CHUYÊN ĐỀ KHẢO SÁT HÀM SỐ

C©u 1 Cho hàm số $y = \frac{x+1}{x-1}$ (1) ,có đồ thị là (C)

1. Khảo sát hàm số (1).
2. Viết phương trình tiếp tuyến của (C),biết tiếp tuyến đi qua điểm P(3;1).
3. $M(x_0, y_0)$ là một điểm bất kỳ thuộc (C) .Tiếp tuyến của (C) tại M cắt tiệm cận đứng và đường tiệm cận ngang của(C) theo thứ tự tại A và B .Gọi I là giao điểm của hai đường tiệm cận của (C) .Chứng minh rằng diện tích tam giác IAB không phụ thuộc vào vị trí của điểm M.

C©u 2: (2 điểm) Cho hàm số: $y = \frac{x+2}{x-1}$

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.
2) Cho điểm A(0;a). Xác định a để từ A kẻ được 2 tiếp tuyến đến (C) sao cho hai tiếp điểm tương ứng nằm về hai phía đối với trục Ox.

C©u 3: (2 điểm)

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số $y = \frac{2x^2+x+1}{x+1}$
2) Gọi $M \in (C)$ có hoành độ $x_M = m$. Chứng tỏ rằng tích các khoảng cách từ M đến hai đường tiệm cận của (C) không phụ thuộc vào m

C©u 4: (2 điểm) Cho hàm số: $y = \frac{2x^2+mx-2}{x-1}$ với m là tham số.

1) Xác định m để tam giác tạo bởi 2 trục toạ độ và đường tiệm cận xiên của hàm số trên có diện tích bằng 4.
2) Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số trên khi m= -3.

C©u 5: (2 điểm) Cho hàm số: $y = x^4 - (m^2+10)x^2 + 9$

1.Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số ứng với m=0

2.Chứng minh rằng với mọi $m \neq 0$,đồ thị của hàm số luôn cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt .Chứng minh rằng trong số các giao điểm đó có hai điểm nằm trong khoảng (-3,3) và có hai điểm nằm ngoài khoảng (-3,3)

C©u 6: (2 điểm) Cho hàm số $y = f(x) = x^3 - (m+3)x^2 + 3x + 4$ (m là tham số)

1.Tìm m để đồ thị hàm số có điểm cực đại và điểm cực tiểu.Khi đó viết phương trình đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị này

2.Tìm m để $f(x) \geq 3x$ với mọi $x \geq 1$

C©u i 7: (2 điểm) Cho hàm số $y = \frac{x^2-6x+9}{-x+2}$

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số.
b) Tìm tất cả các điểm M trên trục tung sao cho từ M kẻ được tiếp tuyến với đồ thị,song song với đường thẳng $y = -\frac{3}{4}x$

C©u 8: (2 điểm) Cho hàm số $y = 2x^3 - 3(2m+1)x^2 + 6m(m+1)x + 1$ (1)

a) Khảo sát hàm số (1) khi m=1

b) Chứng minh rằng, $\forall m$ hàm số(1) luôn đạt cực trị tại x_1, x_2 với $x_1 - x_2$ không phụ thuộc m

C©u 9: (2 điểm)

a) Khảo sát hàm số: $y = x^2 - 5x + 4$

b) Cho 2 parabol: $y = x^2 - 5x + 6$ và $y = -x^2 - 5x - 11$

Viết phương trình tiếp tuyến chung của 2 parabol trên

Bµi 10: (2 điểm)

a. Khảo sát,vẽ đồ thị (C) của hàm số $y = x^3 + 3x^2$

b. Tìm tất cả các điểm trên trục hoành mà từ đó vẽ được đúng ba tiếp tuyến của đồ thị (C) ,trong đó có hai tiếp tuyến vuông góc nhau.

C©u 11: (2 điểm) Cho hàm số $y = 3x^4 - 4(1+m)x^3 + 6mx^2 + 1 - m$ có đồ thị (C_m).

1. Khảo sát hàm số trên khi m= -1
2. Tìm giá trị âm của tham số m để đồ thị và đường thẳng $(\Delta): y = 1$ có ba giao điểm phân biệt.

Câu 12: (2 điểm)

Cho hàm số: $y = x^3 + 3x^2 + (m+2)x + 2m \quad (C_m)$

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị(C_1) của hàm số khi m=1

Câu 13: (2 điểm) **Cho hàm số** $y = x^3 + mx^2 + 7x + 3$ **(1)**

1. Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số (1) với m= 5
2. Tìm m để hàm số (1) có cực đại và cực tiểu. Lập phương trình đường thẳng qua điểm cực đại và cực tiểu đó.

C©u **14: (2 điểm)** Cho hàm số $y = x^4 - 2x^2$

1a. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số

1b. Dựa vào đồ thị (C) ,hãy biện luận theo tham số m số nghiệm của phương trình : $x^4 - 2x^2 - m = 0$

C©u **15: (2 điểm)**

a. Khảo sát hàm số (C) có phương trình: $y = \dfrac{x^2 + 4x + 8}{x + 2}$

b. Từ đồ thị hàm số (C) suy ra đồ thị của hàm số : $y = \left|\dfrac{x^2 + 4x + 8}{x + 2}\right|$

c. xét đồ thị họ (C_m) cho bởi phương trình $y = \dfrac{x^2 + 4x + m^2 + 8}{x + 2}$. Xác định tập hợp những điểm mà không có đồ thị nào trong họ (C_m) đi qua.

C©u **16:**

1. khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị(C) hàm số: y = -(x + 1)^2(x+4).
2. Dùng đồ thị (C) để biện luận theo số nghiệm của phương trình : (x + 1)^2(x+4) = (m+1)^2(m+4)

C©u **17:** (3 điểm) Cho hàmsố $y=(x-1)(x^2+mx+m)$ (1), với m là tham số thực

1.Khảo sát hàm số (1) ứng với m= -2

2.Tìm các giá trị của m để đồ thị của hàm số (1) tiếp xúc với trục hoành .Xác định tọa độ của tiếp điểm tương ứng trong mỗi trường hợp của m.

C©u **18:** (3 điểm) Cho hàm số $y=\frac{x+1}{x-1}$ (1) ,có đồ thị là (C)

1. Khảo sát hàm số (1).
2. Viết phương trình tiếp tuyến của (C),biết tiếp tuyến đi qua điểm P(3;1).
3. $M(x_0,y_0)$ là một điểm bất kỳ thuộc (C) .Tiếp tuyến của (C) tại M cắt tiệm cận đứng và đường tiệm cận ngang của(C) theo thứ tự tại A và B .Gọi I là giao điểm của hai đường tiệm cận của (C) .Chứng minh rằng diện tích tam giác IAB không phụ thuộc vào vị trí của điểm M.

C©u **19:** (2 điểm) Cho hàn số y= f(x) = $\frac{m}{3}x^3-2(m+1)x$ (m là tham số)

a. Khảo sát hàm số khi m= 1

b. Tìm tất cả giá trị m sao cho hàm số có cực đại ,cực tiểu và tung độ điểm cực đại y_{CD}, tung độ điểm cực tiểu y_{CT} thỏa: $(y_{CD}-y_{CT})^2=\frac{2}{9}(4m+4)^3$

C©u **20:** (2 điểm)

1. Khảo sát hàm số $y=x+\frac{1}{x-1}$.Gọi (C) là đồ thị của hàm số.
2. Viết phương trình các tiếp tuyến với (C) kẻ từ điểm A=(0;3)

<u>CÂU 21:</u> (4 điểm) Cho hàm số $y=f(x)=x^3+2x^2+x+2$

a. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị(C) của hàm số trên.

b. Biện luận theo k số giao điểm của đồ thị (C) và đường thẳng (D_1) : y=kx+2

c. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C) ,trục hoành và đường thẳng(D_2) : y = - x +1

<u>CÂU 22:(2 điểm)</u> Cho hàm số $y=\frac{x^2-3x+2}{x}$

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị(C) của hàm số.

2. Tìm trên đường thẳng x=1 những điểm M sao cho từ M kẻ được hai tiếp tuyến đến (C) và hai tiếp tuyến đó vuông góc với nhau.

<u>CÂU 23:(2 điểm)</u> Cho hàm số $y=\frac{x^2-3x+2}{x}$

1.Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị(C) của hàm số.

2.Tìm trên đường thẳng x=1 những điểm M sao cho từ M kẻ được hai tiếp tuyến đến (C) và hai tiếp tuyến đó vuông góc với nhau.

<u>CA□U 24:(3 ủieồm)</u>

Cho hàm số $y=x^4-2x^2+2-m$ (có đồ thị là (C_m)), m là tham số

1. Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số khi m= 0
2. Tìm các giá trị của m sao cho đồ thị (C_m) chỉ có hai điểm chung với trục Ox

3. Chứng minh rằng với mọi giá trị của m tam giác có 3 đỉnh là ba điểm cực trị của đồ thị (C_m) là một tam giác vuông cân

CA□U 25

1. Khảo sát hàm số : $y = x^4 - 5x^2 + 4$

2. Hãy tìm tất cả các giá trị a sao cho đồ thị hàm số $y = x^4 - 5x^2 + 4$ tiếp xúc với đồ thị hàm số $y = x^2 + a$ Khi đó hãy tìm tọa độ của tất cả các tiếp điểm

CÂU 26: Cho hàm số $y = x^3 - (2m+1)x^2 + (m^2 - 3m + 2)x + 4$

1.Khảo sát hàm số khi m=1

2. Trong trường hợp tổng quát ,hãy xác định tất cả các tham số m để đồ thị của hàm số đã cho có điểm cực đại và cực tiểu ở về hai phía của trục tung

CÂU 27:

1. Khảo sát hàm số: $y = \dfrac{x^2 - 3x + 6}{x - 1}$ (1).

2. Từ đồ thị của hàm số (1) , hãy nêu cách vẽ và vẽ đồ thị của hàm số: $y = \left|\dfrac{x^2 - 3x + 6}{x - 1}\right|$ 3.Từ góc toạ độ có thể vẽ được bao nhiêu tiếp tuyến của hàm số (1) ? Tìm toạ độ các tiếp điểm (nếu có).

CÂU 28: Cho hàm số : $y = \dfrac{1}{3}x^3 - x + m$ (1) , m là tham số

1. Khảo sát hàm số (1) khi $m = \dfrac{2}{3}$

2. Tìm các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số (1) cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt.

CÂU 29: Cho hàm số : $y = \dfrac{x^2 + x}{x - 2}$ (C)

1. Khảo sát hàm số (C)

2. Đường thẳng (Δ) đi qua điểm B(0,b) và song song với tiếp tuyến của (C) tại điểm O(0,0) .Xác định b để đường thẳng (Δ) cắt (C) tại hai điểm phân biệt M,N. Chứng minh trung điểm I của MN nằm trên một đường thẳng cố định khi b thay đổi.

CÂU 30: Cho hàm số : $y = \dfrac{x^2 + 2mx + 2}{x + 1}$, (m là tham số)

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số với m=1

2. Tìm giá trị của m để đường thẳng hàm số có điểm cực đại ,điểm cực tiểu và khoảng cách từ hai điểm đó đến đường thẳng x+y+2=0 bằng nhau

Câu 31: Cho hàm số : $y = x^3 - 6x^2 + 9x$

1.Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số

2.a) Từ đồ thị của hàm số đã cho hãy suy ra đồ thị của hàm số :

$$y = |x|^3 - 6x^2 + 9|x|$$

b) Biện luận theo m số nghiệm của phương trình:

$$|x|^3 - 6x^2 + 9|x| - 3 - m = 0$$

Câu 32 :(2,5 điểm) 1. Cho hàm số $y=\frac{x^2-x+1}{x-1}$

a. Khảo sát hàm số đã cho.

b. Xác định điểm $A(x_1;y_1)$ (với $x_1>1$) thuộc đồ thị của hàm số trên sao cho khoảng cách từ A đến giao điểm của 2 tiệm cận của đồ thị là nhỏ nhất.

2. Tìm tập giá trị của hàm số $y=\frac{x+3}{\sqrt{x^2+1}}$ và các tiệm cận của đồ thị của hàm số đó

Câu 33:

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y=\frac{x^2+2x-2}{x-1}$

2. Tìm điểm M trên đồ thị của hàm số sao cho khoảng cách từ M đến giao điểm của hai đường tiệm cận là nhỏ nhất.

Câu 34: **Cho hàm số :** $y=\frac{x^2+mx-1}{x-1}$

Tìm các giá trị của m để tiệm cận xiên của đồ thị của hàm số đã cho cắt trục toạ độ tại hai điểm A và B sao cho diện tích tam giác OAB bằng 18.

Câu 35 : Cho hàm số $y=-x^3+3(m+1)x^2-3(2m+1)x+4$ (m là tham số)

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số với m=1

2. Tìm giá trị của m để đồ thị hàm số có điểm cực đại ,điểm cực tiểu và hai điểm đó đối xứng qua điểm I(0,4)

Câu 36: Cho hàm số $y=\frac{2x^2+(6-m)x}{mx+2}$

1. Tìm m để hàm số có cực đại, cực tiểu.
2. Khảo sát hàm số khi m=1 (C).
3. Chứng minh rằng tại mọi điểm của đồ thị (C) tiếp tuyến luôn luôn cắt hai tiệm cận một tam giác có diện tích không đổi.

Câu 37:

1. Cho hàm số $y=x^3-3(a-1)x^2+3a(a-2)x+1$ trong đó a là tham số .

a. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số khi a= 0

b. Với các giá trị nào của a thì hàm số đồng biến trên tập hợp các giá trị của x sao cho:$1\le|x|\le 2$

2. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^2-3x+\frac{m}{x}+3$ có ba điểm cực trị .Khi đó chứng minh rằng cả 3 điểm cực trị này đều nằm trên đường cong: $y=3(x-1)^2$

Câu 38:

1. Hãy vẽ đồ thị hàm số : $y=-x^2+x+\sqrt{(x^2+1)^2-4x^2}$

2.Tìm toạ độ các giao điểm của các đường tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=\frac{x+1}{x-3}$ với trục hoành ,biết rằng các tiếp tuyến đó vuông góc với đường thẳng y=x+2001.

Câu 39: Cho hàm số : $y=\frac{(m+1)x^2-2mx-(m^3-m^2+2)}{x-m}$ (C_m) trong đó m là tham số.

1. Khảo sát hàm số đã cho với m= 0

2. Xác định tất cả các giá trị của m sao cho hàm số (C_m) luôn luôn nghịch biến trên các khoảng xác định của nó.

Câu 40:

1. Khảo sát hàm số : $y=\frac{x^2+x-5}{x-2}$ (C)

2. Chứng minh rằng tích các khoảng cách từ một điểm M bất kỳ trên đồ thị (C) đến các tiệm cận là một hằng số không phụ thuộc vị trí điểm M.

3. Tìm trên mỗi nhánh của đồ thị (C) một điểm sao cho khoảng cách giữa chúng nhỏ nhất.

Câu 41:

Cho hàm số $y=x^3-3x^2-m^2x+m$

1. Khảo sát (xét sự biến thiên . vẽ đồ thị) hàm số ứng với m= 0.

2. Tìm tất cả giá trị của tham số m để hàm số có cực đại , cực tiểu và các điểm cực đại , cực tiểu của đồ thị hàm số đối xứng với nhau qua đường thẳng $y=\frac{1}{2}x-\frac{5}{2}$

CÂU 42 : Cho hàm số : $y=x^3-3x$ (1)

1. Khảo sát hàm số (1)

2. Chứng minh rằng khi m thay đổi ,đường thẳng cho bởi phương trình y=m(x+1)+2 luôn cắt đồ thị (1) tại một điểm A cố định.

Hãy xác định các gía trị của m để đường thẳng cắt đồ thị hàm số (1) tại 3 điểm A,B,C khác nhau sao cho tiếp tuyến với đồ thị tại B vàC vuông góc với nhau.

Câu 43:

Cho hàm số : $y=\frac{x^2+2x+m^2}{x+2}$

1. Tìm giá trị của m sao cho $|y|\geq 2$ với mọi $x\neq -2$

2. Khảo sát hàm số với m=1

Câu 44 :

Cho hàm số : $y=\frac{x^2-8x}{8(x+m)}$ (1) ,trong đó m là tham số .

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (1) với m=1.

2. Tìm tất cả các giá trị của tham số m sao cho hàm số (1) đồng biến trên $[1,+\infty)$

Câu 45:

1. Khảo sát hàm số : $y=(x+1)^2(x-2)$

2. Cho đương thẳng Δ đi qua điểm M(2,0) và có hệ số góc là k . Hãy xác định tất cả các giá trị của k để đường thẳng Δ cắt đồ thị hàm số sau tại bốn điểm phân biệt :

$y=|x|^3-3|x|-2$

Câu 46:

1. Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số : $y=\frac{3x+1}{x-3}$ (1)

2. Tìm một hàm số mà đồ thị của nó đối xứng với đồ thị hàm số (1) qua đường thẳng x + y – 3 = 0 .

3. C là điểm bất kỳ trên đồ thị hàm số (1) .tiếp tuyến với đố thị hàm số (1) tại C cắt tiệm cận đứng và ngang tại A và B .Chứng minh rằng C là trung điểm của AB và tam giác tạo bởi tiếp tuyến đó với hai tiệm cận có diện tích không đổi.

CÂU 47 : Cho hàm số : $y=x^4-4x^2+m$ (C).

1. Khảo sát hàm số với m = 3

2. Giả sử đồ thị cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt .Hãy xác định m sao cho hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (c) và trục hoành có diện tích phần phía trên và phần phía dưới trục hoành bằng nhau .

Câu 48: Cho hàm số : $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2-x+m+1$

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số ứng với m= 0 .

2. Trong tất cả các tiếp tuyến với đồ thị của hàm số đã khảo sát , hãy tìm tiếp tuyến có hệ số góc nhỏ nhất .

3. Chứng minh rằng với mọi m , hàm số đã cho luôn luôn có cực đại và cực tiểu .Hãy xác định m sao cho khoảng cách giữa các điểm cực đại và cực tiểu là nhỏ nhất

Câu 49: Cho hàm số : $y=x^3-6x^2+9x$

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số.

2. a. Từ đồ thị của hàm số đã cho hãy suy ra đồ thị của hàm số $y=|x|^3-6x^2+9|x|$

b. Biện luận theo m số nghiệm của phương trình : $|x|^3-6x^2+9|x|-3-m=0$

Câu 50 : Cho hàm số : $y=(m+2)x^3+3x^2+mx-5$ (m là tham số)

1. Với giá trị nào của m thì hàm số có cực đại và cực tiểu.

2. Khảo sát hàm số (C) ứng với m= 0 .

3. Chứng minh rằng từ điểm A(1;-4) có 3 tiếp tuyến với đồ thị (C).

Câu 51:

1. Cho hàm số : $y=x^3-3(a-1)x^2+3a(a-2)x+1$ trong đó a là tham số .

a.Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số khi a= 0.

b.Với các giá trị nào của a thì hàm số đồng biến trên tập hợp các giá trị của x sao cho : $1\le|x|\le 2$

2. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số : $y=x^2-3x+\frac{m}{x}+3$ có ba điểm cực trị .Khi đó chứng minh rằng cả ba điểm cực trị này đều nằm trên đường cong: $y=3(x-1)^2$

Câu 52 : Cho hàm số : $y=\frac{x^2+x-1}{x-1}$

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số .Gọi đồ thị đó là (C)

2. Chứng minh rằng tích các khoảng cách từ một điểm bất kỳ trên (C) tới hai tiệm cận của nó là một số không đổi .

Câu 53: Cho hàm số : $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 1$ (1)

1. Khảo sát hàm số (1) .

2. Tìm điểm M thuộc đồ thị (C) của hàm số (1) sao cho tiếp tuyến của (C) tại hai điểm đi qua gốc toạ độ .

Câu 54: Cho hàm số : $y = \dfrac{x^2 + (m-2)x + m + 1}{x+1}$

1. Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số khi m = 2 .

2. Tìm m để trên đồ thị có hai điểm phân biệt A,B sao cho :

$$5x_A - y_A + 3 = 0, \;\; ; \;\; 5x_B - y_B + 3 = 0$$

Tìm m để hai điểm A,B đó đối xứng với nhau qua đường thẳng (d) có phương trình: x + 5y + 9 = 0.

