y = ax + b$:

b/ $y = ax^2 + bx + c$

c/ $y = ax^3 + bx^2 + c + d$

$a > 0$:

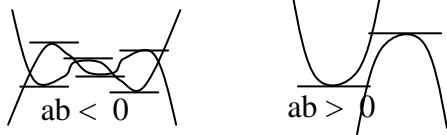


$a < 0$:

d/ $y = ax^4 + bx^2 + c$

$a > 0$

$a < 0$



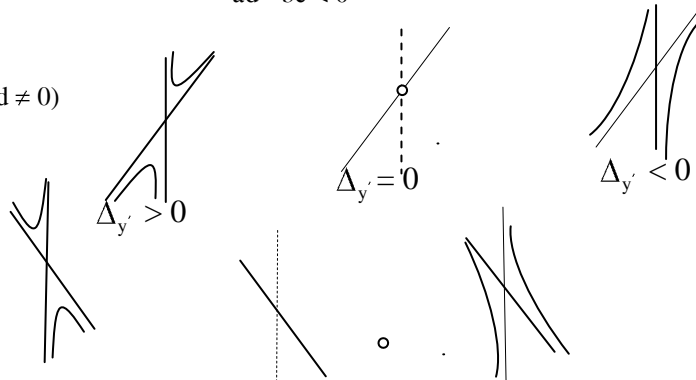
e/ $y = (ax + b) / (cx + d) \quad (c \neq 0)$



f/ $y = \frac{ax^2 + bx + c}{dx + e} \quad (ad \neq 0)$

$ad > 0$

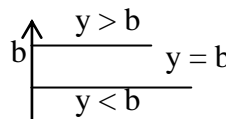
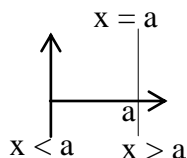
$ad < 0$



5. ĐỐI XỨNG ĐỒ THỊ :

$g(x) = f(-x)$: đx qua (Oy)

$g(x) = -f(x)$: đx qua (Ox)



$(C') : y = |f(x)|$: giữ nguyên phần (C) bên trên $y = 0$, lấy phần (C) bên dưới $y = 0$ đối xứng qua (Ox).

$(C') : y = f(|x|)$: giữ nguyên phần (C) bên phải $x = 0$, lấy phần (C) bên phải $x = 0$ đối xứng qua (Oy).

6. ĐIỂM ĐẶC BIỆT CỦA (Cm) : $y = f(x, m)$

a/ Điểm cố định : $M(x_0, y_0) \in (Cm), \forall m \Leftrightarrow y_0 = f(x_0, m), \forall m \Leftrightarrow Am + B = 0, \forall m$ (hay $Am^2 + Bm + C = 0, \forall m$) \Leftrightarrow

$$\begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \end{cases} \text{ (hay } \begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \\ C = 0 \end{cases} \text{)}. \text{ Giải hệ, được M.}$$

b/ Điểm (Cm) không đi qua, $\forall m : M(x_0, y_0) \notin (Cm), \forall m \Leftrightarrow y_0 \neq f(x_0, m), \forall m \Leftrightarrow y_0 = f(x_0, m) \forall m \Leftrightarrow Am + B = 0 \forall m$

$$m \text{ (hay } Am^2 + Bm + C = 0 \forall m) \Leftrightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B \neq 0 \end{cases} \text{ (hay } \begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \\ C \neq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} A \neq 0 \\ \Delta < 0 \end{cases} \text{)}. \text{ Giải hệ, được M.}$$

$$\text{Chú ý : } \frac{A}{B} = C \forall m \Leftrightarrow B = 0 \vee \begin{cases} B \neq 0 \\ A = BC \forall m \end{cases}$$

c/ Điểm có n đường cong của họ (Cm) đi qua : Có n đường (Cm) qua $M(x_0, y_0) \Leftrightarrow y_0 = f(x_0, m)$ có n nghiệm m. Cần nắm vững điều kiện có n nghiệm của các loại phương trình : bậc 2, bậc 2 có điều kiện $x \neq \alpha$, bậc 3, trùng phương.

7. TIẾP XÚC, PHƯƠNG TRÌNH TIẾP TUYẾN :

a. $(C) : y = f(x), tx (C') : y = g(x)$ khi hệ phương trình sau có nghiệm : $\begin{cases} y_C = y_{C'} \\ y'_C = y'_{C'} \end{cases}$. Nghiệm x của hệ là hoành độ tiếp điểm.

b. Tìm tiếp tuyến với $(C) : y = f(x)$

* Tại $M(x_0, y_0) : y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0$.