Câu 55: Cho hàm số : $y = x^3 - 2x^2 + x$

1. Khảo sát hàm số đã cho .

2. Tìm diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị vừa vẽ và đường thẳng y= 4x

Câu 56: Cho hàm số: $y = \dfrac{-2x^2 - 3x + m}{2x+1}$

1. Với những giá trị nào của tham số m thì hàm số nghịch biến trong khoảng $\left(-\dfrac{1}{2};+\infty\right)$?

2. Khảo sát hàm số khi m = 1.

Câu 57 : Cho hàm số : $y = mx^3 - 3mx^2 + 2(m-1)x + 2$,trong đó m là tham số thực.

1. Tìm những điểm cố định mà mọi đường cong của họ trên đều đi qua .

2. Chứng tỏ rằng những điểm cố định đó thẳng hàng và từ đó suy ra họ đường cong có chung một tâm đối xứng.

3. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số ứng với giá trị m=1

4. Viết phương trình của tiếp tuyến với đồ thị tại điểm uốn và chứng tỏ rằng trong các tiếp tuyến của đồ thị thì tiếp tuyến này có hệ số góc nhỏ nhất.

5. Tìm diện tích phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số (ứng với m = 1) ; tiếp tuyến tại điểm uốn và trục Oy.

Câu 58: Cho hàm số : $y = x^3 - 3mx^2 + 3(m^2 - 1)x + 2$

1. Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số đã cho khi m= 1.

2. Tìm giá trị tham số m để đồ thị hàm số đã cho các điểm cực đại ,cực tiểu ,đồng thời các điểm cực đại và cực tiểu nằm về hai phía đối với trục tung .

CÂU 59: Cho hàm số $y = \dfrac{x^2 + 3}{x+1}$ (1)

1. Khảo sát hàm số (1)

2. Viết phương trình đường thẳng d qua điểm $M\left(2,\dfrac{2}{5}\right)$ sao cho d cắt đồ thị hàm số (1) tại hai điểm phân biệt A ,B và M là trung điểm của đoạn thẳng AB.

CÂU 60: Cho hàm số : $y = x^3 - 3x^2 + m^2x + m$

1. Khảo sát (xét sự biến thiên, vẽ đồ thị) hàm số ứng với m= 0

2. Tìm tất cả các giá trị của tham số m đề hàm số có cực đại, cực tiểu và các điểm cực đại ,cực tiểu của đồ thị hàm số đối xứng nhau qua đường thẳng $y=\frac{1}{2}x-\frac{5}{2}$

CÂU 61:

1. Khảo sát (xét sự biến thiên ,vẽ đồ thị) hàm số : $y=\frac{-x^2+x+1}{x-1}$ **.**

Gọi đồ thị là (C)

2. Chứng minh rằng với mọi gía trị của m ,đường thẳng y=m cắt (C) tại hai điểm phân biệt A ,B .Xác định giá trị của m để độ dài đoạn AB ngắn nhất.

CÂU 62:

1.Khảo sát (xét sự biến thiên ,vẽ đồ thị) hàm số : $y=\frac{x^2}{x-1}$ .Gọi đồ thị là (C)

2.Tìm trên đường thẳng y=4 tất cả các điểm mà từ mỗi điểm đó có thể kẻ tới đồ thị (C) hai tiếp tuyến lập với nhau một góc $45°$

CÂU 63: Cho hàm số $y=2x^3+3(m-3)x^2+11-3m$ (C_m)

1) Cho m=2 . Tìm phương trình các đường thẳng qua $A(\frac{19}{12},4)$ và tiếp xúc với đồ thị (C_2) của hàm số .

2) Tìm m để hàm số có hai cực trị. Gọi M_1 và M_2 là các điểm cực trị ,tìm m để các điểm M_1, M_2 và B(0,-1) thẳng hàng.

Câu 64: Cho hàm số : $y=\frac{1}{3}x^3-x+\frac{2}{3}$ (1)

a. Khảo sát sự biến thiên và cẽ đồ thị (C) của hàm số (1)

b. Tìm trên đồ thị (C) điểm mà tại đó tiếp tuyến của đồ thị (C) vuông góc với đường thẳng : $y=-\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}$

c. Tính tích phân : $\int_0^1(1-x-x^2)^2dx$

CHUYÊN ĐỀ KHẢO SÁT HÀM SỐ: HỚNG DẪN VÀ ĐÁP ÁN

Bài 1:

1) Khảo sát hàm số: $y = \dfrac{x+1}{x-1}$ (C) TXĐ: D = R \ (1)

$y' = \dfrac{-2}{(x-1)^2} < 0$ $\Rightarrow$ Hàm số giảm trên từng khoảng xác định.

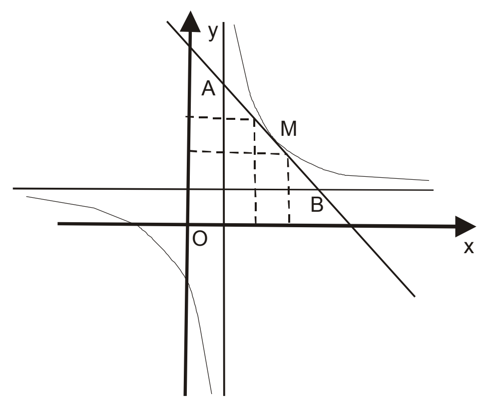
TCĐ: x = 1 vì $\lim\limits_{x\to 1} y = \infty$

TCN: y = 1 vì $\lim\limits_{x\to\infty} y = 1$

BBT:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		−	‖	−	
y	1 ↘		$-\infty$ ‖ $+\infty$		↘ 1

Đồ thị:



2) Viết phương trình tiếp tuyến của (C) đi qua điểm P(3, 1):

Đường thẳng (d) qua P có hệ số góc k: y = k(x-3) + 1

(d) tiếp xúc (C) $\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x+1}{x-1} = k(x-3) + 1 & (1) \\ \dfrac{-2}{(x-1)^2} = k & (2) \end{cases}$ có nghiệm

Thay (2) vào (1) :

$\dfrac{x+1}{x-1} = \dfrac{-2(x-3)}{(x-1)^2} + 1 \Leftrightarrow x^2 - 1 = -2(x-3) + (x-1)^2 \Leftrightarrow 4x = 8 \Leftrightarrow x = 2$

Thay vào (2) $\Rightarrow k = -2$ Vậy phương trình tiếp tuyến đi qua P là: y= -2x + 7

3) $M_0(x_0, y_0) \in (C)$. Tiếp tuyến của (C) tại M cắt 2 đường tiệm cận tạo thành một tam giác có diện tích không phụ thuộc M.

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại M: $y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0$

$$\Leftrightarrow y = \frac{-3}{(x_0-1)^2}(x - x_0) + \frac{x_0+1}{x_0-1} = \frac{-3}{(x_0-1)^2}x + \frac{x_0^2 + 3x_0 - 1}{(x_0-1)^2}$$

Giao điểm với tiệm cận đứng x =1. $x = 1 \Rightarrow y = \dfrac{x_0+4}{x_0-1} \Rightarrow A\left(1, \dfrac{x_0+4}{x_0-1}\right)$

Giao điểm với tiệm cận ngang y = 1. $y = 1 \Rightarrow x = \dfrac{5x_0-2}{3} \Rightarrow B\left(\dfrac{5x_0-2}{3}, 1\right)$

Giao điểm hai đường tiệm cận: I(1, 1)

Ta có : $S_{IAB} = \dfrac{1}{2} IA.IB = \dfrac{1}{2}|y_A - y_I|.|x_B - x_I| = \dfrac{1}{2}\left|\dfrac{x_0+4}{x_0-1} - 1\right|.\left|\dfrac{5x_0-2}{3} - 1\right|$

$= \dfrac{1}{2}\left|\dfrac{5}{x_0-1}\right|.\left|\dfrac{5x_0-2}{3} - 1\right| = \dfrac{25}{6} =$ hằng số Vậy: S_{IAB} không phụ thuộc vào vị trí điểm M.

C©u 2: (2 điểm)

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số: $y = \dfrac{x+2}{x-1}$ TXĐ: D=R\{1}

$y' = \dfrac{-3}{(x-1)^2} < 0 \Rightarrow$ Hàm số giảm trên từng khoảng xác định

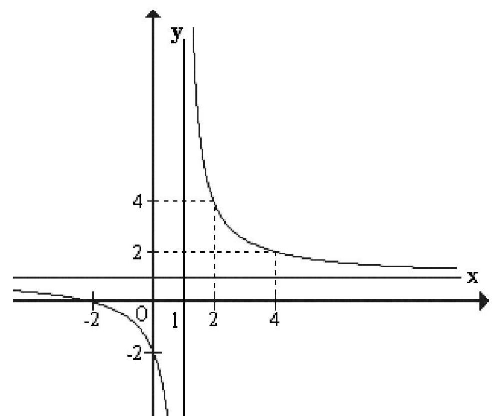
TCD: x=1 vì $\lim\limits_{x->1} y = \infty$

TCN: y=1 vì $\lim\limits_{x \to \infty} y = 1$

BBT:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		−	||	−	
y	1	↘ $-\infty$	||	$+\infty$ ↘	1

Đồ thị:



2) Xác định a để từ A(0,a) kẻ được 2 tiếp tuyến đến (C)
sao cho 2 tiếp điểm đến nằm về 2 phía của 0x.

Gọi $M(x_0; y_0) \in (C) \Leftrightarrow y_0 = \dfrac{x_0+2}{x_0-1}$

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại M:

$y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0$

$$\Leftrightarrow y = \frac{-3}{(x_0-1)^2}(x - x_0) + \frac{x_0+2}{x_0-1} \Leftrightarrow y = \frac{-3}{(x_0-1)^2}x + \frac{x_0^2 + 4x_0 - 2}{(x_0-1)^2}$$

Tiếp tuyến qua A(0,a) $\Leftrightarrow a = \dfrac{x_0^2 + 4x_0 - 2}{(x_0-1)^2} \Leftrightarrow (a-1)x_0^2 - 2(a+2)x_0 + a + 2 = 0$ (1)

(vì x_0 =1 không là nghiệm)

Điều kiện để có 2 tiếp tuyến kẻ từ A là: $\begin{cases} a - 1 \neq 0 \\ \Delta' > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 1 \\ a > -2 \end{cases}$ Khi đó (1) có 2 nghiệm là x_0, x_1

$\Rightarrow$ Tung độ tiếp điểm $y_0 = \dfrac{x_0+2}{x_0-1}$ và $y_1 = \dfrac{x_1+2}{x_1-1}$ Điều kiện 2 tiếp điểm nằm về 2 phía Ox.

$$\Leftrightarrow y_0y_1 < 0 \Leftrightarrow \frac{x_0+2}{x_0-1}.\frac{x_1+2}{x_1-1} < 0 \Leftrightarrow \frac{x_0x_1+2(x_0+x_1)+4}{x_0x_1-\left(x_0+x_1\right)+1} < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\frac{a+2}{a-1}+\frac{4(a+2)}{a-1}+4}{\frac{a+2}{a-1}-\frac{2(a+2)}{a-1}+1} < 0 \Leftrightarrow \frac{9a+6}{-3} < 0 \Leftrightarrow -3a-2<0 \Leftrightarrow a > \frac{-2}{3}$$

Tóm lại: $\begin{cases} a > -2, a \neq 1 \\ a > \frac{-2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow a > \frac{-2}{3}$ và $a \neq 1$ ĐS: $a > \frac{-2}{3}, a \neq 1$

C©u 3: (2 điểm)

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số: $y = \frac{2x^2+x+1}{x+1}$

TXĐ: D = R\{-1}

$y' = \frac{2x^2+4x}{(x+1)^2}$ $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-2 \end{array}\right.$

Tiệm cận đứng: x= -1 vì $\lim\limits_{x \to -1} y = \infty$

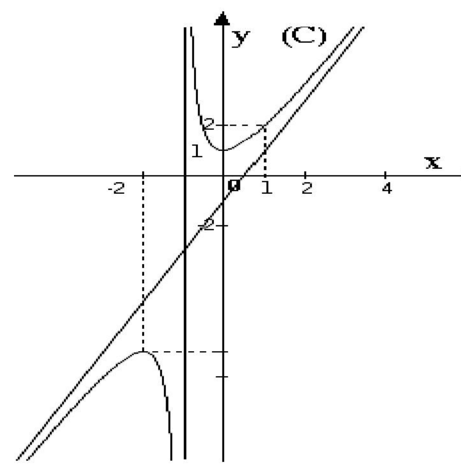
Ta có: $y = 2x - 1 + \frac{2}{x+1}$ Tiệm cận xiên: y = 2x - 1 vì $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{2}{x+1} = 0$

BBT

x	$-\infty$		-2		-1		0		$+\infty$
y'		+	0	-	||	-	0	+	
y	$-\infty$	↗	-7 CĐ	↘	$-\infty$ || $+\infty$	↘	1 CT	↗	$+\infty$

Đồ thị:

Cho x = 1 suy ra y = 2.



2) Gọi M 0 (C) có X_M = m. Chứng tỏ rằng tích các khoảng cách từ M đến 2 đường tiệm cận của (C) không phụ thuộc m.

Ta có: X_M = m $\Rightarrow y_M = 2m - 1 + \frac{2}{m+1}$

Tiệm cận đứng : x + 1 = 0 (D1)

Suy ra d_1(M, D1) $= \frac{|m+1|}{\sqrt{1}} = |m+1|$

Tiệm cận xiên: 2x – y – 1 = 0 (D2) d_2(M,D2) = $\frac{\left|2m-2m+1-\frac{2}{m+1}-1\right|}{\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}|m+1|}$

Suy ra $d_1.d_2 = |m+1|\frac{2}{\sqrt{5}|m+1|} = \frac{2}{\sqrt{5}}$ (không phụ thuộc m)

C©u 4: (2 điểm) Cho hàm số: $y = \dfrac{2x^2 + mx - 2}{x-1}$

1) Tìm m để diện tích tam giác tạo bởi TCX và 2 trục tọa độ bằng 4.

Ta có: $y = 2x + m + 2 + \dfrac{m}{x-1}$

Với $m \neq 0$ thì TCX: y = 2x + m + 2 vì $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{m}{x-1} = 0$

Giao điểm TCX và Ox: y = 0 $\Rightarrow x = -\dfrac{m+2}{2} \Rightarrow A\left(-\dfrac{m+2}{2}, 0\right)$

Giao điểm TXC và oy: $x = 0 \Rightarrow y = m + 2 \Rightarrow B(0, m+2)$

$\Rightarrow S_{OAB} = \dfrac{1}{2}OA.OB = \dfrac{1}{2}\left|-\dfrac{m+2}{2}\right||m+2| = 4$ $\Rightarrow (m+2)^2 = 16 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 2 \\ m = -6 \end{array}\right.$ (thỏa điều kiện $m \neq 0$)

2) Khảo sát và vẽ đồ thị khi m = -3: $y = \dfrac{2x^2 - 3x - 2}{x-1}$ (C)

TXĐ: D = R\ {1}

$y' = \dfrac{2x^2 - 4x + 5}{(x-1)^2} > 0 \quad \forall x \neq 1$

$\Rightarrow$ Suy ra hàm số tăng trên từng khoảng xác định.

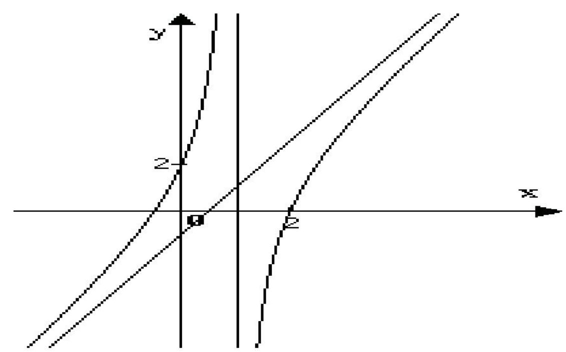
TCĐ: x = 1 vì $\lim\limits_{x \to 1} y = \infty$

TCX: y = 2x - 1 (theo câu 1)

BBT:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		+	‖	+	
y	$-\infty$	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

Đồ thị: $x = 0 \Rightarrow y = 2, x = 2 \Rightarrow y = 0$



C©u 5: (2 điểm) Cho: y = $x^4 - (m^2 + 10)x^2 + 9$ (C_m).

1) Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số với m = 0. y = $x^4 - 10x^2 + 9$

TXD: D = R

$y' = 4x^3 - 20x = 4x(x^2 - 5)$ $\quad y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{5} \end{array}\right.$

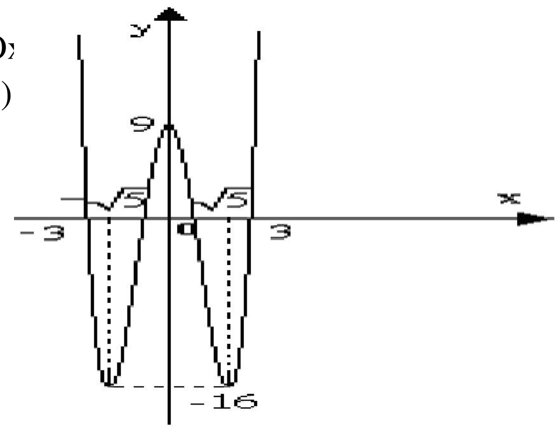
$y'' = 12x^2 - 20$ $\; y'' = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\dfrac{5}{3}} \Rightarrow y = \dfrac{-44}{9}$ $\Rightarrow$ điểm uốn $\left(\sqrt{\dfrac{5}{3}}; -\dfrac{44}{9}\right)\left(-\sqrt{\dfrac{5}{3}}; -\dfrac{44}{9}\right)$

BBT:

x	$-\infty$	$-\sqrt{5}$		0		$\sqrt{5}$	$+\infty$
y'	-	0	+	0	-	0	+
y	$+\infty$ ↘	CT	↗	9 CĐ	↘	CT	↗ $+\infty$

Đồ thị:

Cho $y=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2=1 \\ x^2=9 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pm 1 \\ x=\pm 3 \end{array}\right.$



2) Chứng minh rằng với $\forall\ m \neq 0$, (C_m) luôn luôn cắt Ox tại 4 điểm phân biệt trong đó có hai điểm nằm $\in$(-3,3) và 2 điểm nằm ngoài (-3,3).

Phương trình hoành độ giao điểm của (C_m) và Ox.

$x^4-(m^2+10)x^2+9=0$ (1) Đặt $t=x^2 (t \geq 0)$

Phương trình trở thành: $t^2-(m^2+10)t+9=0$ (2)

Ta có: $\begin{cases} \Delta=(m^2+10)^2-36>0, \forall m \\ P=9>0 \\ S=m^2+10>0, \forall m \end{cases}$

$\Rightarrow 0 < t_1 < t_2$ $\Rightarrow$ (1) có 4 nghiệm phân biệt $-x_2<-x_1<x_1<x_2$

Đặt f(t) $=t^2-(m^2+10)t+9$ Ta có: af(9)$=81-9m^2-90+9=-9m^2<0, \forall m \neq 0$

$\Leftrightarrow 0<t_1<9<t_2$

$\Leftrightarrow \begin{cases} {x_1}^2<9 \\ {x_2}^2>9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 \in (-3;3) \\ x_2 \in (-3;3) \end{cases} \Leftrightarrow -x_2<-3<-x_1<x_1<3<x_2$

Vậy (C_m) cắt Ox tại 4 điểm phân biệt trong đó 2 điểm $\in(-3,3)$ và 2 điểm $\notin(-3,3)$.

C©u 6: (2 điểm) Cho hàm số $y=f(x)=x^3-(m+3)x^2+3x+4$ (m là tham số)

1) Tìm m để đồ thị hàm số có điểm cực đại và cực tiểu. Khi đó viết phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị này.

Ta có: $y'=3x^2-2(m+3)x+3;\ y'=0 \Leftrightarrow 3x^2-2(m+3)x+3=0$ (1)

Hàm số có CĐ, CT $\Leftrightarrow$ (1) có 2 nghiệm phân biệt.

$\Leftrightarrow \Delta'>0 \Leftrightarrow (m+3)^2-9>0 \Leftrightarrow m^2+6m>0 \Leftrightarrow m<-6 \vee m>0$

Chia f(x) cho f'(x) ta được : $y=f'(x)\left[\frac{1}{3}x-\frac{1}{9}(m+3)\right]-\frac{2}{9}(m^2+6m)x+\frac{1}{3}m+5$

Vậy phương trình đường thẳng qua 2 điểm cực trị là: $y=-\frac{2}{9}(m^2+6m)x+\frac{1}{3}m+5$.

2) Tìm m để $f(x) \geq 3x$ với mọi $x \geq 1$ Ta có:

$f(x) \geq 3x, \forall x \geq 1 \Leftrightarrow x^3-(m+3)x^2+4 \geq 0$ $,\forall x \geq 1 \Leftrightarrow m \leq x-3+\frac{4}{x^2}$ $,\forall x \geq 1$

$\Leftrightarrow m \le \min\limits_{x\ge 1} g(x)$ với $g(x) = x - 3 + \dfrac{4}{x^2}$

Ta có: $g'(x) = 1 - \dfrac{8}{x^3} = \dfrac{x^3 - 8}{x^3}$, $\forall x \ge 1$; $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$

+) BBT:

x	1		2		$+\infty$
g'(x)		-	0	+	
g(x)	2	↘	0	↗	$+\infty$

$\Rightarrow \min\limits_{x\ge 1} g(x) = 0$ Vậy: $m \le 0$

C©u <u>7: (2 điểm)</u>

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị $y = \dfrac{x^2 - 6x + 9}{-x + 2}$ (C)

- TXĐ: D = R\ {2}

$y' = \dfrac{x^2 + 4x - 3}{(-x+2)^2}$ $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 3 \end{array}\right.$

TCĐ: x = 2 vì $\lim\limits_{x\to 2} = \infty$; Ta có: $y = -x + 4 + \dfrac{1}{-x+2}$

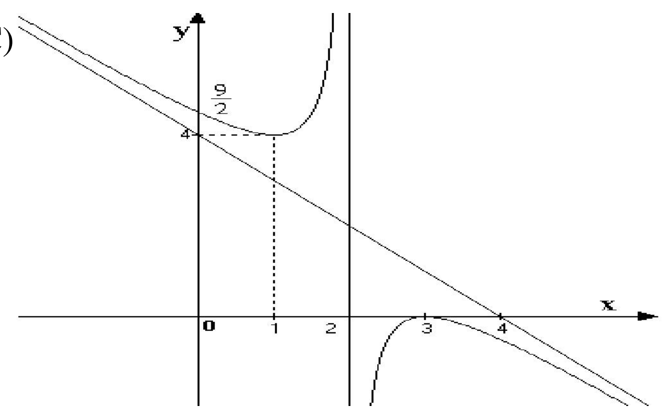
TCX: y = - x + 4 vì $\lim\limits_{x\to\infty} = \dfrac{1}{-x+2} = 0$

BBT:

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
y'		-	0	+	||	+	0	-	
y	$+\infty$	↘	4 CT	↗	$+\infty$ || $-\infty$	↗	0 CĐ	↘	$-\infty$

Đồ thị:

Cho x = 0 $\Rightarrow y = \dfrac{9}{2}$



b) Tìm M$\in$ Oy sao cho tiếp tuyến kẻ từ M đến (C) song song với đường thẳng y=$-\dfrac{3}{4}$x có dạng.

Gọi M(0, b) $\in Oy$, tiếp tiếp qua M song song đường thẳng $y = -\dfrac{3}{4}x$ có dạng: (D): $y = -\dfrac{3}{4}x + b$

(D) tiếp xúc (C) $\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2 - 6x + 9}{-x + 2} = -\dfrac{3}{4}x + b \\ \dfrac{-x^2 + 4x - 3}{(-x+2)^2} = -\dfrac{3}{4} \end{cases}$ (2)

(2) $\Leftrightarrow x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \ \vee x = 4$ Thay vào (1): $x = 0 \Rightarrow b = \dfrac{9}{2}; x = 4 \Rightarrow b = \dfrac{5}{2}$

Vậy : $M_1(0;\dfrac{9}{2}), M_2(0;\dfrac{5}{2})$

C©u <u>**8**: (2 điểm)</u>

a) Khảo sát (1) $y = 2x^3 - 3(2m+1)x^2 + 6m(m+1)x + 1$ (1) khi m= 1:

$m = 1: y = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 1$ TXĐ: D= R

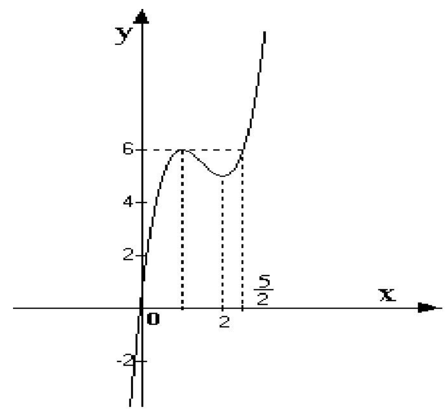
$y' = 6x^2 - 18x + 12$; $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x = 1 & \Rightarrow y = 6 \\ x = 2 & \Rightarrow y = 5 \end{array}\right.$

$y'' = 12x - 18$; $y'' = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2} \Rightarrow y = \frac{11}{2} \Rightarrow$ điểm uốn I$\left(\frac{3}{2}, \frac{11}{2}\right)$

BBT:

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
y'		+	0	-	0	+	
y	$-\infty$	↗	6 CĐ	↘	5 CT	↗	$+\infty$

Đồ thị:



b) Chứng minh rằng $\forall$ m hàm số (1) luôn đạt cực trị tại x_1, x_2 với $x_1 - x_2$ không phụ thuộc m.

Ta có:

$y = 2x^3 - 3(2m+1)x^2 + 6m(m+1)x + 1$

$y' = 6x^2 - 6(2m+1)x + 6m(m+1)$; $y' = 0 \Leftrightarrow \quad x^2 - (2m+1)x + m(m+1) = 0 \quad (*)$

$\Delta = (2m+1)^2 - 4m(m+1) = 1 > 0$

$\Rightarrow$ (*) luôn có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2. $\quad\Rightarrow$ Hàm số luôn đạt cực trị tại x_1, x_2.

Ta có:

$x_1 = 2m + 1 - 1 = 2m$; $x_2 = 2m + 1 + 1 = 2m + 2 \Rightarrow x_2 - x_1 = 2m + 2 - 2m = 2$ (hằng số)

Vậy: $x_2 - x_1$ không phụ thuộc m.

<u>Bµi 9</u>: <u>(2 điểm)</u>

a) Khảo sát hàm số: $y = x^2 - 5x + 4$.

Tập xác định: D = R

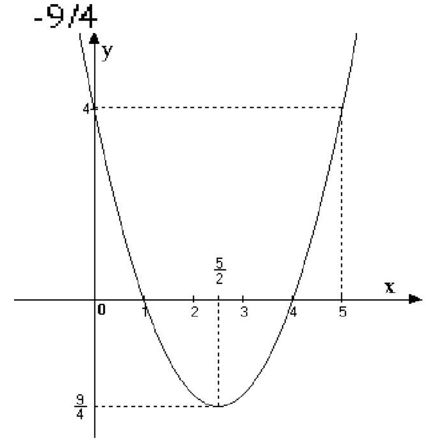
y'= 2x – 5

BBT:

x	$-\infty$		5/2		$+\infty$
y'		-	0	+	
y	$+\infty$	↘	-9/4	↗	$+\infty$

Đồ thị:

x	0	1	$\frac{5}{2}$	4	5
y	4	0	$-\frac{9}{4}$	0	4



b) Viết phương trình tiếp tuyến chung của hai parapol:

$(P_1): y = x^2 - 5x + 6$ và $(P_2): y = -x^2 + 5x - 11$

- Gọi (Δ): y= ax + b là tiếp tuyến chung của (P1) và (P2).
- (Δ) tiếp xúc với (P1) và (P2).

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 5x + 6 = ax + b & \text{có nghiệm kép} \\ -x^2 + 5x - 11 = ax + b & \text{có nghiệm kép} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - (5+a)x + 6 - b = 0 & \text{có nghiệm kép} \\ x^2 - (5-a)x + 11 + b = 0 & \text{có nghiệm kép} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_1 = 0 \\ \Delta_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + 10a + 4b + 1 = 0 \\ a^2 - 10a - 4b - 19 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = -10 \end{cases} \vee \begin{cases} a = -3 \\ b = 5 \end{cases}$$

Vậy phương trình tiếp tuyến chung là: y = 3x – 10 hay y = - 3x + 5

C©u 10: (2 điểm)

a) Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số: $y = x^3 + 3x^2 \quad (C)$

TXĐ: D = R

$y' = 3x^2 + 6x = 3x(x+2) \qquad y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -2 \end{array}\right.$

$y'' = 6x + 6 \qquad y'' = 0 \Leftrightarrow x = -1 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow$ Điểm uốn I(-1, 2)

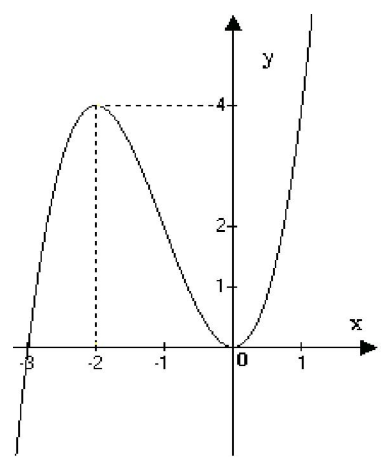
+) BBT:

x	-∞		-2		0		+∞
y'		+	0	-	0	+	
y	-∞	↗	4 CĐ	↘	CT 0	↗	+∞

Đồ thị:

Cho x = -3, y = 0

x = 1, y = 4



b) Tìm điểm M trên Ox sao cho từ M kẻ được 3 tiếp tuyến đến (C) trong đó có 2 tiếp tuyến vuông góc nhau.

Gọi $M(a,0) \in Ox$, đường thẳng (d) qua M và có hệ số góc K là: y = k(x - a)

(d) tiếp xúc (C) $\Leftrightarrow \begin{cases} x^3 + 3x^2 = k(x-a) & (1) \\ 3x^2 + 6x = k & (2) \end{cases}$ có nghiệm

Thay (2) vào (1):

$$x^3 + 3x^2 = 3x^2 + 6x(x-a) \Leftrightarrow 2x^3 + 3(a-1)x^2 - 6ax = 0$$

$$\Leftrightarrow x\left[2x^2 - 3(a-1)x - 6a\right] = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x = 0 & \\ 2x^2 - 3(a-1)x - 6a = 0 & (3) \end{array}\right.$$

Với x = 0 $\Rightarrow$ k = 0 $\Rightarrow$ 1 tiếp tuyến là y = 0.

+) Từ M kẻ được 3 tiếp tuyến đến (C) trong đó có 2 tiếp tuyến vuông góc với nhau

$\Leftrightarrow$ (3) có 2 nghiệm phân biệt $x_1, x_2 \neq 0$ và $k_1 k_2 = -1$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \\ (3x_1^2 + 6x_1)(3x_2^2 + 6x_2) = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ 9(a-1)^2 + 48a > 0 \\ 9(x_1x_2)^2 + 18x_1x_2(x_1 + x_2) + 36x_1x_2 = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a < -3 \vee a > -\frac{1}{3} \text{ và } a \neq 0 \\ 81a^2 - 81a(a-1) - 108a + 1 = 0 \end{cases} \begin{pmatrix} \text{vì } x_1x_2 = -3a \\ x_1 + x_2 = \frac{3(a-1)}{2} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a < -3 \vee a > -\frac{1}{3} \text{ và } a \neq 0 \\ -27a + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = \frac{1}{27}$$

Vậy chỉ có 1 điểm $M(\frac{1}{27}, 0) \in Ox$ thoả điều kiện bài toán.

C©u 11: (2 điểm) Cho hàm số: $y = 3x^4 - 4(1+m)x^3 + 6mx^2 + 1 - m \quad (C_m)$

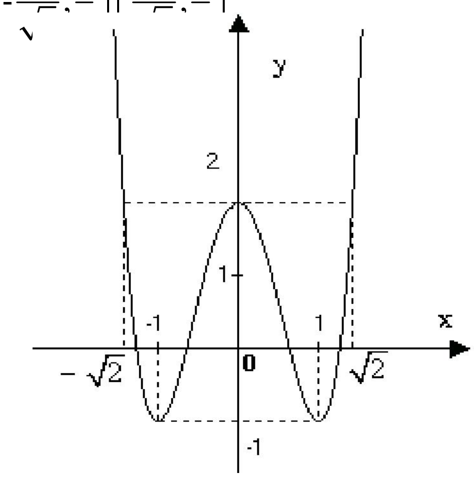
1) Khảo sát hàm số khi m= -1: $y = 3x^4 - 6x^2 + 2$ TXĐ: D = R

$y' = 12x^3 - 12x = 12x(x^2 - 1) \quad y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm 1 \end{array}\right.$

$y'' = 36x^2 - 12 \Rightarrow y'' = 0 \Leftrightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow y = \frac{1}{3} \Rightarrow$ điểm uốn $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{3}\right)$

x	- 4		-1		0		1		+ 4
y’		-	0	+	0	-	0	+	
y	+ 4		-1		2 CĐ		-1		+4

BBT:



Đồ thị:

Cho y=2 $\Leftrightarrow 3x^4 - 6x^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{2} \end{array}\right.$

2) Tìm giá trị m < 0 để (C_m) và $(\Delta): y = 1$ có ba giao điểm phân biệt.

Ta có: $y = 3x^4 - 4(1+m)x^3 + 6mx^2 + 1 - m$;

$$y' = 12x^3 - 12(1+m)x^3 + 12mx = 12x\left[x^2 - (1+m)x + m\right] \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x = 0 & \Leftrightarrow y = 1 - m \\ x = 1 & \Leftrightarrow y = m \\ x = m & \Leftrightarrow y = -m^4 + 2m^3 - m + 1 \end{array}\right.$$

(C_m) Và (Δ) cắt nhau tại 3 điểm phân biệt nếu đường thẳng :y=1 đi qua điểm cực trị của (C_m).

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1=m+1 \\ m=1 \\ -m^4+2m^3-m+1=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0\,(\text{loại}) \\ m=1\,(\text{loại}) \\ m(m-1)\left(m^2-m-1\right)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} m=0 & (\text{loại}) \\ m=1 & (\text{loại}) \\ m=\frac{1+\sqrt{5}}{2} & (\text{loại}) \\ m=\frac{1-\sqrt{5}}{2} & (\text{nhận vì } m<0) \end{array}\right.$$

ĐS: $m=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$

C©u <u>12</u>: <u>(2 điểm)</u> Cho $y=x^3+3x^2+(m+2)x+2m \quad (C_m)$

1) Khảo sát và vẽ đồ thị (C_1) khi m = 1. $y=x^3+3x^2+3x+2 \quad (C_1)$ TXĐ: D = R

$y'=3x^2+6x+3=3(x+1)^2\geq 0$ suy ra hàm số luôn tăng trên R

$y'=0 \Leftrightarrow x=-1$; $y''=6x+6$; $y''=0 \Leftrightarrow x=-1 \Rightarrow y=1 \Rightarrow$ điểm uốn I(-1, 1).

- BBT:

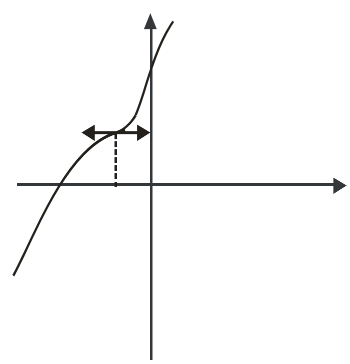
x	$-\infty$		-1		$+\infty$
y'		+	0	+	
y	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

- Đồ thị:

Cho x = 0, y = 2

x = -2, y = 0

$y'_I=0 \Rightarrow$ tiếp tuyến tại I song song Ox.



2) Tìm m để (C_m) cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt có hoành độ âm.Phương trình hoành độ giao điểm của (C_m) và Ox.

$x^3+3x^2+(m+2)x+2m=0 \Leftrightarrow (x+2)\left(x^2+x+m\right)=0$

$$(1)\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x^2+x+m=0 \quad (2) \end{array}\right.$$

(C_m) cắt Ox tại 3 điểm có hoành độ âm $\Leftrightarrow$ (2) có 2 nghiệm âm phân biệt khác -2.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m\neq -2 \\ \Delta>0 \\ P>0 \\ S<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\neq -2 \\ 1-4m>0 \\ m>0 \\ -1<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\neq -2 \\ m<\frac{1}{4} \\ m>0 \end{cases} \Leftrightarrow 0<m<\frac{1}{4} \qquad \text{ĐS: } 0<m<\frac{1}{4}$$

C©u <u>13: (2 ®iÎm)</u> Cho $y=x^3+mx^2+7x+3$ (1)

1) Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số khi m = 5. $y=x^3+5x^2+7x+3$

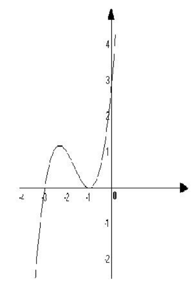
TXĐ : □ y’= 3x² +10x + 7

$y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \Rightarrow y=0 \\ x=-\dfrac{7}{3} \Rightarrow y=\dfrac{32}{27} \end{array}\right.$; $y''=6x+10$ $y''=0 \Leftrightarrow x=-\dfrac{5}{3} \Rightarrow y=\dfrac{16}{27}$ $\Rightarrow$ điểm uốn $\left(-\dfrac{5}{3},\dfrac{16}{27}\right)$.

BBT :

x	$-\infty$		$-\frac{7}{3}$		-		$+\infty$
y'		+	0	—	0	+	
y	$-\infty$	↗	$\frac{32}{27}$	↘	0	↗	$+\infty$

Đồ thị:



2. Tìm m để hàm số (1) có cực đại và cực tiểu.
Lập phương trình đường thẳng qua điểm cực đại và cực tiểu.
Ta có :
$y=x^3+mx^2+7x+3;$ $y'=3x^2+2mx+7$ $y'=0 \Leftrightarrow 3x^2+2mx+7=0(*)$
Hàm số có cực đại và cực tiểu $\Leftrightarrow (*)$ có hai nghiệm phân biệt
$\Leftrightarrow \Delta'>0 \Leftrightarrow m^2-21>0$ $\Leftrightarrow m<-\sqrt{21}$ v $m>\sqrt{21}$
Chia y cho y' ta được : $y=f'(x)\left(\dfrac{1}{3}x+\dfrac{m}{9}\right)+\dfrac{2(21-m^2)}{9}+\dfrac{27-7m}{9}$
Vậy phương trình đường thẳng qua điểm cực đại và điểm cực tiểu là:
$y=\dfrac{2(21-m^2)}{9}+\dfrac{27-7m}{9}$

C©u **14: (2 điểm)** $y=x^4-2x^2$

1a) Khảo sát và vẽ:

TXĐ: □

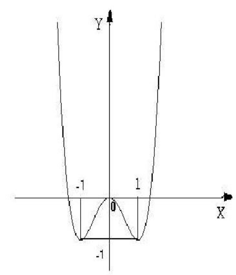
$y'=4x^3-4x$ $y'=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x=\pm 1$; $y''=12x^2-4;$ $y''=0 \Leftrightarrow x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow y=-\dfrac{5}{9}$

=> Điểm uốn $I_1=\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}};-\dfrac{5}{9}\right), I_2=\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}};-\dfrac{5}{9}\right)$

BBT:

x	$-\infty$		-1		0		+1		$+\infty$
y'			0		0		0		
y	$+\infty$	↘	-1	↗	0	↘	-1	↗	$+\infty$

Đồ thị:

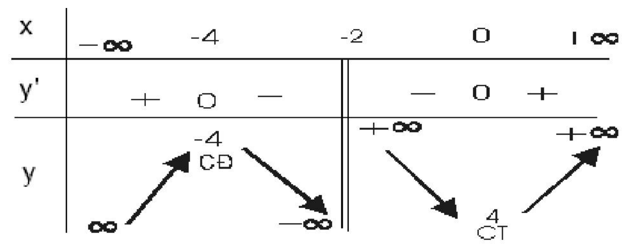


+) 1b. Biện luận số nghiệm:
Ta có : $x^4-2x^2-m=0$ $\Leftrightarrow x^4-2x^2=m$
Dựa vào đồ thị (C) ta kết luận :
m< -1: vô nghiệm. ; m= -1: 2 nghiệm.
-1< m < 0: 4 nghiệm. ; m= 0: 3 nghiệm. ; m> 0: 2 nghiệm.