* Qua $M(x_0, y_0)$: viết phương trình đường thẳng qua $M : (d) : y = k(x - x_0) + y_0$. Dùng điều kiện tx tìm k. Số lượng k = số lượng tiếp tuyến (nếu f bậc 3 hay bậc 2 / bậc 1 thì số nghiệm x trong hệ phương trình đk tx = số lượng tiếp tuyến).

* // $(\Delta) : y = ax + b : (d) // (\Delta) \Rightarrow (d) : y = ax + m$. Tìm m nhờ đk tx.

* $\perp (\Delta) : y = ax + b (a \neq 0) : (d) \perp (\Delta) \Rightarrow (d) : y = -\frac{1}{a}x + m$. Tìm m nhờ đk tx.

c. Bài toán số lượng tiếp tuyến : tìm $M \in (C') : g(x, y) = 0$ sao cho từ M kẻ được đến (C) đúng n tiếp tuyến ($n = 0, 1, 2, \dots$),

$$M(x_0, y_0) \in (C') \Leftrightarrow g(x_0, y_0) = 0; (d) \text{ qua } M : y = k(x - x_0) + y_0; (d) \text{ tx } (C) : \begin{cases} y_C = y_d \\ y'_C = k \end{cases} \text{ (1). Thế k vào (1) được phương}$$

trình ẩn x, tham số x_0 hay y_0 . Đặt đk để phương trình này có n nghiệm x (số nghiệm x = số tiếp tuyến), tìm được x_0 hay y_0 .

8. TƯƠNG GIAO :

* Phương trình hđ điểm chung của $(C) : y = f(x)$ và $(C') : y = g(x)$ là : $f(x) = g(x)$. Số nghiệm pt = số điểm chung.

* Tìm m để $(C_m) : y = f(x, m)$ và $(C'_m) : y = g(x, m)$ có n giao điểm : Viết phương trình hoành độ điểm chung; đặt đk để pt có n nghiệm. Nếu pt hoành độ điểm chung tách được m sang 1 vế : $F(x) = m$: đặt điều kiện để $(C) : y = F(x)$ và $(d) : y = m$ có n điểm chung.

* Biện luận sự tương giao của (C_m) và (C'_m) :

• Nếu pt hđ điểm chung dạng : $F(x) = m$: lập BBT của F; số điểm chung của (C_m) và (C'_m) = số điểm chung của (C) và (d).

• PThđ điểm chung, không tách được m, dạng $f(x) = ax^2 + bx + c = 0 (x \neq \alpha)$ hay dạng bậc 3 : $x = \alpha \vee f(x) = 0$: lập Δ , xét dấu Δ , giải pt $f(x) = 0$ để biết m nào thì α là nghiệm của f, với m đó, số nghiệm bị bớt đi 1.

9. CỰC TRỊ :

* f có đúng n cực trị $\Leftrightarrow f'$ đổi dấu n lần.

$$\text{* f đạt cực đại tại } x_0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x_0) = 0 \\ f''(x_0) < 0 \end{cases}$$

$$f \text{ đạt cực tiểu tại } x_0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x_0) = 0 \\ f''(x_0) > 0 \end{cases}$$

* f bậc 3 (hay bậc 2 / bậc 1) có cực trị $\Leftrightarrow f$ có CĐ và CT $\Leftrightarrow \Delta_{f'} > 0$

* f bậc 3 (hay bậc 2 / bậc 1) có cực trị :

- Bên phải (đ) : $x = \alpha \Leftrightarrow y' = 0$ có 2 nghiệm $\alpha < x_1 < x_2$.
- Bên trái (đ) : $x = \alpha \Leftrightarrow y' = 0$ có 2 nghiệm $x_1 < x_2 < \alpha$.

$$\bullet 1 \text{ bên (Ox)} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_{f'} > 0 \\ y_{CD} \cdot y_{CT} > 0 \end{cases}$$

$$\bullet 2 \text{ bên (Ox)} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_{f'} > 0 \\ y_{CD} \cdot y_{CT} < 0 \end{cases}$$

* Với hàm bậc 2 / bậc 1, các điều kiện $y_{CD} \cdot y_{CT} < 0$ (> 0) có thể thay bởi $y = 0$ VN (có 2 nghiệm.).