C©u 15: (2 điểm)

a.Khảo sát hàm số : $y=\dfrac{x^2+4x+8}{x+2}$ (C) TXĐ: $D=R\setminus\{-2\}$

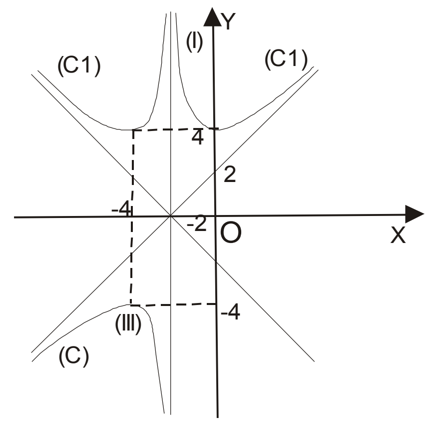
$y'=\dfrac{x^2+4x}{(x+2)^2}$ $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=-4\end{array}\right.$



- Tiệm cận đứng: x = -2 vì $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{4}{x+2}=\infty$
- Chia tử cho mẫu: $y=x+2+\dfrac{4}{x+2}$

$\Rightarrow$ Tiệm cận xiên: y= x + 2 vì $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4}{x+2}=0$

- BBT:
- Đồ thị:



b.Từ đồ thị (C) suy ra đồ thị hàm số : $y_1=\left|\dfrac{x^2+4x+8}{x+2}\right|$ (C_1)

Ta có :

$y_1=\begin{cases}y & \text{nếu } x>-2\\ -y & \text{nếu } x<-2\end{cases}$

Do đó đồ thị (C_1) suy từ (C) như sau:

- Nếu x > -2 thì $(C_1)\equiv(C)$

- Nếu x< -2 thì lấy phần đối xứng của (C) qua Ox ta được (C_1)

c. Xác định tập hợp những điểm mà không có đồ thị nào trong họ (C_m) đi qua:

$$y=\frac{x^2+4x+m^2+8}{x+2}\quad (C_m)$$

Gọi $M(x_0,y_0)\notin(C_m),\forall m\Leftrightarrow y_0=\dfrac{{x_0}^2+4x_0+m^2+8}{x_0+2}$ vô nghiệm với mọi m $\Leftrightarrow x_0=-2$

hoặc $m^2=y_0(x_0+2)-x_0^2-4x_0-8$ vô nghiệm theo m.

$\Leftrightarrow y_0(x_0+2)-x_0^2-4x_0-8<0\ \Leftrightarrow y_0(x_0+2)<x_0^2+4x_0+8$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y_0<\dfrac{x_0^2+4x_0+8}{x_0+2}(\text{nếu } x_0>-2)\\[2mm] y_0>\dfrac{x_0^2+4x_0+8}{x_0+2}(\text{nếu } x_0<-2)\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}M\notin \text{ miền (I) giới hạn bởi (C) với } x>-2\\ M\notin \text{miền (III) giới hạn bởi (C) với } x<-2\end{array}\right.$$

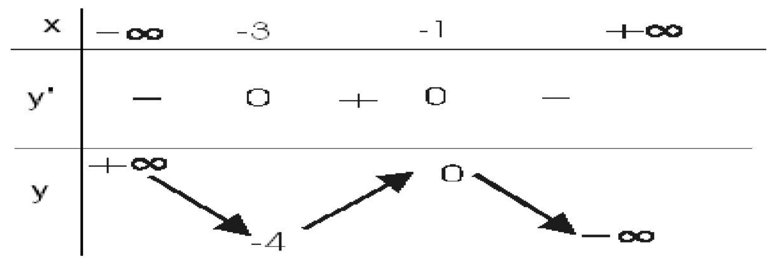
Vậy những điểm M thoả điều kiện bài toán là những điểm thuộc mặt phẳng toạ độ Oxy, không nằm trên miền (I), miền (III) và không nằm trên (C).

C©u 16:

1. Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số: $y=-(x+1)^2(x+4)=-x^3-6x^2-9x-4$

- TXĐ: D = R

$y'=-3x^2-12x-9 \Rightarrow y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=-3 \end{array}\right.$

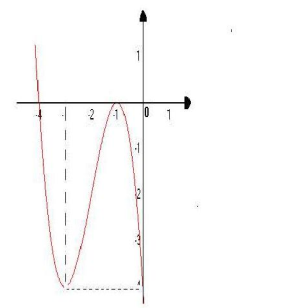


$y''=-6x-12 \Rightarrow y''=0 \Leftrightarrow x=-2 \Rightarrow y=-2$

Điểm uốn :(-2, -2)

- BBT:

- Đồ thị :



2) Dùng đồ thị (C) biện luận theo m số nghiệm của phương trình : $(x+1)^2(x+4)=(m+1)^2(m+4)$

$\Leftrightarrow -(x+1)^2(x+4)=-(m+1)^2(m+4)$

Đây là phương trình hoành độ giao điểm của (C) và đường thẳng (d) có phương trình : $y=-(m+1)^2(m+4)$

- Số giao điểm là số nghiệm của phương trình .

- Biện luận:

$-(m+1)^2(m+4)<-4 \Leftrightarrow m(m+3)^2>0 \Leftrightarrow m>0$: 1 nghiệm

$-(m+1)^2(m+4)<-4 \Leftrightarrow m=0 \vee m=-3$: 2 nghiệm

$-4<-(m+1)^2(m+4)<0 \Leftrightarrow -4<m<0$: 3 nghiệm

$-(m+1)^2(m+4)=0 \Leftrightarrow m=-1 \vee m=-4$: 2 nghiệm

$-(m+1)^2(m+4)>0 \Leftrightarrow m<-4$:1 nghiệm

C©u 17: (3 điểm) Cho: $y=(x-1)(x^2+mx+m)$ (1)

1) Khảo sát hàm số (1) tương ứng với m= -2:

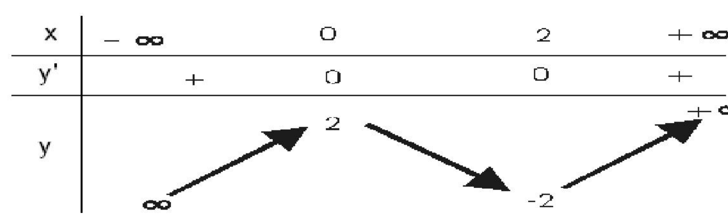
$y=(x-1)(x^2-2x-2)$ $y=x^3-3x^2+2$ Tập xác định : D = R

$y'=3x^2-6x=3x(x-2)$ $y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$

$y''=6x-6$ $y''=0 \Leftrightarrow x=1 \Rightarrow y=0$

$\Rightarrow$ Điểm uốn : I(1, 0)

BBT:



Đồ thị:

Điểm đặc biệt :

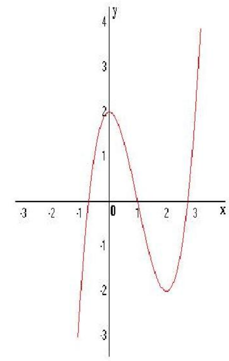
X	-1	0	1	2	3
y	-2	2	0	-2	2

2) Tìm m để đồ thị (1) tiếp xúc trục hoành. Xác định toạ độ tiếp điểm.

Ta có : $y=x^3+(m-1)x^2-m$ (1)

Đồ thị (1) tiếp xúc trục hoành $\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} x^3+(m-1)x^2-m=0 & (2) \\ 3x^2+2(m-1)x=0 & (3) \end{array}\right.$ có nghiệm .

$$(3) \Leftrightarrow x\left[3x+2(m-1)\right]=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-\dfrac{2(m-1)}{3} \end{array}\right.$$



Thay vào (2) :

$x=0 \Rightarrow m=0$

$$x=-\frac{2(m-1)}{3} \Rightarrow -\frac{8}{27}(m-1)^3+\frac{4}{9}(m-1)^3-m=0$$

$$\Leftrightarrow 4(m-1)^3-27m=0 \Leftrightarrow 4m^3-12m^2-15m-4=0$$

$$\Leftrightarrow (m-4)(4m^2+4m+1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=4 \\ m=-\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$$

Hoành độ tiếp điểm là :

$m=0 \Rightarrow x=0$ $m=4 \Rightarrow x=-2$ $m=-\dfrac{1}{2} \Rightarrow x=1$

Vậy đồ thị (C) tiếp xúc Ox khi: m= 0, m= 4, $m=-\dfrac{1}{2}$

Toạ độ tiếp điểm tương ứng là: (0, 0), (-2, 0), (1, 0)

C©u 18: (3 điểm)

1) Khảo sát hàm số: $y=\dfrac{x+1}{x-1}$ (C) TXĐ: D = R \ (1)

$y'=\dfrac{-2}{(x-1)^2}<0$ $\Rightarrow$Hàm số giảm trên từng khoảng xác định.

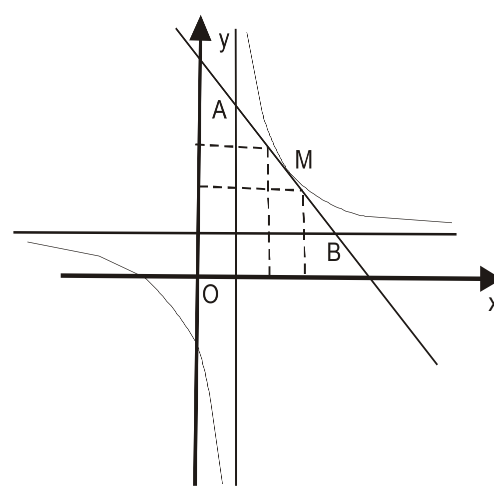
TCĐ: x = 1 vì $\lim\limits_{x\to 1} y=\infty$ TCN: y = 1 vì $\lim\limits_{x\to\infty} y=1$

BBT:

x	∞		1		+ ∞
y'		–	||	–	
y	1	↘ – ∞	||	+ ∞ ↘	1

Đồ thị:

x	-1	0	1	2	3
y'	0	-1	||	3	2



2) Viết phương trình tiếp tuyến của (C) đi qua điểm P(3, 1):

Đường thẳng (d) qua P có hệ số góc k: y = k(x-3) + 1

$$\text{(d) tiếp xúc (C)} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x+1}{x-1}=k(x-3)+1 & (1) \\ \dfrac{-2}{(x-1)^2}=k & (2) \end{cases} \text{ có nghiệm}$$

Thay (2) vào (1) : $\dfrac{x+1}{x-1}=\dfrac{-2(x-3)}{(x-1)^2}+1$

$$\Leftrightarrow x^2-1=-2(x-3)+(x-1)^2 \Leftrightarrow 4x=8 \Leftrightarrow x=2$$

Thay vào (2) $\Rightarrow k=-2$

Vậy phương trình tiếp tuyến đi qua P là: y= -2x + 7

3) $M_0(x_0,y_0)\in(C)$. Tiếp tuyến của (C) tại M cắt 2 đường tiệm cận tạo thành một tam giác có diện tích không phụ thuộc M.

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại M: $y=f'(x_0)(x-x_0)+y_0$

$$\Leftrightarrow y=\frac{-3}{(x_0-1)^2}(x-x_0)+\frac{x_0+1}{x_0-1}=\frac{-3}{(x_0-1)^2}x+\frac{x_0^2+3x_0-1}{(x_0-1)^2}$$

Giao điểm với tiệm cận đứng x =1. $x=1\Rightarrow y=\frac{x_0+4}{x_0-1}\Rightarrow A\left(1,\frac{x_0+4}{x_0-1}\right)$

Giao điểm với tiệm cận ngang y = 1. $y=1\Rightarrow x=\frac{5x_0-2}{3}\Rightarrow B\left(\frac{5x_0-2}{3},1\right)$

Giao điểm hai đường tiệm cận: I(1, 1)

Ta có :

$$S_{IAB}=\frac{1}{2}IA.IB=\frac{1}{2}|y_A-y_I|.|x_B-x_I|=\frac{1}{2}\left|\frac{x_0+4}{x_0-1}-1\right|.\left|\frac{5x_0-2}{3}-1\right|$$

$$=\frac{1}{2}\left|\frac{5}{x_0-1}\right|.\left|\frac{5x_0-2}{3}-1\right|=\frac{25}{6}=\text{hằng số}$$

Vậy: S_{IAB} không phụ thuộc vào vị trí điểm M.

C©u <u>(2 điểm)</u> Cho $y=f(x)=\frac{m}{3}x^3-2(m+1)x$

a) Khảo sát hàm số khi m= 1: $y=\frac{1}{3}x^3-4x$

- TXĐ: D = R

$y'=x^2-4$ $\quad y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\x=-2\end{array}\right.$; $y''=2x\Rightarrow y''=0\Leftrightarrow x=0\Rightarrow y=0$

Điểm uốn O(0, 0).

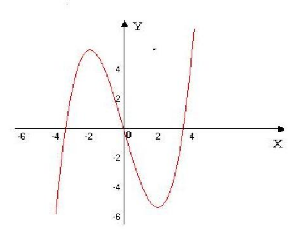
BBT:

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
y'		+	0	—	0	+	
y	$-\infty$	↗	$\frac{16}{3}$	↘	$-\frac{16}{3}$	↗	$+\infty$

Đồ thị:

Cho $x=-4\Rightarrow y=-\frac{16}{3}$

$x=4\Rightarrow y=\frac{16}{3}$



b)Tìm m để đồ thị hàm số có cực đại, cực tiểu sao cho:

$(y_{CĐ}-y_{CT})^2=\frac{2}{9}(4m+4)^3$

Ta có: $y=\frac{m}{3}x^3-2(m+1)x$ $\qquad y'=mx^2-2(m+1)$

$y'=0 \Leftrightarrow mx^2-2(m+1)=0 \quad (1)$

Hàm số có cực đại và cực tiểu $\Leftrightarrow$ (1) có 2 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow \dfrac{2(m+1)}{m}>0 \Leftrightarrow m<-1 \vee m>0$

Khi đó (1) có 2 nghiệm $x_1, x_2 (x_1<x_2) \quad \Rightarrow y_{CĐ}=f(x_1)$ và $y_{CT}=f(x_2)$

Để tìm $y_{CĐ}$ và y_{CT} ta chia f(x) cho f'(x) thì được: $f(x)=f'(x).\left(\dfrac{1}{3}x\right)-\dfrac{4}{3}(m+1)x$

$\Rightarrow y_{CĐ}=f(x_1)=-\dfrac{4}{3}(m+1)x_1$

$y_{CT}=f(x_2)=-\dfrac{4}{3}(m+1)x_2$ (Vì $f'(x_1)=0, f'(x_2)=0$)

Theo giả thiết: $(y_{CĐ}-y_{CT})^2=\dfrac{2}{9}(4m+4)^3$

$\Leftrightarrow \dfrac{16}{9}(m+1)^2(x_1-x_2)^2=\dfrac{2}{9}64(m+1)^3 \Leftrightarrow (x_1-x_2)=8(m+1)$ (Vì $m+1 \neq 0$)

$\Leftrightarrow S^2-4P=8(m+1) \quad \Leftrightarrow 0+\dfrac{8(m+1)}{m}$ (vì $S=0$, $P=\dfrac{-2(m+1)}{m}$)

$\Leftrightarrow m=1$ (Vì $m+1 \neq 0$)

So với điều kiện $m<-1 \vee m>0$ nhận giá trị m = 1 ĐS: m = 1.

C©u 20: (2 điểm)

1) Khảo sát hàm số: $y=x+\dfrac{1}{x-1}$ (C) Tập xác định: $D=R\setminus\{1\}$

- $y'=1-\dfrac{1}{(x-1)^2}=\dfrac{x^2-2x}{(x-1)^2}$ $\quad y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$
- Tiệm cận đứng: x = 1 vì $\lim\limits_{x\to 1}=\infty$
- Tiệm cận xiên: y = x vì $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x-1}=0$
- BBT:

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
y'		+	0	−	‖	−	0	+	
y	$-\infty$	↗	-1	↘ $-\infty$	‖ $+\infty$	↘	3	↗	$+\infty$

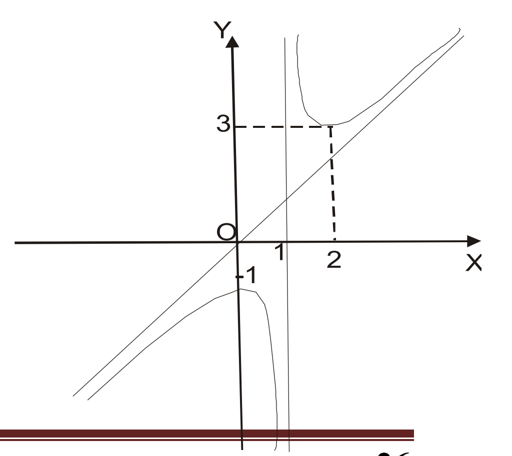
- Đồ thị:

2) Viết phương trình các tiếp tuyến của (C) kẻ từ A(0, 3)

- Đường thẳng (D) qua A và có hệ số góc k: y = kx +3

(D) tiếp xúc (C) $\Leftrightarrow \begin{cases} x+\dfrac{1}{x-1}=kx+3 & (1) \\ 1-\dfrac{1}{(x-1)^2}=k & (2) \end{cases}$ có nghiệm

- Thay (2) vào (1) :



$x+\frac{1}{x-1}=x-\frac{x}{(x-1)^2}+3$

$\Leftrightarrow x-1=-x+3(x-1)^2 \Leftrightarrow 3x^2-8x+4=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=\frac{2}{3} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} k=0 \\ k=-8 \end{array}\right.$

ĐS: y = 3 ; y = -8x + 3

Câu 21:

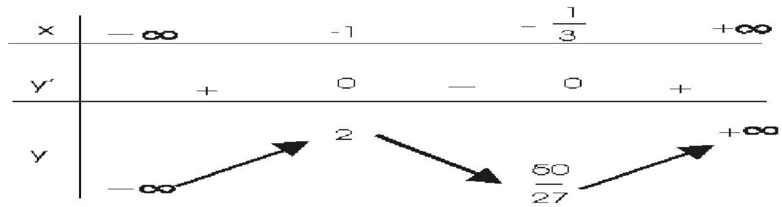
a) Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số:

$y=x^3+2x^2+x+2$; TXĐ : D = R

$y'=3x^2+4x+1$ $y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=-\frac{1}{3} \end{array}\right.$

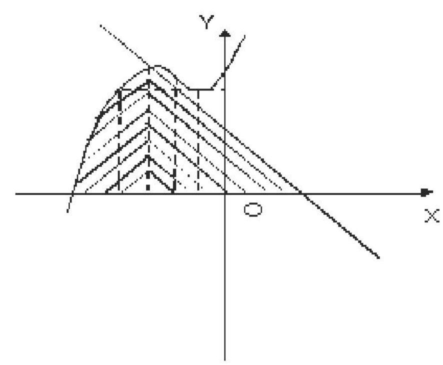
$y''=6x+4$; $y''=0 \Leftrightarrow x=-\frac{2}{3} \Rightarrow y=\frac{52}{27}$ Điểm uốn $I\left(-\frac{2}{3},\frac{50}{27}\right)$

BBT:



Đồ Thị:

X	$-\frac{4}{3}$	-1	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$+\infty$
y	$\frac{50}{27}$	2	$\frac{52}{27}$	$\frac{50}{27}$	2



b) Biện luận theo k số giao điểm của (C) và (D_1): y = kx +

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và (D_1):

$x^3+2x^2+x+2=kx+2 \Leftrightarrow x(x^2+2x+1-k)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2+2x+1-k=0 \end{array}\right.$ $\Delta'=1-1+k=k$

Biện luận :

k > 0 và $k \neq 1$: (C) và (D_1) có 3 điểm chung.

k = 0 $\wedge$ k = 1: 2 điểm chung.

k < 0: 1 điểm chung

c) Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C) trục hoành và đường thẳng (D_2):y = -x + 1.

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và (D_2).

$x^3+2x^2+x+2=-x+1 \Leftrightarrow x^3+2x^2+2x+1=0$

$\Leftrightarrow (x+1)(x^2+x+1)=0 \Leftrightarrow x=-1 \Rightarrow y=2$

Giao điểm của (C) và trục hoành:

$x^3+2x^2+x+2=0 \Leftrightarrow (x+2)(x^2+1)=0 \Leftrightarrow x=-2$

Diện tích hình phẳng cho bởi:

$$S=\int_{-2}^{-1}(x^3+2x^2+x+2)dx+\int_{-1}^{1}(-x+1)dx=\left.\frac{x^4}{4}+\frac{2x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+2x\right]_{-2}^{1}+\left.\left(-\frac{x^2}{2}+x\right)\right]_{-1}^{1}=\frac{17}{12}+2=\frac{41}{12}(đvdt)$$

CÂU 22:

1) Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số:

$y=\dfrac{x^2-3x+2}{2}=x-3+\dfrac{2}{x}$ (C) TXĐ: D = R\ {0}

$y'=\dfrac{x^2-2}{x^2}$; $y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\sqrt{2} \\ x=\sqrt{2} \end{array}\right.$

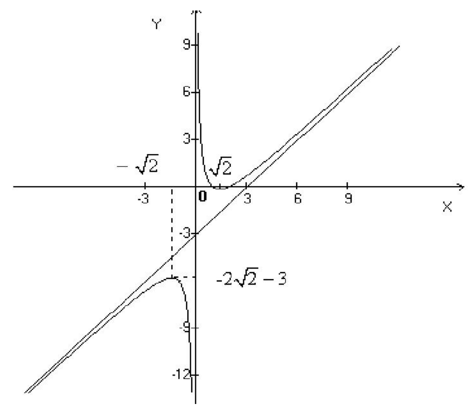
TCĐ: x = 0 vì $\lim\limits_{x\to 0} y=\infty$

TCX: y = x – 3 vì $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2}{x}=0$

BBT:

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
y'		+	0	–	||	–	0	+	
y	$-\infty$	↗	$-2\sqrt{2}-3$	↘ $-\infty$	||	$+\infty$ ↘	$2\sqrt{2}-3$	↗	$+\infty$

Đồ thị:



Cho y = 0 $\Leftrightarrow$ $x^2 - 3x + 2 = 0$ $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=2 \end{array}\right.$

2)Tìm M trên đường thẳng x = 1 sao cho từ M kẻ được đến (C) 2 tiếp tuyến vuông góc nhau.

Gọi M(1, b) nằm trên đường thẳng x = 1.

Đường thẳng (d) qua M và M có hệ số góc k: y= k(x - 1) + b

(d) tiếp xúc với (C) $\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2-3x+2}{x} = \text{k(x - 2) + b} & (1) \\ \dfrac{x^2-2}{x^2} = \text{k} & (2) \end{cases}$ có nghiệm.

Thay (2) vào (1): $\dfrac{x^2-3+2}{x}=\dfrac{(x^2-2)(x-1)}{x^2}+b \Leftrightarrow$ $(b + 2)x^2 – 4x + 2 = 0$ (3)

Từ M kẻ 2 tiếp tuyến đến (C) và vuông góc với nhau.

$\Leftrightarrow$ (2) có 2 nghiệm phân biệt $x_1, x_2 \neq 0$ sao cho $k_1, k_2 = -1$.

$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ k_1k_2 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4-2(b+2>0) \\ \dfrac{x_1^{\,2}-2}{x_1^{\,2}}.\dfrac{x_2^{\,2}-2}{x_2^{\,2}}=-1 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b > 0 \\ x_1^2 x_2^2 - (x_1^2 + x_2^2) + 2 = 0 \end{cases} \quad \text{với} \quad \begin{cases} x_1 x_2 = \dfrac{2}{b+2} \\ x_1 + x_2 = \dfrac{4}{b+2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b < 0 \\ b^2 + 6b + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b < 0 \\ b = -3 \pm \sqrt{7} \end{cases} \qquad \text{(nhận)}$$

CÂU 23:

1)Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số:

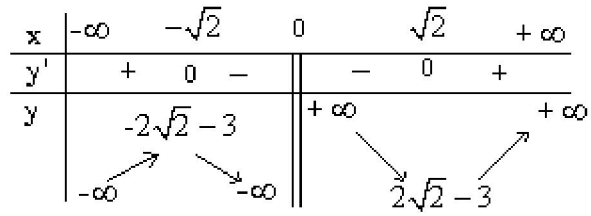
$y = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{2} = x - 3 + \dfrac{2}{x}$ (C)   TXĐ: D = R\ {0}

$y' = \dfrac{x^2 - 2}{x^2}$; $y' = 0 \quad \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\sqrt{2} \\ x = \sqrt{2} \end{array} \right.$

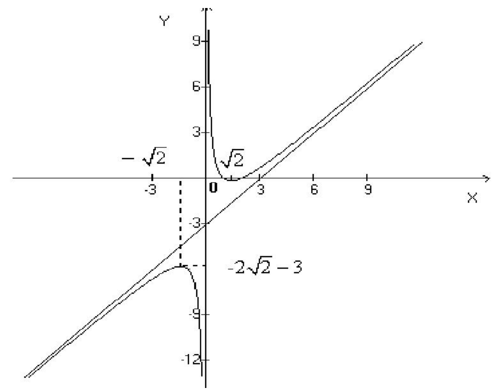
TCĐ: x = 0 vì $\lim\limits_{x \to 0} y = \infty$

TCX: y = x – 3 vì $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2}{x} = 0$

BBT:



Đồ thị: Cho y = 0 ⇔ x^2 – 3x +2 = 0 $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 2 \end{array} \right.$



2)Tìm M trên đường thẳng x = 1 sao cho từ M kẻ được đến (C) 2 tiếp tuyến vuông góc nhau.

Gọi M(1, b) nằm trên đường thẳng x = 1.

Đường thẳng (d) qua M và M có hệ số góc k: y= k(x - 1) + b

(d) tiếp xúc với (C) $\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x} = \text{k(x - 2) + b} & (1) \\ \dfrac{x^2 - 2}{x^2} = \text{k} & (2) \end{cases}$ có nghiệm.

Thay (2) vào (1): $\dfrac{x^2 - 3 + 2}{x} = \dfrac{(x^2 - 2)(x - 1)}{x^2} + b \Leftrightarrow$ (b + 2)x^2 – 4x + 2 = 0   (3)

Từ M kẻ 2 tiếp tuyến đến (C) và vuông góc với nhau.

⇔ (2) có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 ≠ 0 sao cho k_1, k_2 = -1.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ k_1 k_2 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 - 2(b + 2 > 0) \\ \dfrac{x_1^2 - 2}{x_1^2} . \dfrac{x_2^2 - 2}{x_2^2} = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b > 0 \\ x_1^2 x_2^2 - (x_1^2 + x_2^2) + 2 = 0 \end{cases} \quad \text{với} \quad \begin{cases} x_1 x_2 = \dfrac{2}{b+2} \\ x_1 + x_2 = \dfrac{4}{b+2} \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} b < 0 \\ b^2 + 6b + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b < 0 \\ b = -3 \pm \sqrt{7} \end{cases}$ (nhận)

Câu 24:

Cho $y = x^4 - 2x^2 + 2 - m$ (C_m)

1) Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số khi m = 0 $y = x^4 - 2x^2 + 2$ TXĐ: D = R

$y' = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1)$ $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm 1 \end{array}\right.$

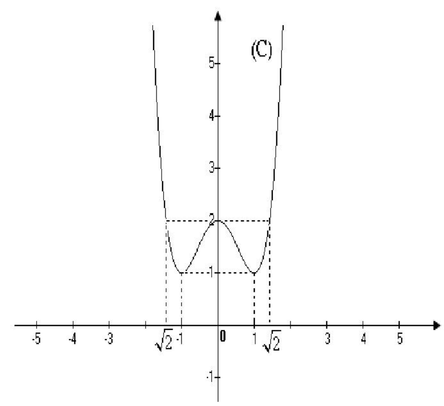
$y'' = 12x^2 - 4$; $y'' = 0 \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow y = \dfrac{13}{9} \Rightarrow$ điểm uốn $\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{13}{9}\right), \left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{13}{9}\right)$

BBT:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		–	0	+	0	–	0	+	
y	$+\infty$	↘	1	↗	2 CĐ	↘	1	↗	$+\infty$

Đồ thị: Cho y=2 $\Leftrightarrow x^4 - x^2 = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{2} \end{array}\right.$



2) Tìm m để (C_m) chỉ có hai giao điểm chung với trục Ox.

Phương trình hoành độ giao điểm của (C_m) và trục Ox:

$x^4 - 2x^2 + 2 - m = 0$ (1)

Đặt $t = x^2$ $(t \geq 0)$

Phương trình trở thành:

$t^2 - 2t + 2 - m = 0$ (2)

(1) chỉ có 2 nghiệm $\Leftrightarrow$ (2) có nghiệm trái dấu hoặc (1) có nghiệm kép dương

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} P < 0 \\ \begin{cases} \Delta' = 0 \\ -\dfrac{b}{2a} > 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2 - m < 0 \\ 1 - 2 + m = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m > 2 \\ m = 1 \end{array}\right.$

Vậy (C_m) cắt Ox tại 2 điểm khi: m = 1 hay m > 2.

3) Chứng minh rằng $\forall$m tam giác có 3 đỉnh là 3 điểm cực trị của (C_m) là một tam giác vuông cân:

Ta có: $y = x^4 - 2x^2 + 2 - m$ $y' = 4x^3 - 4x$

$\Leftrightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm 1 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y = 2 - m \\ y = 1 - m \end{array}\right.$

Gọi 3 điểm cực trị là:

A(0, 2- m), B(-1, 1- m), C(1, 1- m)

Ta có:

$\overrightarrow{AB} = (-1, -1) \Rightarrow AB = \sqrt{2}$; $\overrightarrow{AC} = (1, -1) \Rightarrow AC = \sqrt{2}$ $\Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AC}\overrightarrow{AB} = -1 + 1 = 0, \ \forall m \\ AB = AC = \sqrt{2}, \ \forall m \end{cases}$

Vậy Δ ABC là tam giác vuông cân tại A, ∀m.

Câu 25:

a) Khảo sát hàm số: $y=x^4-5x^2+4$ (C) TXD: D = R

$y' = 4x^3 - 10x = 2x(2x^2 - 5)$ $y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm\dfrac{\sqrt{10}}{2} \end{array}\right.$

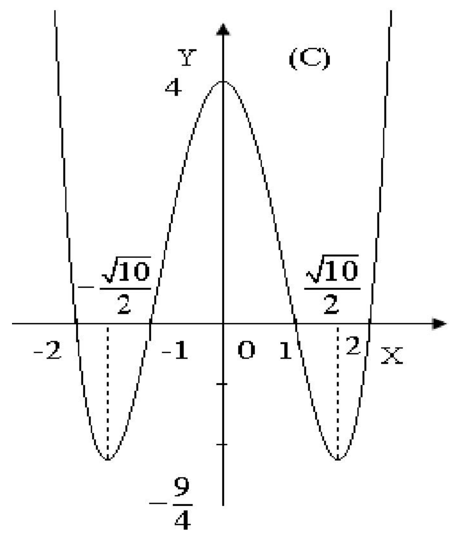
$y'' = 12x^2 - 10$ $y''=0 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{\dfrac{5}{6}} \Rightarrow y=\dfrac{19}{36}$ ⇒ điểm uốn: $\left(-\sqrt{\dfrac{5}{6}},\dfrac{19}{36}\right)\left(\sqrt{\dfrac{5}{6}},\dfrac{19}{36}\right)$

BBT:

x	$-\infty$		$-\frac{\sqrt{10}}{2}$		0		$-\frac{\sqrt{10}}{2}$		$+\infty$
y'		–	0	+	0	–	0	+	
y	$+\infty$	↘	$-\frac{9}{4}$ CT	↗	4 CĐ	↘	$-\frac{9}{4}$ CT	↗	$+\infty$

Đồ thị:

Cho $y=0 \Leftrightarrow x^4-5x^4+4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pm1 \\ x=\pm2 \end{array}\right.$



b) Tìm tất cả các giá trị của a để (C) tiếp xúc với đồ thị $y=x^2+a$.

Tìm toạ độ tiếp điểm: Gọi (P): $y = x^2 + a$.

(C) tiếp xúc (P) $\Leftrightarrow \begin{cases} x^4-5x^4+4=x^2+a & (1) \\ 4x^3-10x=2x & (2) \end{cases}$

có nghiệm

(2) $\Leftrightarrow x^3-3x=0 \Leftrightarrow x\left(x^3-3\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm\sqrt{3} \end{array}\right.$

Thay vào (1):

$x=0 \Rightarrow a=4;\ x=\pm\sqrt{3} \Rightarrow a=-5$

Vậy a = 4, a = -55. Tiếp điểm $(0,4)\left(-\sqrt{3},-2\right)\left(\sqrt{3},-2\right)$.

Câu 26: Cho hàm số: $y = x^3-(2m+1)x^2+(m^2-3m+2)x+4$

a) Khảo sát hàm số khi m = 1: $y=x^3-3x^2+4$ TXD:D = R

$y' = 3x^2 - 6x$; $y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$

$y'' = 6x - 6$; $y''=0 \Leftrightarrow x=1 \Rightarrow y=2 \Rightarrow$ điểm uốn I(1, 2)

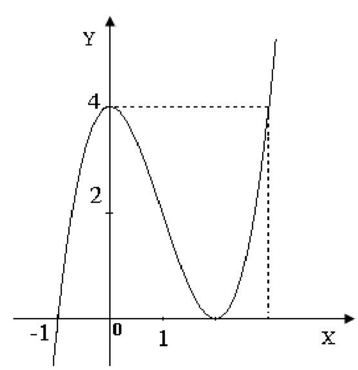
BBT:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		+	0	–	0	+	
y	$-\infty$	↗	4 CĐ	↘	0	↗	$+\infty$

Đồ thị:

x = 3, y = 4

x = -1, y = 0



b) Xác định m để đồ thị hàm số có điểm cực đại, cực tiểu ở về 2 phía trục tung. Ta có: $y = x^3 - (2m+1)x^2 + (m^2 - 3m + 2)x + 4$

$y' = 3x^2 - 2(2m+1)x + m^2 - 3m + 2$

Đồ thị hàm số có điểm cực đại và điểm cực tiểu ở về 2 phía của trục Oy.

$\Leftrightarrow$ y = 0 có 2 nghiệm x_1, x_2 trái dấu $\Leftrightarrow$ P< 0.

$\Leftrightarrow \dfrac{m^2 - 3m + 2}{3} < 0 \Leftrightarrow 1 < m < 2$ ĐS: 1 < m < 2

Câu 27:

a) Khảo sát hàm số: $y = \dfrac{x^2 - 3x + 6}{x - 1}$ (1) TXD: D=R\{1}

$y' = \dfrac{x^2 - 2x - 3}{(x-1)^2}$ $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 3 \end{array}\right.$

Tiệm cận đứng: x=1 vì $\lim\limits_{x \to 1} y = \infty$

Tiệm cận xiên: Ta có: $y = x - 2 + \dfrac{4}{x-1}$ $\Rightarrow$ TCX: y = x - 2 vì $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{4}{x-1} = 0$

BBT:

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
y'		+	0	–	‖	+	0	–	
y	$-\infty$	↗	-5	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	3	↗	$+\infty$

Đồ thị:

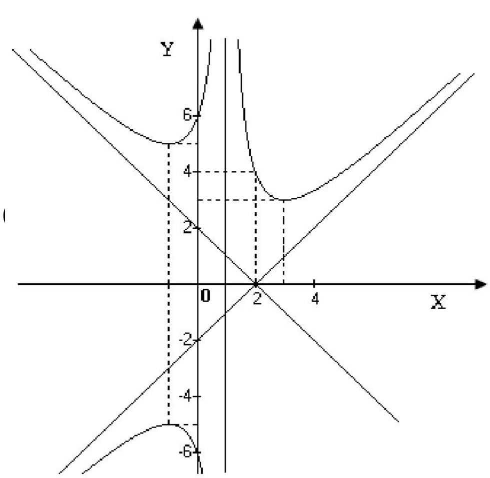
Cho x = 0 $\Rightarrow$ y = -6

x = 2 $\Rightarrow$ y = 4

b) Từ đồ thị hàm số (1) hãy nêu cách vẽ và vẽ đồ thị hàm số:

$y = \left|\dfrac{x^2 - 3x - 6}{x - 1}\right|$ (C_1) Ta có: y≥0 $\Rightarrow$ (C_1) ở phía trên Ox.

$y_1 = \begin{cases} y & \text{nếu } (x > 1) \\ -y & \text{nếu } (x < 1) \end{cases}$



Suy ra cách vẽ (C_1) như sau:

- Phần của đồ thị (1) ứng với x > 1 trùng với (C_1).
- Bỏ phần của (1) ứng với x < 1 và lấy phần đối xứng của phần này qua trục Ox ta được (C_1).

c) Từ gốc O có thể vẽ được bao nhiêu tiếp tuyến đến đồ thị (

Tìm tọa độ tiếp điểm (nếu có).

- Đường thẳng (d) qua 0 và có hệ số góc k là: y=kx.
- Hoành độ tiếp điểm là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2 - 3x + 6}{x - 1} = kx & (1) \\ \dfrac{x^2 - 2x - 3}{(x-1)^2} = k & (2) \end{cases}$$

Thay (2) vào (1):

$$\frac{x^2-3x+6}{x-1}=\frac{(x^2-2x-3)x}{(x-1)^2}\Leftrightarrow x^2-6x+3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=3+\sqrt{6}\\x=3-\sqrt{6}\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}k=4\sqrt{6}-9\\k=-4\sqrt{6}-9\end{array}\right.$$

Vậy có 2 tiếp tuyến kẻ từ 0 đến đồ thị (1).
Tọa độ tiếp điểm là:

$$x=3+\sqrt{6}\Rightarrow y=3\sqrt{6}-3\Rightarrow M_1(3+\sqrt{6},3\sqrt{6}-3)$$
$$x=3-\sqrt{6}\Rightarrow y=-3\sqrt{6}-3\Rightarrow M_2(3-\sqrt{6},-3\sqrt{6}-3)$$

Câu 28: Cho hàm số: $y=\frac{1}{3}x^3-x+m$ (1)

1) Khảo sát hàm số (1) khi $m=\frac{2}{3}$

$y=\frac{1}{3}x^3-x+\frac{2}{3}$ (C) TXD: D = R

$y'=x^2-1$

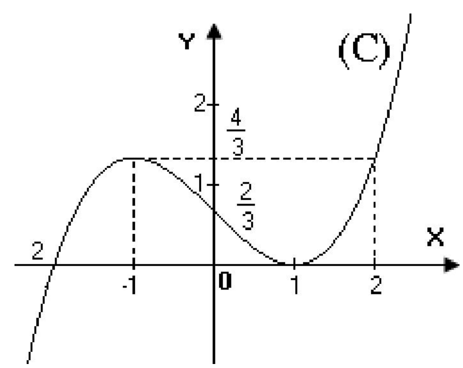
$y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=1\end{array}\right.$

$y''=2x$

$y''=0\Leftrightarrow x=0\Rightarrow y=\frac{2}{3}\Rightarrow$ điểm uốn $I(0,\ \frac{2}{3})$

- BBT:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		+	0	−	0	+	
y	$-\infty$	↗	$\frac{4}{3}$ CĐ	↘	0 CT	↗	$+\infty$



- Đồ thị:
  Cho

  $x=-2,\ \ y=0$

  $x=2,\ \ y=\frac{4}{3}$

2) Tìm m để đồ thị (1) cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt:
Đồ thị (1) cắt Ox tại 3 điểm phân biệt.

$\Leftrightarrow\frac{1}{3}x^3-x+m=0$ có 3 nghiệm phân biệt.

$\Leftrightarrow\frac{1}{3}x^3-x+\frac{2}{3}=-m+\frac{2}{3}$ (*) có 3 nghiệm phân biệt.

Đây là phương trình hoành độ giao điểm của (C) và đường thẳng (d).
Phương trình (*) có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ (d) cắt (C) tại 3 điểm phân biệt:

$$\Leftrightarrow 0 < -m + \frac{2}{3} < \frac{4}{3}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{2}{3} < m < \frac{2}{3}$$

Câu 29 :

1) Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số : $y = \dfrac{x^2 + x}{x - 2}$ $\quad (C)$

- TXĐ : $D = R \setminus \{2\}$

  $y' = \dfrac{x^2 - 4x - 2}{(x-2)^2}$

  $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 - \sqrt{6} \\ x = 2 + \sqrt{6} \end{array}\right.$

- Tiệm cận đứng :

  x = 2 vì $\lim\limits_{x \to 2} y = \infty$

  Ta có : $y = x + 3 + \dfrac{6}{x-2}$

- Tiệm cận xiên:

  y = x + 3 vì $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{6}{x-2} = 0$

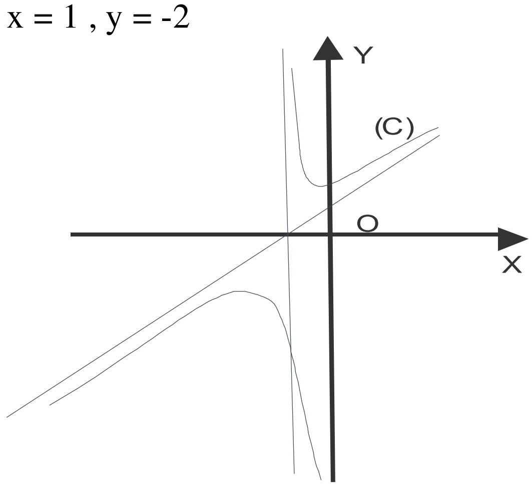
- BBT:

x	∞		$2-\sqrt{6}$		‖		$2+\sqrt{6}$		$+\infty$
y'		+	0	−	‖	−	0		
y	$-\infty$	↗	$5 \quad 2\sqrt{6}$	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	$5 \mid 2\sqrt{6}$	↗	$+\infty$

- Đồ thị :

  Cho x = 0 , y = 0

  x = 1 , y = -2



2) Xác định b để (Δ) cắt (C) tại 2 điểm phân biệt .