* Tính $y_{CD} \cdot y_{CT}$:

- Hàm bậc 3 : $y = y'(Ax + B) + (Cx + D)$

$$y_{CD} \cdot y_{CT} = (Cx_{CD} + D) \cdot (Cx_{CT} + D), \text{ dùng Viète với pt } y' = 0.$$

- Hàm bậc 2 / bậc 1 : $y = \frac{u}{v}$

$$y_{CD} \cdot y_{CT} = \frac{u'(x_{CD}) \cdot u'(x_{CT})}{v'(x_{CD}) \cdot v'(x_{CT})}, \text{ dùng Viète với pt } y' = 0.$$

* Đường thẳng qua CĐ, CT :

- Hàm bậc 3 : $y = Cx + D$
- Hàm bậc 2 / bậc 1 : $y = u' / v'$

* $y = ax^4 + bx^2 + c$ có 1 cực trị $\Leftrightarrow ab \geq 0$, 3 cực trị $\Leftrightarrow ab < 0$

10. ĐƠN ĐIỀU :

a. Biện luận sự biến thiên của hàm bậc 3 :

- $a > 0$ và $y' = 0$ vô nghiệm \Rightarrow hàm số tăng trên \mathbb{R} (luôn luôn tăng)
- $a < 0$ và $y' = 0$ vô nghiệm \Rightarrow hàm số giảm (nghịch biến) trên \mathbb{R} (luôn luôn giảm)
- $a > 0$ và $y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 với $x_1 < x_2$
 \Rightarrow hàm số đạt cực đại tại x_1 và đạt cực tiểu tại x_2 .

Ngoài ra ta còn có :

- + $x_1 + x_2 = 2x_0$ với x_0 là hoành độ điểm uốn.
- + hàm số tăng trên $(-\infty, x_1)$
- + hàm số tăng trên $(x_2, +\infty)$
- + hàm số giảm trên (x_1, x_2)

iv) $a < 0$ và $y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 với $x_1 < x_2$

\Rightarrow hàm đạt cực tiểu tại x_1 và đạt cực đại tại x_2 thỏa điều kiện $x_1 + x_2 = 2x_0$ (x_0 là hoành độ điểm uốn). Ta cũng có :

- + hàm số giảm trên $(-\infty, x_1)$
- + hàm số giảm trên $(x_2, +\infty)$
- + hàm số tăng trên (x_1, x_2)

b. Biện luận sự biến thiên của $y = \frac{\text{bậc } 2}{\text{bậc } 1}$

i) Nếu $a.m > 0$ và $y' = 0$ vô nghiệm thì hàm tăng (đồng biến) trên từng khoảng xác định.

ii) Nếu $a.m < 0$ và $y' = 0$ vô nghiệm thì hàm giảm (nghịch biến) trên từng khoảng xác định.

iii) Nếu $a.m > 0$ và $y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 thì hàm đạt cực đại tại x_1 và đạt cực tiểu tại x_2 thỏa $x_1 < x_2$ và

$$\frac{x_1 + x_2}{2} = -\frac{p}{m}.$$

iv) Nếu $a.m < 0$ và $y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 thì hàm đạt cực tiểu tại x_1 và đạt cực đại tại x_2 thỏa $x_1 < x_2$ và

$$\frac{x_1 + x_2}{2} = -\frac{p}{m}.$$

c. Tìm m để hàm số bậc 3, bậc 2/bậc 1 đồng biến (nghịch biến) trên miền $x \in I$: đặt đk để I nằm trong miền đồng biến (nghịch biến) của các BBT trên; so sánh nghiệm pt bậc 2 $y' = 0$ với α .

11. BIỆN LUẬN SỐ NGHIỆM PT BẰNG ĐỒ THỊ :

a. Cho pt : $F(x, m) = 0$; tách m sang 1 vế : $f(x) = m$; lập BBT của f (nếu f đã khảo sát thì dùng đồ thị của f), số nghiệm = số điểm chung.

b. Với pt mũ, log, $\sqrt{\quad}$, $|\cdot|$, lượng giác : đổi biến; cần biết mỗi biến mới t được mấy biến cũ x; cần biết đk của t để cắt bớt đồ thị f.

12. QUỸ TÍCH ĐIỂM DI ĐỘNG $M(x_0, y_0)$:

Dựa vào tính chất điểm M, tìm 2 đẳng thức chứa x_0, y_0, m ; khử m, được $F(x_0, y_0) = 0$; suy ra $M \in (C) : F(x, y) = 0$; giới hạn quỹ tích : M tồn tại $\Leftrightarrow m ? \Leftrightarrow x_0 ?$ (hay $y_0 ?$)

• Nếu $x_0 = a$ thì $M \in (d) : x = a$.

• Nếu $y_0 = b$ thì $M \in (d) : y = b$.