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại O.

$$y = f'(O).x \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}x$$

(Δ) qua B(0, b) và song song (d) có dạng :

$$(\Delta): y = -\frac{1}{2}x + b$$

Phương trình hoành độ giao điểm của (Δ) và (C) :

$$\frac{x^2 + x}{x - 2} = -\frac{1}{2}x + b$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + 2x = -x^2 + 2x + 2bx - 4b$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 - 2bx + 4b = 0$$

(Δ) cắt (C) tại 2 điểm phân biệt : $\Leftrightarrow \Delta' > 0$

$$\Leftrightarrow b^2 - 12b > 0 \Leftrightarrow b < 0 \vee b > 12$$

Toạ độ trung điểm I cuả MN :

$$\begin{cases} x = \dfrac{x_M + x_N}{2} = \dfrac{2b}{6} = \dfrac{b}{3} \\ y = -\dfrac{1}{2}x + b \end{cases} \Rightarrow y = \frac{5x}{2}$$

Vậy I nằm trên đường thẳng cố định có phương trình : $y = \frac{5x}{2}$

Câu 30:

Cho hàm số : $y = \dfrac{x^2 + 2mx + 2}{x + 1}$

1. Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số với m = 1:

$$y = \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1}$$

- TXĐ : $D = R \setminus \{-1\}$

  $$y' = \frac{x^2 + 2x}{(x + 1)^2}$$

  $$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -2 \end{array}\right.$$

- Tiệm cận đứng :

  x = -1 vì $\lim\limits_{x \to -1} = \infty$

  Ta có: $y = x + 1 + \dfrac{1}{x + 1}$

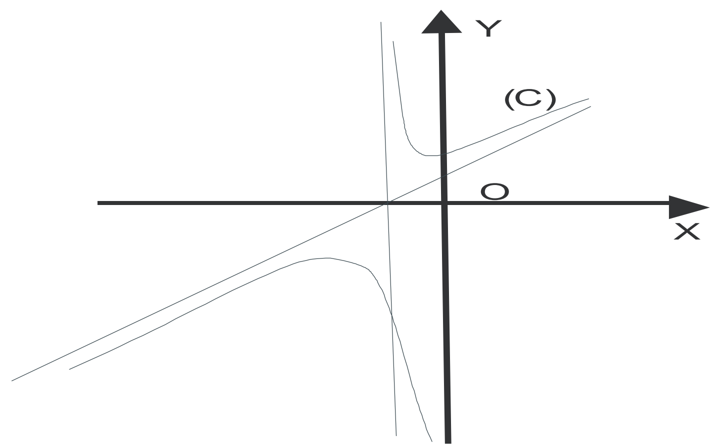
- Tiệm cận xiên :

  y = x + 1 vì $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1}{x + 1} = 0$

- BBT:

x	$-\infty$		-2		-1		0		$+\infty$
y'		+	0	−	‖	−	0	+	
y	$-\infty$	↗	-2	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	2	↗	$+\infty$

- Đồ thị:



2. Tìm m để hàm số có cực đại, cực tiểu và khoảng cách từ điểm cực đại và điểm cực tiểu đến đường thẳng: x + y + 2 = 0 bằng nhau.

Ta có: $y = \dfrac{x^2 + 2mx + 2}{x+1}$

$$y' = \frac{x^2 + 2x + 2m - 2}{(x+1)^2}$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 2m - 2 = 0 \quad (1)$$

Hàm số có cực đại, cực tiểu $\Leftrightarrow$ (1) có 2 nghiệm phân biệt.

$$\Leftrightarrow \Delta' = 3 - 2m > 0 \Leftrightarrow m < \frac{3}{2}$$

Toạ độ điểm CĐ $M_1(x_1, y_1)$ và điểm CT $M_2(x_2, y_2)$ cho bởi:

$$\left[\begin{array}{l} x_1 = -1 - \sqrt{3-2m} \Rightarrow y_1 = \dfrac{u'(x_1)}{v'(x_1)} = 2x_1 + 2m \\ x_2 = -1 - \sqrt{3-2m} \Rightarrow y_2 = \dfrac{u'(x_2)}{v'(x_2)} = 2x_2 + 2m \end{array}\right.$$

Gọi (D): x + y +2 = 0, ta có: $d\left(M_1, D\right) = d\left(M_2, D\right)$

$$\Leftrightarrow \frac{|x_1+2x_1+2m+2|}{\sqrt{2}} = \frac{|x_2+2x_2+2m+2|}{\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow |3x_1+2m+2| = |3x_2+2m+2|$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x_1+2m+2 = 3x_2+2m+2 \\ 3x_1+2m+2 = -3x_2-2m-2 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = x_2 (loại) \\ x_1+x_2 = \dfrac{-4(m+1)}{3} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow -2 = \frac{-4(m+1)}{3} \Leftrightarrow m = \frac{1}{2}$$

So với điều kiện $m < \dfrac{3}{2}$ nhận $m = \dfrac{1}{2}$

ĐS : $m = \dfrac{1}{2}$

Câu 31:

1) Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số:

$y = x^3 - 6x^2 + 9x$ (C)

- TXĐ : D = R

  $y' = 3x^2 - 12x + 9$

  $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 3 \end{array}\right.$

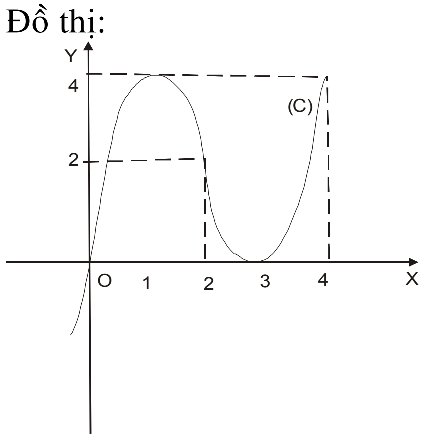
  $y'' = 6x - 12$

  $y'' = 0 \Leftrightarrow x = 2 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow$ điểm uốn (2, 2)

- BBT:

X	$-\infty$		1		3		$+\infty$
Y'		+	0	−	0	+	
Y	$-\infty$	↗	4	↘	0	↗	$+\infty$

- Đồ thị:

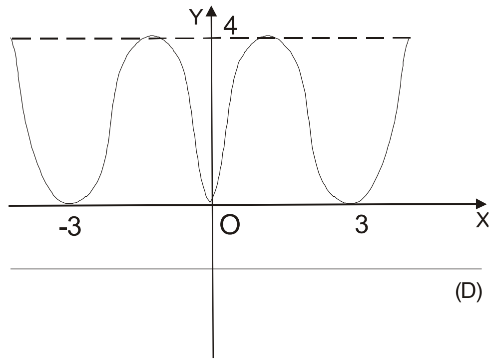


2) a) Từ đồ thị (C) hãy suy ra đồ thị (C_1) của hàm số:

$y_1 = |x|^3 - 6x^2 + 9|x|$

Ta có: $y_1 = |x|^3 - 6|x|^2 + 9|x| \Rightarrow y_1 = f(|x|)$

Đây là hàm số chẵn nên đồ thị (C_1) nhận Oy làm trục đối xứng.



Do đó đồ thị (C_1) suy từ (C) như sau:

- Phần của (C) bên phải trục Oy giữ nguyên.
- Bỏ phần của (C) bên trái Oy và lấy phần đối xứng của phần bên phải của (C) qua trục Oy.

b) Biện luận theo m số nghiệm của phương trình:

$|x|^3 - 6x^2 + 9|x| - 3 + m = 0$

$\Leftrightarrow |x|^3 - 6x^2 + 9|x| = 3 - m$

Đây là phương trình hoành độ giao điểm của (C_1) và đường thẳng d: y = 3 – m Số giao điểm của (C_1) và d là số nghiệm của phương trình.

Biện luận:

- $3 - m < 0 \Leftrightarrow m > 3$:vô nghiệm
- $3 - m = 0 \Leftrightarrow m = 3$: 3 nghiệm
- $0 < 3 - m < 4 \Leftrightarrow -1 < m < 3$: 6 nghiệm
- $3 - m = 4 \Leftrightarrow m = -1$: 4 nghiệm
- $3 - m > 4 \Leftrightarrow m < -1$: 2 nghiệm

Câu 32 :

1) a) Khảo sát hàm số:

$$y = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}$$

- TXĐ : $D = R \setminus \{1\}$

$$y' = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right.$$

- Tiệm cận đứng:

x = 1 vì $\lim\limits_{x \to 1} \frac{1}{x - 1} = \infty$

Ta có: $y = x + \dfrac{1}{x-1}$

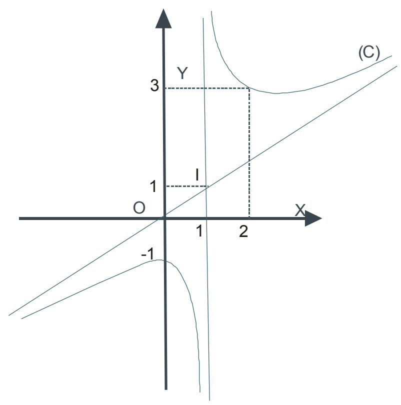
- Tiệm cận xiên:

 $y = x$ vì $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x-1} = 0$

- BBT:

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
y'		+	0	−	‖	−	0	+	
y	$-\infty$	↗	−1	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	3	↗	$+\infty$

- Đồ thị :



b) Xác định $A(x_1, y_1) \in (C)$ với $x_1 > 1$ sao cho khoảng cách từ A đến giao điểm hai đường tiệm cận nhỏ nhất.

Gọi I là giao điểm 2 đường tiệm cận:

$x = 1 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow I(1,1)$

$A(x_1, y_1) \in (C) \Leftrightarrow y_1 = x_1 + \dfrac{1}{x_1 - 1}$

Ta có : $AI^2 = (x_1 - 1)^2 + (y_1 - 1)^2$

$$= (x_1-1)^2 + \left(x_1 - 1 + \frac{1}{x_1-1}\right)^2$$

$$\Rightarrow AI^2 = 2(x_1-1)^2 + \frac{1}{(x_1-1)^2} + 2 \ge 2\sqrt{2(x_1-1)^2 . \frac{1}{(x_1-1)^2}} + 2$$

$$= 2\sqrt{2} + 2 = 2(\sqrt{2}+1)$$

$\Rightarrow$ Min $AI^2 = 2(\sqrt{2}+1)$ khi :

$$2(x_1-1)^2=\frac{1}{(x_1-1)^2}\Leftrightarrow (x_1-1)^4=\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x_1-1=\pm\frac{1}{\sqrt[4]{2}}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=1+\dfrac{1}{\sqrt[4]{2}} \\ x_1=1-\dfrac{1}{\sqrt[4]{2}}(loại)\end{array}\right. \Rightarrow y_1=\sqrt[4]{2}+\frac{1}{\sqrt[4]{2}}$$

Vậy : $A\left(1+\dfrac{1}{\sqrt[4]{2}},\sqrt[4]{2}+\dfrac{1}{\sqrt[4]{2}}\right)$ thì Min $AI=\sqrt{2(\sqrt{2}+1)}$

2) Tìm tập giá trị của $y=\dfrac{x+3}{\sqrt{x^2+1}}$ và các tiệm cận của đồ thị hàm số đó:

- Miền xác định R.
- $y'=\dfrac{1-3x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$, $y'=0\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{3}$
- Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
y'			0		
y	-1	↗	$\sqrt{10}$	↘	-1

Dựa vào bảng biến thiên ta kết luận:

- Miền giá trị của hàm số : $(-1,\sqrt{10}\}$
- Đồ thị có 2 đường tiệm cận ngang: $y=-1\vee y=1$

CÂU 33:

1) Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số:

$$y=\frac{x^2+2x-2}{x-1}$$

- TXĐ: D = R\{1}

$$y'=\frac{x^2-2x}{(x-1)^2}$$

$$y'=0 \quad\Leftrightarrow\quad \left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\end{array}\right.$$

- Tiệm cận đứng:

  x = 1 vì $\lim\limits_{x\to 1}=\infty$

  Ta có: $y=x+3+\dfrac{1}{x-1}$

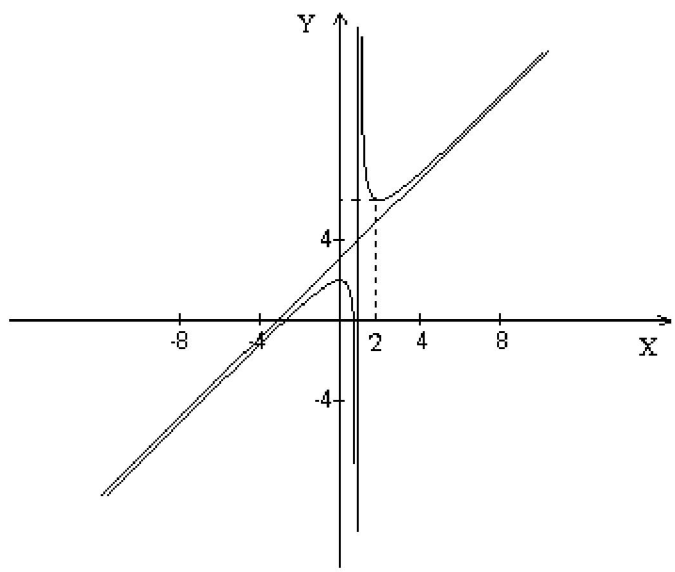
- Tiệm cận xiên:

y = x + 3 vì $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x-1}=0$

- BBT:

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
y'		+	0	−	‖	−	0	+	
y	$-\infty$	↗	2 CĐ	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	6 CT	↗	$+\infty$

- Đồ thị:



2) Tìm điểm M trên (C) sao cho khoảng cách từ M đến giao điểm 2 đường tiệm cận là nhỏ nhất.

Giao điểm của 2 đường tiệm cận là: I(1,4)

Gọi $M\left(1+a,4+a+\dfrac{1}{a}\right)\in\ (C)$

- Xét a > 0

Ta có:

$$IM^2=a^2+\left(a+\frac{1}{a}\right)^2=2a^2+\frac{1}{a^2}+2\geq 2\sqrt{2a^2.\frac{1}{a^2}}+2$$
$$=2\sqrt{2}+2$$

$$\Rightarrow IM\geq\sqrt{2\sqrt{2}+2}$$

$$\Rightarrow \min(IM)=\sqrt{2\sqrt{2}+2}\ \text{ khi }\ 2a^2=\frac{1}{a^2}\quad\Leftrightarrow a^4=\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow a=\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\Rightarrow\quad M\left(1+\frac{1}{\sqrt[4]{2}},4+\frac{1}{\sqrt[4]{2}}+\sqrt[4]{2}\right)$$

Do tính đối xứng nên có 2 điểm M thoả điều kiện bài toán:

$$M_1\left(1+\frac{1}{\sqrt[4]{2}},4+\frac{1}{\sqrt[4]{2}}+\sqrt[4]{2}\right)$$

$$M_2\left(1-\frac{1}{\sqrt[4]{2}},4+\frac{1}{\sqrt[4]{2}}-\sqrt[4]{2}\right)$$

CÂU34:

Cho hàm số: $y=\dfrac{x^2+mx-1}{x-1}$

Tìm m để tiệm cận xuyên cắt các trục toạ độ tại A, B sao cho: $S_{OAB}=18$

Ta có: $y=x+m+1+\dfrac{m}{x-1}$

$\Rightarrow$ TCX: y = x + m + 1 vì $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{m}{x-1}=0$

TCX cắt Ox tại A: y = 0 suy ra x = -m-1

$\Rightarrow$ A(-m-1, 0)

TCX cắt Oy tại B: x = 0 $\Rightarrow$ y = m + 1

$\Rightarrow$ B(0, m+1)

$\Rightarrow S_{OAB}=\dfrac{1}{2}OA.OB=18$

$\Leftrightarrow |-m-1|.|m+1|=36$

$\Leftrightarrow (m+1)^2=36 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=5 \\ m=-7 \end{array}\right.$

CÂU 35:

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số với m = 1

$y=-x^3+6x^2-9x+4$

- TXĐ: D = R

  $y'=-3x^2+12x-9$

  $y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=3 \end{array}\right.$

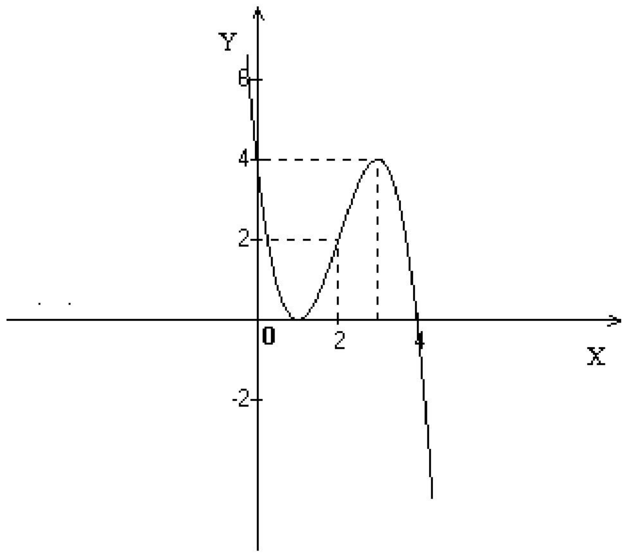
  $y''=-6x+12$

  $y''=0 \Leftrightarrow x=2 \Rightarrow y=2 \Rightarrow$ điểm uốn (2, 2).

- BBT:

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
y'		−	0	+	0	−	
y	$+\infty$	↘	0 CT	↗	4 CĐ	↘	$-\infty$

- Đồ thị:



Cho x = 0, y = 4

x = 4, y = 0

2) Tìm m để đồ thị hàm số có điểm cực đại, điểm cực tiểu đối xứng nhau qua điểm I(0, 4)

Ta có: $y = -x^3 + 3(m+1)x^2 - 3(2m+1)x + 4$

$y' = -3x^3 + 6(m+1)x - 3(2m+1)$

$y' = 0 \Leftrightarrow -3x^3 + 6(m+1)x - 3(2m+1) = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 2(m+1)x + 2m + 1 = 0 \quad (1)$

Hàm số có cực đại và cực tiểu $\Leftrightarrow \Delta' = 0$

$\Leftrightarrow (m+1)^2 - 2m - 1 > 0 \Leftrightarrow m^2 > 0 \Leftrightarrow m \neq 0$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = 1 \quad \Rightarrow y_1 = -3m + 3 \\ x_2 = 2m + 1 \Rightarrow y_2 = 4m^3 - 3m + 3 \end{array}\right.$

Tọa độ điểm cực đại và cực tiểu là:

$M_1(1, -3m+3), M_2(2m+1, 4m^3 - 3m + 3)$

M_1 Và M_2 đối xứng nhau qua I $\Leftrightarrow$ I là trung điểm $M_1 M_2$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ y_1 + y_2 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m + 2 = 0 \\ 4m^3 - 3m + 3 - 3m + 3 = 8 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ 4m^3 - 6m - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ (m+1)(4m^3 - 4m - 2) = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow m = -1$ (nhận)

ĐS: $m = -1$

CÂU 36:

Cho hàm số $y = \dfrac{2x^2 + (6-m)x}{mx+2}$

1) Tìm m để hàm số có cực đại và cực tiểu:

Ta có: $y' = \dfrac{2mx^2 + 8x + 12 - 2m}{(mx+2)^2}$

$y' = 0 \Leftrightarrow\ 2mx^2 + 8x + 12 - 2m = 0$

$\Leftrightarrow mx^2 + 4x + 6 - m = 0 \quad (1)$

Hàm số đạt cực đại và cực tiểu $\Leftrightarrow$ (1) có 2 nghiệm phân biệt.