13. TÂM, TRỤC, CẶP ĐIỂM ĐỐI XỨNG :

a. CM hàm bậc 3 có tâm đx (điểm uốn), hàm bậc 2/bậc 1 có tâm đx (gđ 2 tc)

tại I : đổi tọa độ : $x = X + x_I, y = Y + y_I$; thế vào hàm số : $Y = F(X)$, cm :

$F(-X) = -F(X)$, suy ra F là hàm lẻ, đồ thị có tđx là gốc tọa độ I.

b. CM hàm bậc 4 có trục đx // (Oy) : giải pt $y' = 0$; nếu $x = a$ là nghiệm duy nhất hay là nghiệm chính giữa của 3 nghiệm : đổi tọa độ $x = X + a, y = Y$; thế vào hàm số : $Y = F(X)$; cm $F(-X) = F(X)$; suy ra F là hàm chẵn, đồ thị có trục đối xứng là trục tung $X = 0$, tức $x = a$.

c. Tìm trên (C) : $y = f(x)$ cặp điểm M, N đối xứng qua I : giải hệ 4 pt 4 ẩn :

$$\begin{cases} x_M + x_N = 2x_I \\ y_M + y_N = 2y_I \\ y_M = f(x_M) \\ y_N = f(x_N) \end{cases}$$

d. Tìm trên (C) : $y = f(x)$ cặp điểm đ/x qua đt (d) : $y = ax + b$: dt \perp (d) là

(d') : $y = -\frac{1}{a}x + m$; lập pt hđ điểm chung của (C) và (d'); giả sử pt có 2 nghiệm x_A, x_B , tính tọa độ trung điểm I của AB theo

m ; A, B đối xứng qua (d) $\Leftrightarrow I \in (d)$

$\Leftrightarrow m?$; thay m vào pthđ điểm chung, giải tìm x_A, x_B , suy ra y_A, y_B .

14. Tìm điểm $M \in (C) : y = ax + b + \frac{c}{dx + e}$ có tọa độ nguyên ($a, b, c, d, e \in \mathbb{Z}$) : giải hệ

$$\begin{cases} y_M = ax_M + b + \frac{c}{dx_M + e} \\ x_M, y_M \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_M = ax_M + b + \frac{c}{dx_M + e} \\ x_M, \frac{c}{dx_M + e} \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y_M = ax_M + b + \frac{c}{dx_M + e} \\ x_M \in \mathbb{Z}, dx_M + e = \text{ước số của } c \end{cases}$$

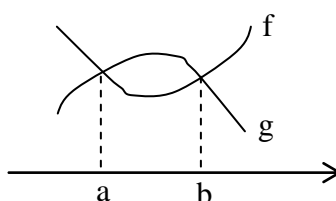
15. Tìm min, max của hàm số $y = f(x)$

Lập BBT, suy ra miền giá trị và min, max.

16. Giải bất phương trình bằng đồ thị :

$$f < g \Leftrightarrow a < x < b, f > g \Leftrightarrow \begin{cases} x < a \\ b < x \end{cases}$$

$$f \leq g \Leftrightarrow a \leq x \leq b, f \geq g \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq a \\ x \geq b \end{cases}$$



VI- HÌNH HỌC GIẢI TÍCH

1. Tọa độ, vectơ :

* $(a, b) \pm (a', b') = (a \pm a', b \pm b')$

$$k(a, b) = (ka, kb)$$

$$(a, b) = (a', b') \Leftrightarrow \begin{cases} a = a' \\ b = b' \end{cases}$$

$$(a, b) \cdot (a', b') = aa' + bb'$$

$$|(a, b)| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\cos(\vec{v}, \vec{v}') = \frac{\vec{v} \cdot \vec{v}'}{|\vec{v}| \cdot |\vec{v}'|}$$

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A), AB = |\overrightarrow{AB}|$$

$$M \text{ chia } AB \text{ theo tỉ số } k \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB}$$

$$\Leftrightarrow x_M = \frac{x_A - kx_B}{1 - k}, y_M = \frac{y_A - ky_B}{1 - k} \quad (k \neq 1)$$

$$M : \text{trung điểm } AB \Leftrightarrow x_M = \frac{x_A + x_B}{2}, y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$$

$$M : \text{trọng tâm } \Delta ABC \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} \\ y_M = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \end{cases}$$

(tương tự cho vectơ 3 chiều).

* Vectơ 3 chiều có thêm tích có hướng và tích hỗn hợp :

$$\vec{v} = (a, b, c), \vec{v}' = (a', b', c')$$

$$[\vec{v}, \vec{v}'] = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{vmatrix}$$

$$[\vec{v}, \vec{v}'] = |\vec{v}| \cdot |\vec{v}'| \cdot \sin(\vec{v}, \vec{v}')$$

$$[\vec{v}, \vec{v}'] \perp \vec{v}, \vec{v}'$$

* $\vec{v} \perp \vec{v}' \Leftrightarrow \vec{v} \cdot \vec{v}' = 0$; $\vec{v} // \vec{v}' \Leftrightarrow [\vec{v}, \vec{v}'] = 0$; $\vec{v}, \vec{v}', \vec{v}''$ đồng phẳng

$$\Leftrightarrow [\vec{v}, \vec{v}'] \cdot \vec{v}'' = 0$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \left| \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \right|$$

$$V_{S.ABC} = \frac{1}{6} \left| \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AS} \right|$$

$$V_{ABCD.A'B'C'D'} = \left| [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}], \overrightarrow{AA'} \right|$$

$$A, B, C \text{ thẳng hàng} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} // \overrightarrow{AC}$$