$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta' > 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ 4 - m(6-m) > 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m^2 - 6m + 4 > 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m < 3 - \sqrt{5} \quad \vee m > 3 + \sqrt{5} \end{cases}$

Vậy: $m < 3 - \sqrt{5} \quad \vee m > 3 + \sqrt{5}$ và $m \neq 0$ thì hàm số có cực đại, cực tiểu

2) Khảo sát hàm số khi m = 1:

$y = \dfrac{2x^2 + 5x}{x+2} \quad (C)$

- TXĐ: D = R\ {-2}

  $y' = \dfrac{2x^2 + 8x + 10}{(x+2)^2} > 0 \qquad \forall x \neq 2$

  $\Rightarrow$ Hàm số tăng trên từng khoảng xác định.

- Tiệm cận đứng :

  x = -2 vì $\lim\limits_{x \to -2} y = \infty$

  Ta có: $y = 2x + 1 - \dfrac{2}{x+2}$

- Tiệm cận xiên:

  y = 2x + 1 vì $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2}{x+2} = 0$

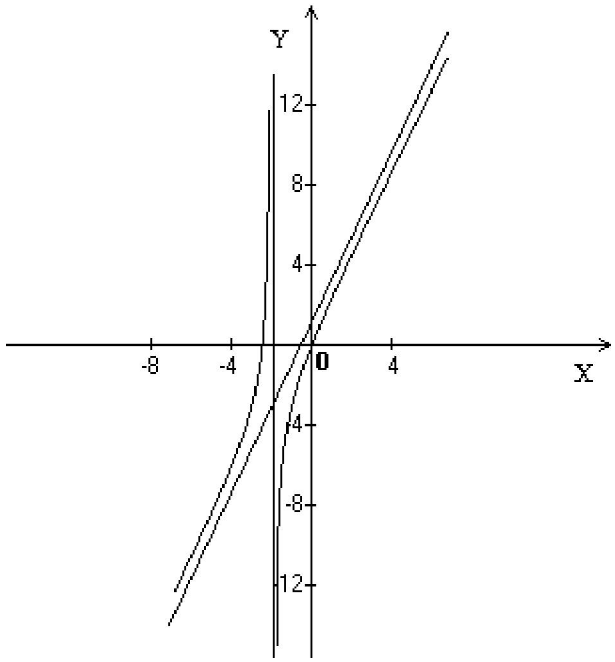
- BBT:

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
y'		+	‖	+	
y	$-\infty$ ↗	$+\infty$	‖	$-\infty$ ↗	$+\infty$

- Điểm đặc biệt:

x	-4	-3	-2	-1	0
y'	-6	-3	‖	-3	0

- Đồ thị:



3) Chứng minh rằng tại mọi điểm của (C) tiếp tuyến luôn luôn cắt 2 tiệm cận một tam giác có diện tích không đổi.

Đổi trục bằng tịnh tiến theo véc tơ $\overrightarrow{OI} = (-2,-3)$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = X - 2 \\ y = Y - 3 \end{cases}$$

Thay vào $y = 2x + 1 - \dfrac{2}{x+2}$

$$\Rightarrow\ Y - 3 = 2X - 3 - \frac{2}{X} \quad \Leftrightarrow\ Y = 2X - \frac{2}{X}$$

$$\Rightarrow Y' = 2 + \frac{2}{X^2}$$

Gọi $M_0(X_0,Y_0) \in (C) \quad \Leftrightarrow Y_0 = 2X_0 - \dfrac{2}{X_0}$

Phương trình tiếp tuyến tại M_0:

$$Y = f'(X_0)(X - X_0) + Y_0$$

$$\Leftrightarrow Y = \left(2 + \frac{2}{{X_0}^2}\right)\left(X - X_0\right) + 2X_0 - \frac{2}{X_0}$$

$$\Leftrightarrow Y = \left(2 + \frac{2}{{X_0}^2}\right)X - \frac{4}{X_0}$$

TCĐ: X= 0

TCX: Y= 2X

Giao điểm với tiệm cận đứng:

$$X = 0 \quad \Rightarrow Y = -\frac{4}{X_0} \quad \Rightarrow A\left(0, -\frac{4}{X_0}\right)$$

Giao điểm với TCX:

$$\left(2 + \frac{2}{X_0^{\ 2}}\right)X - \frac{4}{X_0} = 2X \quad \Leftrightarrow X = 2X_0 \quad \Rightarrow Y = 4X_0$$

$$\Rightarrow B\left(2X_0, 4X_0\right)$$

$$S_{IAB} = \frac{1}{2}\left|X_B\right|\left|Y_A\right| = \frac{1}{2}\left|2X_0\right|\left|\frac{-4}{X_0}\right| = 4 \text{ (không đổi)}$$

CÂU 37:

1) Cho hàm số: $y = x^3 - 3(a-1)x^2 + 3a(a-2)x + 1$

a) Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số khi a=0

$y = x^3 + 3x^2 + 1$

D = R

$y' = 3x^2 + 6x = 3x\left(x+2\right)$

$y' = 0 \quad \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -2 \end{array}\right.$

$y'' = 6x + 6$

$y'' = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -1 \quad \Rightarrow y = 3$

$\Rightarrow$ Điểm uốn (-1, 3)

- BBT:

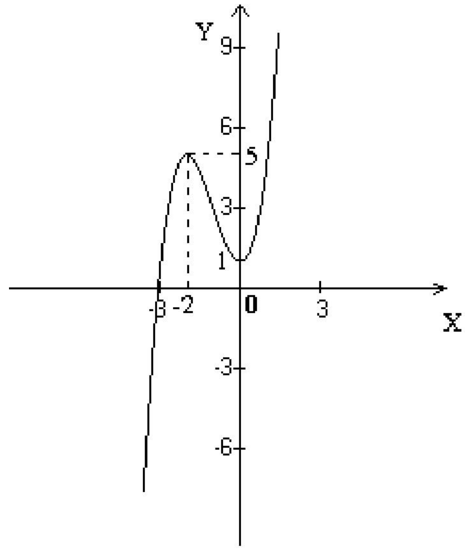
x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
y'		+	0	−	0	+	
y	$-\infty$	↗	5	↘	1	↗	$+\infty$

- Đồ thị:

Cho

$x = 1 \Rightarrow y = 5$

$x = -3 \Rightarrow y = 1$



b) Với giá trị nào của a thì hàm số đồn biến với $1 \le |x| \le 2$

Ta có:

$y = x^3 - 3(a-1)x^2 + 3a(a-2)x + 1$

$y' = 3x^2 - 6(a-1)x + 3a(a-2)$

Hàm số đồng biến với $1 \le |x| \le 2$

$\Leftrightarrow y' \ge 0$ với $1 \le |x| \le 2$

$\Leftrightarrow x^2 - 2(a-1)x + a(a-2) \ge 0$ với : $-2 \le x \le -1 \quad \vee \quad 1 \le x \le 2$

BXD:

x	$-\infty$		$a-2$		a		$+\infty$
y		+	0	-	0	+	

$y' \ge 0$ với $-2 \le x \le -1 \quad \vee \quad 1 \le x \le 2$

$\Leftrightarrow -1 \le a - 2 \quad \vee a \le 1$

$\Leftrightarrow a \ge 1 \vee \quad a \le 1 \qquad \Leftrightarrow a \in \mathbb{R}$

Vậy hàm số đồng biến trong $1 \le |x| \le 2$ với mọi $a \in \mathbb{R}$

2) Tìm m để đồ thị $y = x^2 - 3x + \dfrac{m}{x} + 3$ có 3 điểm cực trị.

Ta có: $y' = 2x - 3 - \dfrac{m}{x^2}$

Hàm số có 3 cực trị $\Leftrightarrow$ y’= 0 có 3 nghiệm phân biệt.

$\Leftrightarrow 2x^3 - 3x^2 - m = 0$ có 3 nghiệm phân biệt.

Xét hàm số $g(x) = 2x^3 - 3x^2 - m$

$\Rightarrow g'(x) = 6x^2 - 6x$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x = 0 & \Rightarrow y_{cđ} = -m \\ x = 1 & \Rightarrow y_{CT} = -(m+1) \end{array}\right.$$

g(x) = 0 có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow y_{cđ}.y_{ct} < 0$

$$\Leftrightarrow m(m+1) < 0 \quad \Leftrightarrow \ -1 < m < 0$$

Vậy đồ thị có 3 điểm cực trị khi: -1 < m < 0

Chia f(x) cho f'(x) ta được phương trình đường cong chứa 3 điểm cực trị:

$$y = f'(x)\left(\frac{1}{2}x - \frac{3}{4}\right) + \frac{3}{4} + \frac{3}{2}.\frac{m}{x} - \frac{3}{4}.\frac{m}{x^2}$$

Tọa độ các điểm cực trị thỏa hệ:

$$\begin{cases} f'(x) = 0 \\ y = \frac{3}{4} + \frac{3}{2}.\frac{m}{x} - \frac{3}{4}.\frac{m}{x^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 3 = \frac{m}{x^2} & (1) \\ y = \frac{3}{4} + \frac{3}{2}.\frac{m}{x} - \frac{3}{4}.\frac{m}{x^2} & (2) \end{cases}$$

Khử m ta có:

$$\frac{m}{x^2} = 2x - 3 \quad \Rightarrow \frac{m}{x} = 2x^2 - 3x$$

Thay vào (2) ta được :

$$y = \frac{3}{4} + \frac{3}{2}\left(2x^2 - 3x\right) - \frac{3}{4}(2x - 3)$$

$$\Leftrightarrow y = 3x^2 - 6x + 3$$

$$\Leftrightarrow y = 3(x-1)^2$$

Vậy 3 điểm cực trị ở trên đường cong có phương trình:

$$y = 3(x-1)^2$$

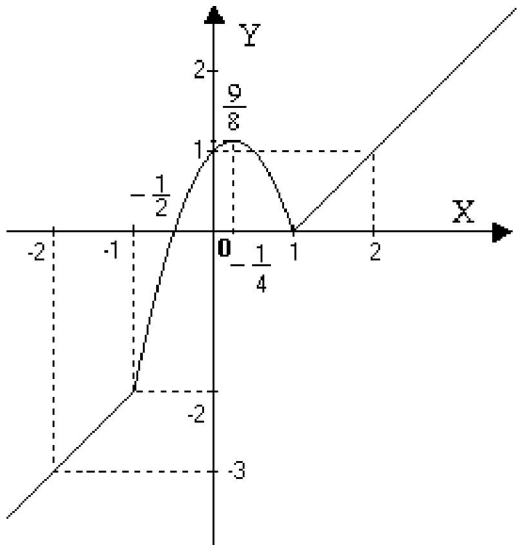
Câu 38 :

1) Vẽ đồ thị hàm số: $y = -x^2 + x + \sqrt{(x^2+1)^2 - 4x^2}$

$$\Leftrightarrow y = -x^2 + x + \sqrt{(x^2-1)^2}$$

$$\Leftrightarrow y = -x^2 + x + \left|x^2 - 1\right|$$

$$\Leftrightarrow y = \left[\begin{array}{ll} \text{x-1} & \text{nếu } \ x \le -1 \ \vee \ x \ge 1 \\ -2x^2 + x + 1 & \text{nếu } \ -1 \le x \le 1 \end{array}\right.$$



2) Tìm toạ độ giao điểm của các tiếp tuyến của đồ thị hàm số: $y=\frac{x+1}{x-3}$ với trục hoành biết tiếp tuyến vuông góc đường thẳng y = x + 2001.

Gọi (d): y = x + 2001

$(\Delta): y=-x+b$ là tiếp tuyến $\perp$ (d)

(Δ) Tiếp xúc (C) $\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x+1}{x-3}=-x+\text{b} & (1) \\ \frac{-4}{(x-3)^2}=\text{-1} & (2) \end{cases}$

$(2) \Leftrightarrow (x-3)^2=4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=5 \end{array}\right.$

Thay vào (1): $x=1 \Rightarrow b=0$

$x=5 \Rightarrow b=8$

Vậy phương trình tiếp tuyến là: y = -x hay y = -x + 8

Suy ra giao điểm với trục hoành là O(0, 0), A(8, 0).

Câu 39 :

Cho hàm số : $y=\frac{(m+1)x^2-2mx-(m^3-m^2+2)}{x-m}$ (C_m)

1) Khảo sát hàm số đã cho với m = 0:

$$y=\frac{x^2-2}{x}=x-\frac{2}{x}$$

- TXĐ: $D=R\setminus\{0\}$

  $y'=1+\frac{2}{x^2}>0, \forall x$

  $\Rightarrow$ Hàm số đồng biến trên từng khoảng định .

  TCĐ: x = 0 vì $\lim\limits_{x\to 0} y=\infty$

  TCX: y = x vì $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{x}=0$

- BBT:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		$+$	||		
y	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

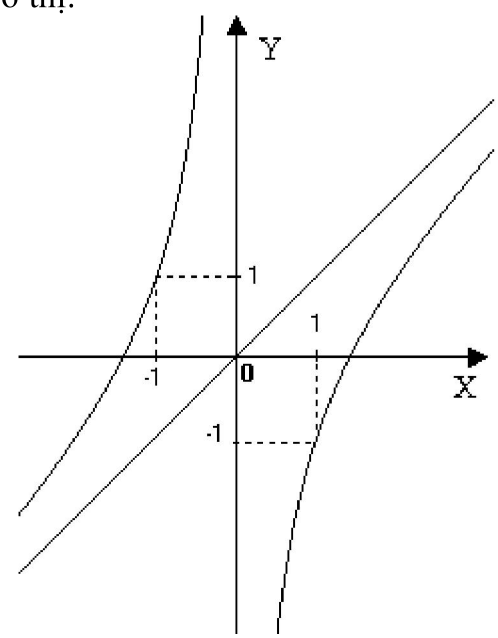
- Điểm đặc biệt:

  $x = \pm\sqrt{2}, y = 0$

  $x = 1, y = -1$

  $x = -1, y = 1$

- Đồ thị:



2) Định m để hàm số (C_m) luôn luôn nghịch biến trên các khoảng xác định của nó.

Ta có: $y = \dfrac{(m+1)x^2 - 2mx - (m^3 - m^2 + 2)}{x - m}$

$$y' = \frac{(m+1)x^2 - 2m(m+1)x + m^3 + m^2 + 2}{(x-m)^2}$$

Hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định.

$\Leftrightarrow y' \le 0, \forall x \ne m$

$\Leftrightarrow (m+1)x^2 - 2m(m+1)x + m^3 + m^2 + 2) \le 0, \forall x \ne m$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m+1 < 0 \\ \Delta' \le 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m < -1 \\ m^2(m+1)^2 - (m+1)(m^3 + m^2 + 2) \le 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m < -1 \\ -2(m-1) \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -1 \\ m \ge -1 \end{cases} \quad \text{(vô nghiệm)}$$

Vậy không có giá trị nào của m để hàm số luôn nghịch biến trên các khoảng xác định của nó.

Câu 40 :

1) Khảo sát hàm số: $y = \dfrac{x^2 + x - 5}{x - 2}$ (C)

- TXĐ: $D = R \setminus \{2\}$

  $y' = \dfrac{x^2 - 4x + 3}{(x-2)^2}$

  $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 3 \end{array}\right.$

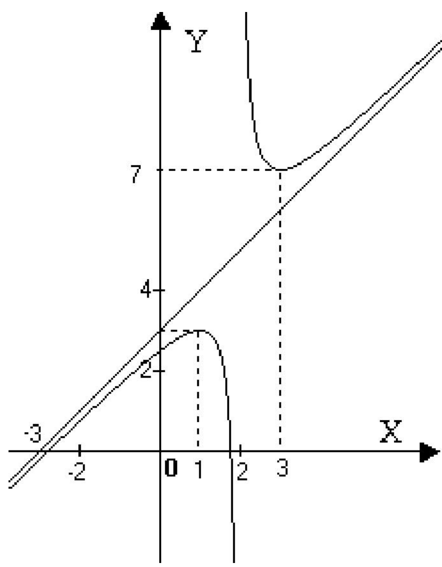
- Tiệm cận đứng: x = 2 vì $\lim\limits_{x \to 2} = \infty$

Ta có: $y = x + 3 + \dfrac{1}{x-2}$

- Tiệm cận xiên: y = x + 3 vì $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1}{x-2} = 0$
- BBT:

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
y'		+	0	−	||				
y	$-\infty$	↗	3 CĐ	↘	$-\infty$ || $+\infty$	↘	CT 7	↗	$+\infty$

- Đồ thị:



Cho $x = 0 \Rightarrow y = \dfrac{5}{2}$

2) Chứng minh rằng tích khoảng cách từ 1 điểm M bất kỳ trên (C) đến các đường tiệm cận là 1 hằng số.

Gọi $M(x_0, y_0) \in (C) \Leftrightarrow y_0 = x_0 + 3 + \dfrac{1}{x_0 - 2}$

TCĐ: x –2 = 0

TCX: x – y + 3 = 0

Ta có: $d(M,TCĐ).d(M,TCX) = \dfrac{|x_0 - 2|}{\sqrt{1}} \cdot \dfrac{|x_0 - y_0 + 3|}{\sqrt{2}}$

$$=\left|x_0-2\right|.\frac{\left|\frac{-1}{x_0-2}\right|}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\text{hằng số}$$

3) Tìm trên mỗi nhánh của (C) 1 điểm sao cho khoảng cách giữa chúng nhỏ nhất:

Gọi $A(2-a,5-a-\frac{1}{a})$ (a > 0) và $B(2+b,5+b+\frac{1}{b})$ (b > 0) là hai điểm thuộc 2 nhánh của (C).

Ta có: $AB^2=(b+a)^2+(b+a+\frac{1}{b}+\frac{1}{a})^2$

$$=(b+a)^2+(b+a)^2\left(1+\frac{1}{ab}\right)^2\geq 4ab+4ab\left(1+\frac{2}{ab}+\frac{1}{a^2b^2}\right)=8ab+8+\frac{4}{ab}$$

$$=8+8ab+\frac{4}{ab}\geq 8+2\sqrt{8ab.\frac{4}{ab}}=8+8\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow AB\geq 2\sqrt{2(1+\sqrt{2})}$$

$$\Rightarrow \min(AB)=2\sqrt{2(1+\sqrt{2})}$$

khi: $\begin{cases}a=b\\8ab=\frac{4}{ab}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=b\\a^2b^2=\frac{1}{2}\end{cases}$

$$\Rightarrow a^4=b^4=\frac{1}{2}\Rightarrow a=b=\frac{1}{\sqrt[4]{2}}$$

Vậy: $A\left(2-\frac{1}{\sqrt[4]{2}},5-\sqrt[4]{2}-\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right)$

$B\left(2+\frac{1}{\sqrt[4]{2}},5+\sqrt[4]{2}+\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right)$

Câu 41:

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số:

$$y=\frac{x^2}{x-1}\quad (C)$$

- TXĐ: D = R\{1}

  $y'=\frac{x^2-2x}{(x-1)^2}$

  $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\end{array}\right.$

- Tiệm cận đứng:

  x = 1 vì $\lim\limits_{x\to 1}y=\infty$

  Ta có: $y=x+1+\frac{1}{x-1}$

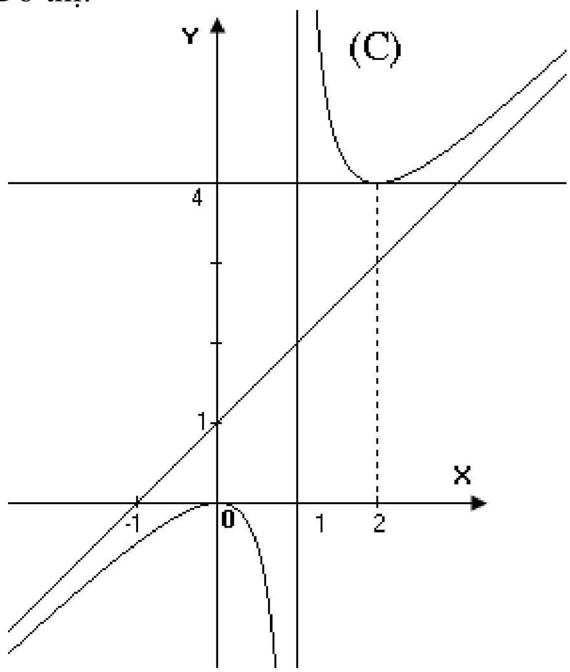
- Tiệm cận xiên:

  y = x + 1 vì $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x-1}=0$

- BBT:

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
y'		+	0	−	‖	−	0	+	
y	$-\infty$	↗	0	↘ $-\infty$	‖ $+\infty$	↘	4	↗	$+\infty$

- Đồ thị:



2) Tìm trên đường thẳng y = 4 tất cả các điểm mà từ mỗi điểm đó có thể kẻ tới (C) 2 tiếp tuyến lập với nhau 1 góc 45^0.