* Δ trong mp : H là trực tâm $\Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \\ \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \end{cases}$

$$H \text{ là chân đường cao } h_a \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \\ \overrightarrow{BH} // \overrightarrow{BC} \end{cases}$$

$$M \text{ là chân phân giác trong } \hat{A} \Leftrightarrow \overrightarrow{MB} = -\frac{AB}{AC} \overrightarrow{MC}$$

M là chân phân giác ngoài $\hat{A} \Leftrightarrow \overrightarrow{MB} = +\frac{AB}{AC}\overrightarrow{MC}$

I là tâm đường tròn ngoại tiếp $\Leftrightarrow IA = IB = IC$.

I là tâm đường tròn nội tiếp $\Leftrightarrow I$ là chân phân giác trong \hat{B} của ΔABM với M là chân phân giác trong \hat{A} của ΔABC .

2. Đường thẳng trong mp :

* Xác định bởi 1 điểm $M(x_0, y_0)$ và 1 vtcp $\overrightarrow{v} = (a, b)$ hay 1 pháp vectơ (A, B) :

$$(d) : \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases}, \quad (d) : \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b}$$

$$(d) : A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$$

* (d) qua $A(a, 0); B(0, b) : \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$

$$* (AB) : \frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A}$$

* (d) : $Ax + By + C = 0$ có $\overrightarrow{v} = (-B, A)$; $\overrightarrow{n} = (A, B)$

* (d) // (Δ) : $Ax + By + C = 0 \Rightarrow (d) : Ax + By + C' = 0$

* (d) \perp (Δ) $\Rightarrow (d) : -Bx + Ay + C' = 0$

* (d), (d') tạo góc nhọn φ thì :

$$\cos \varphi = \frac{|\overrightarrow{n_d} \cdot \overrightarrow{n_{d'}}|}{|\overrightarrow{n_d}| \cdot |\overrightarrow{n_{d'}}|} \neq \cos(\overrightarrow{n_d}, \overrightarrow{n_{d'}})$$

$$* d(M, (d)) = \frac{|Ax_M + By_M + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

* Phân giác của (d) : $Ax + By + C = 0$ và (d') : $A'x + B'y + C' = 0$ là :

$$\frac{Ax + By + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \pm \frac{A'x + B'y + C'}{\sqrt{A'^2 + B'^2}}$$

$\overrightarrow{n_d} \cdot \overrightarrow{n_{d'}} > 0$: phân giác góc tù + , nhọn -

$\overrightarrow{n_d} \cdot \overrightarrow{n_{d'}} < 0$: phân giác góc tù - , nhọn +

* Tương giao : Xét hpt tọa độ giao điểm.

3. Mặt phẳng trong không gian :

* Xác định bởi 1 điểm $M(x_0, y_0, z_0)$ và 1 pháp vectơ : $\overrightarrow{n} = (A, B, C)$ hay 2 vtcp $\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v'}$.

$$(P) : A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

$$\overrightarrow{n} = [\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v'}]$$

(P) : $Ax + By + Cz + D = 0$ có $\overrightarrow{n} = (A, B, C)$.

(P) qua $A(a, 0, 0); B(0, b, 0); C(0, 0, c) \Leftrightarrow (P) : x/a + y/b + z/c = 1$

* Cho $M(x_0, y_0, z_0)$, (P) : $Ax + By + Cz + D = 0$

$$d(M, (P)) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

* (P), (P') tạo góc nhọn φ thì : $\cos \varphi = \left| \cos(\overrightarrow{n_{(P)}}, \overrightarrow{n_{(P')}}) \right|$

* (P) \perp (P') $\Leftrightarrow \overrightarrow{n_{(P)}} \perp \overrightarrow{n_{(P)'}}$, (P) // (P') $\Leftrightarrow \overrightarrow{n_{(P)}} // \overrightarrow{n_{(P)'}}$

4. Đường thẳng trong không gian :

* Xác định bởi 1 điểm M (x_0, y_0, z_0) và 1 vtcp $\vec{v} = (a, b, c)$ hay 2 pháp vectơ: \vec{n}, \vec{n}' :

$$(d) : \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}, (d) : \frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$$

$$\vec{v} = [\vec{n}, \vec{n}']$$

* (AB) : $\frac{x-x_A}{x_B-x_A} = \frac{y-y_A}{y_B-y_A} = \frac{z-z_A}{z_B-z_A}$

* (d) = (P) \cap (P') : $\begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ A'x + B'y + C'z + D' = 0 \end{cases}$

* (d) qua A, vtcp \vec{v} thì :

$$d(M, (d)) = \frac{|[\vec{AM}, \vec{v}]|}{|\vec{v}|}$$

* φ là góc nhọn giữa (d), (d') thì :

$$\cos\varphi = \left| \cos(\vec{v}_d, \vec{v}_{d'}) \right|$$

* φ là góc nhọn giữa (d), (P) thì :

$$\sin\varphi = \left| \cos(\vec{v}_d, \vec{n}_p) \right|$$

* (d) qua M, vtcp \vec{v} , (P) có pvt \vec{n} :

(d) cắt (P) $\Leftrightarrow \vec{v} \cdot \vec{n} \neq 0$

(d) // (P) $\Leftrightarrow \vec{v} \cdot \vec{n} = 0$ và $M \notin (P)$

(d) \subset (P) $\Leftrightarrow \vec{v} \cdot \vec{n} = 0$ và $M \in (P)$

* (d) qua A, vtcp \vec{v} ; (d') qua B, vtcp \vec{v}' :

(d) cắt (d') $\Leftrightarrow [\vec{v}, \vec{v}'] \neq \vec{0}, [\vec{v}, \vec{v}'] \vec{AB} = 0$

(d) // (d') $\Leftrightarrow [\vec{v}, \vec{v}'] = \vec{0}, A \notin (d')$

(d) chéo (d') $\Leftrightarrow [\vec{v}, \vec{v}'] \neq \vec{0}, [\vec{v}, \vec{v}'] \vec{AB} \neq 0$

(d) \equiv (d') $\Leftrightarrow [\vec{v}, \vec{v}'] = \vec{0}, A \in (d')$

* (d) chéo (d') : $d(d, d') = \frac{|[\vec{v}, \vec{v}'] \vec{AB}|}{|[\vec{v}, \vec{v}']|}$

* (d) chéo (d'), tìm đường \perp chung (Δ) : tìm $\vec{n} = [\vec{v}, \vec{v}']$; tìm (P) chứa (d), // \vec{n} ; tìm (P') chứa (d'), // \vec{n} ; (Δ) = (P) \cap (P').

* (d) \perp (P), cắt (d') \Rightarrow (d) nằm trong mp \perp (P), chứa (d').

* (d) qua A, // (P) \Rightarrow (d) nằm trong mp chứa A, // (P).

* (d) qua A, cắt (d') \Rightarrow (d) nằm trong mp chứa A, chứa (d').

* (d) cắt (d'), // (d'') \Rightarrow (d) nằm trong mp chứa (d'), // (d'').

* (d) qua A, \perp (d') \Rightarrow (d) nằm trong mp chứa A, \perp (d').

* Tìm hc H của M xuống (d) : viết pt mp (P) qua M, \perp (d), $H = (d) \cap (P)$.

* Tìm hc H của M xuống (P) : viết pt đt (d) qua M, \perp (P) : $H = (d) \cap (P)$.

* Tìm hc vuông góc của (d) xuống (P) : viết pt mp (Q) chứa (d), \perp (P);

(d') = (P) \cap (Q)

* Tìm hc song song của (d) theo phương (Δ) xuống (P) : viết pt mp (Q) chứa (d)

$$// (\Delta); (d') = (P) \cap (Q).$$

5. Đường tròn :

- * Đường tròn (C) xác định bởi tâm I(a,b) và bk R : (C) : $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$
- * (C) : $x^2 + y^2 + 2Ax + 2By + C = 0$ có tâm I(-A,-B), bk R = $\sqrt{A^2 + B^2 - C}$
- * (d) tx (C) $\Leftrightarrow d(I, (d)) = R$, cắt $\Leftrightarrow < R$, không cắt $\Leftrightarrow > R$.
- * Tiếp tuyến với (C) tại M(x₀,y₀) : phân đôi t/độ trong (C) :
 $(x_0 - a)(x - a) + (y_0 - b)(y - b) = R^2$ hay $x_0x + y_0y + A(x_0 + x) + B(y_0 + y) + C = 0$
- * Cho (C) : $F(x,y) = x^2 + y^2 + 2Ax + 2By + C = 0$ thì $P_M/(C) = F(x_M, y_M) = \overline{MA} \cdot \overline{MB} = MT^2 = MI^2 - R^2$ với MAB : cát tuyến, MT : tiếp tuyến ; $M \in (C) \Leftrightarrow P_M/(C) = 0$, M trong (C) $\Leftrightarrow P_M/(C) < 0$, ngoài $\Leftrightarrow > 0$.
- * Trục đẳng phương của (C) và (C') : $2(A - A')x + 2(B - B')y + (C - C') = 0$
- * (C), (C') ngoài nhau $\Leftrightarrow \Pi' > R + R'$: (có 4 tiếp tuyến chung); tx ngoài $\Leftrightarrow = R + R'$ (3 tiếp tuyến chung); cắt $\Leftrightarrow \left| R - R' \right| < \Pi' < R + R'$ (2 tt chung); tx trong $\Leftrightarrow = \left| R - R' \right|$ (1 tt chung là trục đẳng phương) chứa nhau $\Leftrightarrow < \left| R - R' \right|$ (không có tt chung).

6. Mặt cầu :

- * Mc (S) xđ bởi tâm I (a, b, c) và bk R : (S) : $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$.
- * (S) : $x^2 + y^2 + z^2 + 2Ax + 2By + 2Cz + D = 0$ có tâm I(-A,-B,-C), bk R = $\sqrt{A^2 + B^2 + C^2 - D}$
- * (P) tx (S) $\Leftrightarrow d(I,(P)) = R$, cắt $\Leftrightarrow < R$, không cắt $\Leftrightarrow > R$.
- * Pt tiếp diện với (S) tại M : phân đôi t/độ (S).
- * Cho (S) : $F(x, y, z) = 0$. $P_M/(S) = F(x_M, y_M, z_M)$; $P_M/(S) = 0 \Leftrightarrow M \in (S)$, $< 0 \Leftrightarrow M$ trong (S), $> 0 \Leftrightarrow M$ ngoài (S).
- * Mặt đẳng phương của (S) và (S') :
 $2(A - A')x + 2(B - B')y + 2(C - C')z + (D - D') = 0$
- * Tương giao giữa (S), (S') : như (C), (C').
- * Khi (S), (S') tx trong thì tiết diện chung là mặt đẳng phương.
- * Khi (S), (S') cắt nhau thì mp qua giao tuyến là mặt đẳng phương.

7. Elip :

$$* \text{ cho } F_1, F_2, F_1F_2 = 2c, \text{ cho } a > c > 0$$

$$M \in (E) \Leftrightarrow MF_1 + MF_2 = 2a.$$

- * (E) : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) : tiêu điểm : $F_1(-c,0), F_2(c,0)$; đỉnh $A_1(-a,0); A_2(a,0); B_1(0,-b); B_2(0,b)$; tiêu cự : $F_1F_2 = 2c$, trục lớn $A_1A_2 = 2a$; trục nhỏ

$$B_1B_2 = 2b; \text{ tâm sai } e = c/a; \text{ đường chuẩn } x = \pm a/e; \text{ bk qua tiêu : } MF_1 = a + ex_M,$$

$$MF_2 = a - ex_M; \text{ tt với (E) tại M : phân đôi tọa độ (E),}$$

$$(E) \text{ tx (d) : } Ax + By + C = 0 \Leftrightarrow a^2A^2 + b^2B^2 = C^2; a^2 = b^2 + c^2.$$

- * (E) : $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$ ($a > b > 0$) : không chính tắc; tiêu điểm : $F_1(0,-c), F_2(0,c)$; đỉnh $A_1(0,-a), A_2(0,a), B_1(-b,0),$

$B_2(b,0)$, tiêu cự : $F_1F_2 = 2c$; trục lớn $A_1A_2 = 2a$; trục nhỏ $B_1B_2 = 2b$; tâm sai $e = c/a$; đường chuẩn $y = \pm a/e$; bán kính qua tiêu $MF_1 = a + ey_M, MF_2 = a - ey_M$; tiếp tuyến với (E) tại M : phân đôi tọa độ (E); (E) tiếp xúc (d) : $Ax + By + C = 0 \Leftrightarrow a^2B^2 + b^2A^2 = C^2; a^2 = b^2 + c^2$ (Chú ý : tất cả các kết quả của trường hợp này suy từ trường hợp chính tắc trên bằng cách thay x bởi y, y bởi x).

8. Hypebol :

- * Cho $F_1, F_2, F_1F_2 = 2c$, cho $0 < a < c$.

$$M \in (H) \Leftrightarrow \left| MF_1 - MF_2 \right| = 2a$$

$$(H) : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ (pt chính tắc)}$$

tiêu điểm $F_1(-c,0), F_2(c,0)$; đỉnh tr.thực $A_1(-a,0), A_2(a,0)$; đỉnh trục ảo

$B_1(0,-b), B_2(0,b)$; tiêu cự $F_1F_2 = 2c$; độ dài trục thực $A_1A_2 = 2a$; độ dài trục ảo

$B_1B_2 = 2b$; tâm sai : $e = c/a$; đường chuẩn : $x = \pm a/e$; bán kính qua tiêu : $M \in$ nhánh phải $MF_1 = ex_M + a, MF_2 = ex_M - a, M$

\in nhánh trái $MF_1 = -ex_M - a,$

$MF_2 = -ex_M + a$; tiếp tuyến với (H) tại M : phân đôi tọa độ (H);

$$(H) \text{ tx } (d) : Ax + By + C = 0 \Leftrightarrow a^2A^2 - b^2B^2 = C^2 > 0; \text{tiệm cận } y = \pm \frac{b}{a}x$$

hình chữ nhật cơ sở : $x = \pm a, y = \pm b; c^2 = a^2 + b^2$.

$$(H) : \frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 \text{ (pt không chính tắc)}$$

tiêu điểm $F_1(0, -c), F_2(0, c)$; đỉnh thực $A_1(0, -a), A_2(0, a)$; đỉnh trục ảo $B_1(-b, 0), B_2(b, 0)$; tiêu cự $F_1F_2 = 2c$; độ dài trục thực $A_1A_2 = 2a$; độ dài trục ảo $B_1B_2 = 2b$; tâm sai : $e = c/a$; đường chuẩn : $y = \pm a/c$; bán kính qua tiêu : $M \in$ nhánh trên $MF_1 = ey_M + a, MF_2 = ey_M - a$; $M \in$ nhánh dưới $MF_1 = -ey_M - a, MF_2 = -ey_M + a$; tiếp tuyến với (H) tại M : phân đôi tọa độ (H);

$$(H) \text{ tx } (d) : Ax + By + C = 0 \Leftrightarrow a^2B^2 - b^2A^2 = C^2 > 0; \text{tiệm cận } x = \pm \frac{b}{a}y$$

hình chữ nhật cơ sở : $y = \pm a, x = \pm b; c^2 = a^2 + b^2$ (chú ý : tất cả các kết quả của trường hợp này suy từ trường hợp chính tắc bằng cách thay x bởi y, y bởi x).

9. Parabol :

* Cho F, F' \notin (Δ)
 $M \in (P) \Leftrightarrow MF = d(M, (\Delta))$

$$(P) : y^2 = 2px \text{ (} p > 0 \text{) (phương trình chính tắc).}$$

tiêu điểm $(p/2, 0)$, đường chuẩn $x = -p/2$; bán kính qua tiêu $MF = p/2 + x_M$; tâm sai $e = 1$, tiếp tuyến với (P) tại M : phân đôi tọa độ; (P) tx (d) : $Ax + By + C = 0 \Leftrightarrow pB^2 = 2AC$ (p : hệ số của x trong (P) đi với B : hệ số của y trong (d)); tham số tiêu : p.

$$(P) : y^2 = -2px \text{ (} p > 0 \text{) (phương trình không chính tắc).}$$

tiêu điểm $(-p/2, 0)$, đường chuẩn $x = p/2$; bán kính qua tiêu $MF = p/2 - x_M$; tâm sai $e = 1$, tiếp tuyến với (P) tại M : phân đôi tọa độ; (P) tx (d) : $Ax + By + C = 0 \Leftrightarrow pB^2 = -2AC$.

$$(P) : x^2 = 2py \text{ (} p > 0 \text{) (phương trình không chính tắc).}$$

tiêu điểm $(0, p/2)$, đường chuẩn $y = -p/2$; bán kính qua tiêu $MF = p/2 + y_M$; tâm sai $e = 1$, tiếp tuyến với (P) tại M : phân đôi tọa độ; (P) tx (d) : $Ax + By + C = 0 \Leftrightarrow pA^2 = 2BC$ (p : hệ số của y trong (P) đi với A : hệ số của x trong (d)).

$$(P) : x^2 = -2py \text{ (} p > 0 \text{) (phương trình không chính tắc).}$$

tiêu điểm $(0, -p/2)$, đường chuẩn $y = p/2$; bán kính qua tiêu $MF = p/2 - y_M$; tâm sai $e = 1$, tiếp tuyến với (P) tại M : phân đôi tọa độ;

$$(P) \text{ tx } (d) : Ax + By + C = 0 \Leftrightarrow pA^2 = -2BC .$$

CHÚ Ý :

* Cần có quan điểm giải tích khi làm toán hình giải tích : đặt câu hỏi cần tìm gì? (điểm trong mp $M(x_0, y_0)$: 2 ẩn ; điểm trong không gian (3 ẩn); đường thẳng trong mp $Ax + By + C = 0$: 3 ẩn A, B, C - thực ra là 2 ẩn; đường tròn : 3 ẩn a, b, R hay A, B, C; (E) : 2 ẩn a, b và cần biết dạng ; (H) : như (E); (P) : 1 ẩn p và cần biết dạng; mp (P) : 4 ẩn A, B, C, D; mặt cầu (S) : 4 ẩn a, b, c, R hay A, B, C, D; đường thẳng trong không gian (d) = (P) \cap (Q); đường tròn trong không gian (C) = (P) \cap (S).

* Với các bài toán hình không gian : cần lập hệ trục tọa độ.