- Gọi M(a, 4) $\in$ đường thẳng y = 4, ta có đường thẳng y = 4 là tiếp tuyến kẻ từ M đến (C) và song song Ox $\Rightarrow$ tiếp tuyến thứ hai tạo với Ox 1 góc bằng $\pm 45^0$

$\Rightarrow$ Hệ số góc tiếp tuyến tại $M_0(x_0, y_0) \in (C)$ là $f'(x_0) = \pm 1$

$$f'(x_0) = 1 \Leftrightarrow \frac{x_0^2 - 2x_0}{(x_0 - 1)^2} = 1 \quad \text{(vô nghiệm)}$$

$$f'(x_0) = -1 \Leftrightarrow \frac{x_0^2 - 2x_0}{(x_0 - 1)^2} = -1$$

$$\Leftrightarrow 2x_0^2 - 4x_0 + 1 = 0 \left[\begin{array}{l} x_0 = 1 + \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ x_0 = 1 - \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} y_0 = 2 + \dfrac{3\sqrt{2}}{2} \\ y_0 = 2 - \dfrac{3\sqrt{2}}{2} \end{array}\right.$$

Phương trình tiếp tuyến tại M_0 là:

$$y = -(x + x_0) + y_0$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ll} y = -x + 3 + 2\sqrt{2} & (d_1) \\ y = -x + 3 - 2\sqrt{2} & (d_2) \end{array}\right.$$

(d_1) qua M(a, 4) $\Rightarrow\ 4 = -a + 3 + 2\sqrt{2} \Leftrightarrow a = -1 + 2\sqrt{2}$

(d_2) qua M(a, 4) $\Rightarrow\ 4 = -a + 3 - 2\sqrt{2} \Leftrightarrow a = -1 - 2\sqrt{2}$

Vậy có 2 điểm M thỏa điều kiện của bài toán.

$$M_1(-1 + 2\sqrt{2}, 4);\ M_2(-1 - 2\sqrt{2}, 4)$$

Câu42:

1) Khảo sát hàm số:

$y = x^3 - 3x$ (1)

TXĐ: D = R

$y' = 3x^2 - 3$

$y' = 0 \iff \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 1 \end{array}\right.$

$y'' = 6x$

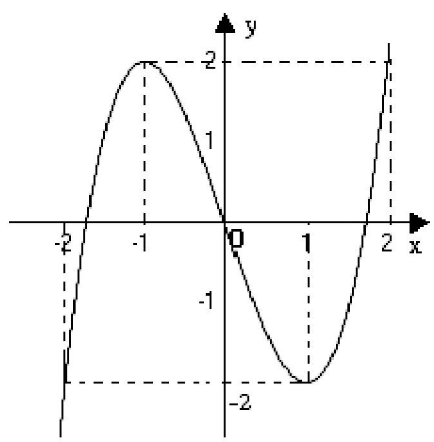
$y'' = 0 \Leftrightarrow x = 0 \Rightarrow y = 0$

=> điểm uốn O(0, 0)

BBT:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		+	0	−	0	+	
y	$-\infty$	↗	2 CĐ	↘	-2 CT	↗	$+\infty$

Đồ thị:



2) Chứng minh rằng khi m thay đổi, đường thẳng y = m(x + 1) + 2 luôn cắt đồ thị (1) tại 1 điểm cố định A:

* Đường thẳng (d): y = m(x + 1) + 2 luôn đi qua điểm cố định A(-1, 2).

Thay A(-1, 2) vào (1) thoả =>A $\in$ đồ thị (1).

Vậy: (d) luôn cắt đồ thị (1) tại điểm cố định A(-1, 2).

Định m để (d) cắt đồ thị (1) tại 3 điểm A, B, C phân biệt sao cho tiếp tuyến tại B và C vuông góc với nhau.

Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (C):

$x^3 - 3x$ = m(x + 1) + 2

$\Rightarrow$ (x+1)(x^2 - x – 2 - m) = 0

(d) cắt (1) tại 3 điểm phân biệt.

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x^2-x-2-m=0 \quad (2) \end{array}\right.$$

$\Rightarrow$ (2) có 2 nghiệm phân biệt khác –1.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ g(-1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1+4(2+m)>0 \\ m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -\dfrac{9}{4} \\ m \neq 0 \end{cases}$$

Khi đó (2) có 2 nghiệm x_B, x_C => hệ số tiếp tuyến tại B và C là: f’(x_B), f’(x_C)

Tiếp tuyến tại B và C vuông góc nhau $\Rightarrow$ f’(x_B).f’(x_C) = -1

$\Rightarrow$ (3 x_B^2 -3)(3 x_C^2 - 3) = -1

$\Rightarrow$ 9 x_B^2 x_C^2 - 9(x_B^2 + x_C^2) + 9 = -1

$\Rightarrow$ 9 P^2 -9(S^2 - 2P) +10 = 0

$$\text{Mà: } \begin{cases} S = -\dfrac{b}{a} = 1 \\ P = -2 - m \end{cases}$$

=> 9 $(-2-m)^2$ - 9(1 + 4 + 2m) +10 = 0

=> 9 m^2 +18m – 9 = 0

=> m^2 +2m-1=0 $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-1+\sqrt{2} \\ m=-1-\sqrt{2} \end{array}\right.$ (loại)

So với điều kiện: m > $-\dfrac{9}{4}$ và m $\neq$ -1+ $\sqrt{2}$.

Câu43:

Cho hàm số: y= $\dfrac{x^2 + 2x + m^2}{x + 2}$

1) Tìm giá trị của m sao cho $|y|$ $\geq$ 2 với mọi x $\neq$ -2

Ta có: $|y|$ $\geq$ 2 $\Leftrightarrow$ y $\leq$ -2 $\vee$ y $\geq$ 2

$\Leftrightarrow \max\limits_{x<-2} y \leq -2 \vee \min\limits_{x>-2} y \geq -2$

Mà: y’= $\dfrac{x^2 + 4x + 4 - m^2}{(x+2)^2}$

y’= 0 $\Leftrightarrow x^2 + 4x + 4 - m^2 = 0$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x1=-2-|m| \\ x2=-2+|m| \end{cases} (m \neq 0)$

$$\Rightarrow \begin{cases} y_{CĐ} = \dfrac{u'(x_1)}{v'(x_1)} = -2-2|m| \\ y_{CT} = \dfrac{u'(x_2)}{v'(x_2)} = -2+2|m| \end{cases} (m \neq 0)$$

Ta có:

$$\left[\begin{array}{l} \max\limits_{x<-2} y \le -2 \\ \min\limits_{x>-2} y \le 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -2-2|m| \le -2 \\ -2+2|m| \ge 2 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \neq 0 \\ m \le -2 \vee m \ge 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow m \le -2 \vee m \ge 2$$

Vậy: $|y| \ge 2, \forall x \neq -2 \; khi \; m \le -2 \vee m \ge 2$

2) Khảo sát hàm số với m = 1:

$$y = \frac{x^2+2x+1}{x+2} = x + \frac{1}{x+2}$$

- TXĐ: D = R\{-2}

  $$y' = \frac{x^2+4x+3}{(x+2)^2}$$

  $$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-3 \\ x=-1 \end{array}\right.$$

- Tiệm cận đứng:

  x = -2 vì $\lim\limits_{x \to -2} y = \infty$

- Tiệm cận xiên:

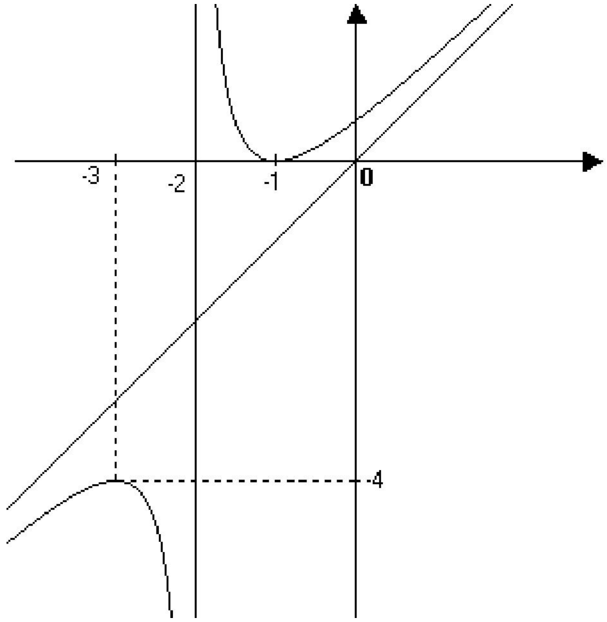
  y = x vì $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1}{x+2} = 0$

- BBT:

x	$-\infty$		-3		-2		-1		$+\infty$
y'		+	0	-	‖	-	0	+	
y	$-\infty$	↗	-4	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

- Đồ thị:

Cho x=0, y = $\dfrac{1}{2}$



Câu 44:

Cho hàm số: y = $\dfrac{x^2-8x}{8(x+m)}$ (1)

1) Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số (1) với m = 1:

$$y=\frac{x^2-8x}{8(x+1)}$$

- TXĐ: D = R\{-1}

  y'=$\dfrac{8x^2-16x-64}{64(x+1)^2}$ = $\dfrac{x^2+2x-8}{8(x+1)^2}$

  y'= 0 $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-4 \\ x=2 \end{array}\right.$

- Tiệm cận đứng:

  x = -1 vì $\lim\limits_{x\to -1} y=\infty$

- Ta có: y=$\dfrac{1}{8}$x - $\dfrac{9}{8}$ + $\dfrac{9}{8(x+1)}$

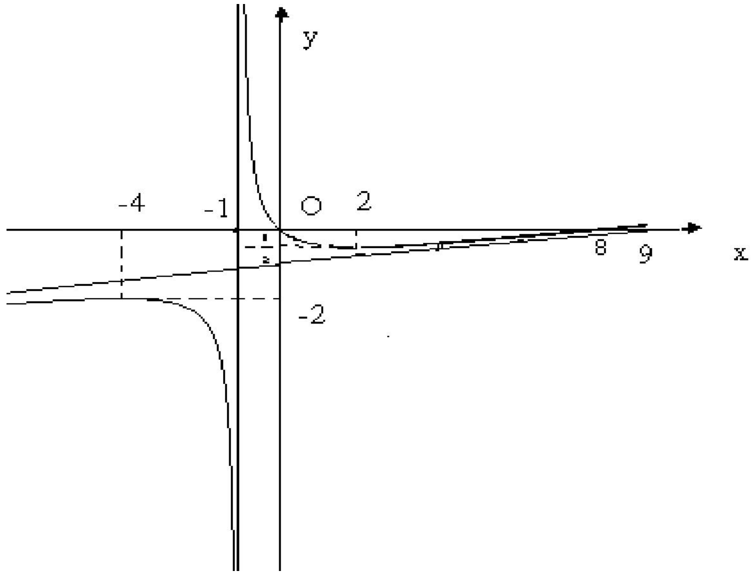
- Tiệm cận xiên:

  y=$\dfrac{1}{8}$x- $\dfrac{9}{8}$ vì $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{9}{8(x+1)}=0$

- BBT:

x	$-\infty$		-4		-1		2		$+\infty$
y'		+	0	−	||	−	0	+	
y	$-\infty$	↗	-2	↘ $-\infty$	||	$+\infty$ ↘	$\dfrac{-1}{2}$	↗	$+\infty$

- Đồ thị:



2) Tìm m sao cho hàm số (1) đồng biến trên $[1,+\infty)$

Ta có: $y=\dfrac{x^2-8x}{8(x-m)}$ (1)

D = R\{-m}

$$y'=\frac{8x^2+16mx-64m}{64(x+m)^2}=\frac{x^2+2mx-8m}{8(x+m)^2}$$

Hàm số (1) đồng biến trên $[1,+\infty)$ $\Leftrightarrow y'\geq 0,\ \forall x\in[1;+\infty)$

$\Leftrightarrow x^2+2mx-8m\geq 0,\ \forall x\in[1;+\infty)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta'\leq 0\\ -m<1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m^2+8m\leq 0\\ m>-1\end{cases}\Leftrightarrow -1<m\leq 0$$

$$\text{Hay }\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta'>0\\ x_1<x_2\leq 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta'>0\\ af'(1)\geq 0\\ \dfrac{S}{2}-1<0\end{cases}\Leftrightarrow 0<m\leq\frac{1}{6}$$

ĐS: $-1<m\leq\dfrac{1}{6}$

Câu 45:

1) Khảo sát hàm số :

$y=(x+1)^2(x-2)$ (C)

$y=x^3-3x-2$

- TXĐ: D = R

  $y' = 3x^2 - 3$

  y'=0 $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=1 \end{array}\right.$

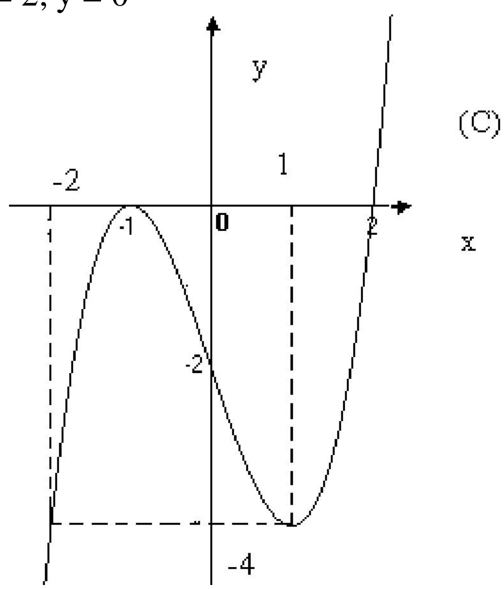
  y"=6x

  y"= 0 $\Leftrightarrow$ x= 0 $\Rightarrow$ x = 0 $\Rightarrow$ y= -2 $\Rightarrow$ điểm uốn I(0, -2)
- BBT:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		+	0	$-$	0	+	
y	$-\infty$	↗	0 CĐ	↘	-4 CT	↗	$+\infty$

- Đồ thị: Cho x = -2 , y =-4

  x = 2, y = 0



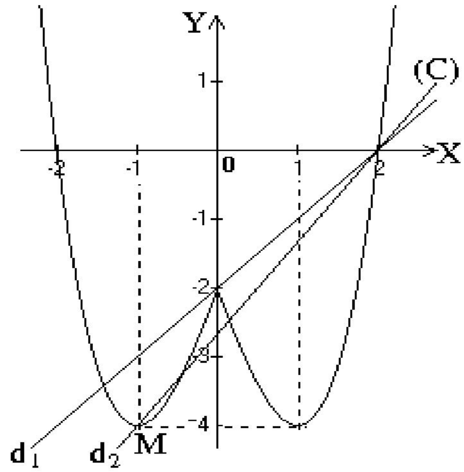
2) Xác định k để đường thẳng (Δ) qua M(2, 0) và có hệ số góc k cắt đồ thị hàm số sau tại 4 điểm phân biệt:

$$y_1 = |x|^3 - 3|x| - 2 \qquad (C_1)$$

Ta có: $y_1 = f\left(|x|\right)$

Đây là hàm số chẵn nên đồ thị (C_1) nhận Oy làm trục đối xứng.

Đồ thị (C_1) suy từ (C) như sau:



- Phần của (C) bên phải Oy giữ nguyên, bỏ phần của (C) bên trái Oy và lấy phần đối xứng của phần bên phải của (C) qua Oy.

Xét đường thẳng (d_1) qua 2 điểm M(2, 0) và I(0, -2)

$\Rightarrow$Hệ số góc $k_1 = \dfrac{y_M - y_I}{x_M - x_I} = \dfrac{2}{2} = 1$

Xét đường thẳng (d_2) qua 2 điểm M(2, 0) và A(-1, -4):

$\Rightarrow$Hệ số góc $k_2 = \dfrac{y_M - y_A}{x_M - x_A} = \dfrac{4}{3}$

Nếu (Δ) qua M và nằm giữa (d_1) và (d_2) thì (Δ) cắt (C_1) tại 4 điểm phân biệt.

$$\Rightarrow 1 < k < \frac{4}{3}$$

Câu 46:

1) Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số :

$$y = \frac{3x+1}{x-3} \qquad (1)$$

- TXĐ: D = R \{3}

  $y' = \dfrac{-10}{(x-3)^2} < 0$

  $\Rightarrow$ Hàm số giảm trên từng khoảng xác định .

- Tiệm cận đứng :

  x = 3 vì $\lim\limits_{x \to 3} y = \infty$

- TCN:

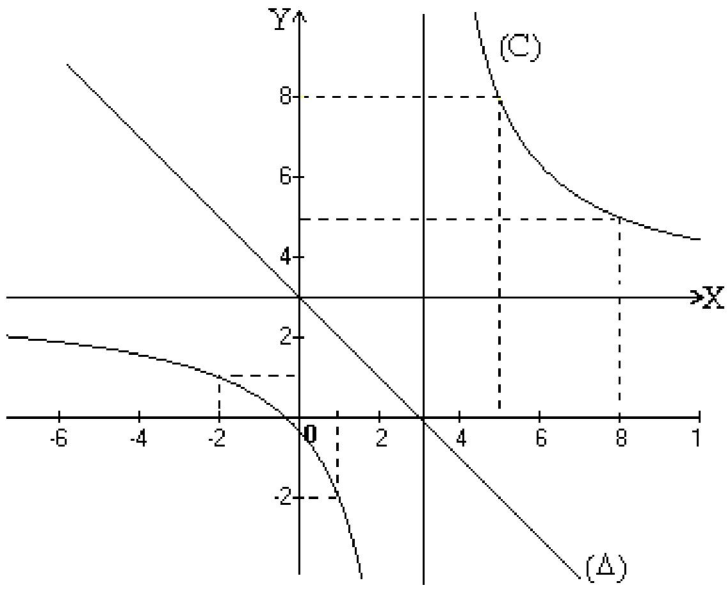
  y = 3 vì $\lim\limits_{x \to \infty} y = 3$

- BBT:

x	$-\infty$		3		$+\infty$
y'		–	‖	–	
y	3	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	3

- Điểm đặc biệt:

x	-2	0	1	3	5	8
y	1	$-\frac{1}{3}$	-2	‖	8	5



2) Tìm hàm số mà đồ thị của nó đối xứng của (C) qua đường thẳng x + y – 3 = 0.
Gọi I là giao điểm của hai đường tiệm cận của (C) $\Rightarrow$ I(3, 3)
Gọi (Δ) : x + y –3 = 0
Ta có: I và O đối xứng qua (Δ).
Đổi trục bằng tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{OI} = (3,3)$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = X + 3 \\ y = Y + 3 \end{cases}$$

Thay vào phương trình của (C):

$$Y + 3 = \frac{3X + 10}{X} \quad \Leftrightarrow \quad Y = \frac{10}{X}$$

Ta có:
TCĐ của (C) đối xứng qua (Δ) là trục Ox.
TCN của (C) đối xứng qua (Δ) là trục Oy.
$\Rightarrow$ Hai Đường tiệm cận của (C_1) đôi xứng của (C) qua (Δ) là 2 trục Ox, Oy nên phương trình của (C_1) là :

$$y = \frac{10}{x}$$

3) C(a,b) là 1 điểm tuỳ ý trên (C). Tiếp tuyến tại C cắt 2 đường tiệm cận tại A và B. Chứng minh rằng C là trung điểm của AB và diện tích ΔIAB không đổi.
Ta có đối với hệ trục mới:

$$Y = \frac{10}{X} \quad (C) \quad \Rightarrow \quad Y' = -\frac{10}{X^2}$$

$$C(a\ ,\ b\ )\ \in\ C\quad\Leftrightarrow\quad b=\frac{10}{a}$$

Tiếp tuyến tại C có phương trình:

$$Y=f'(X_c)(X-X_c)+Y_c\quad\Leftrightarrow\quad Y'=-\frac{10}{a^2}(X-a)+b$$

$$\Leftrightarrow\quad Y=-\frac{10}{a^2}X+\frac{10}{a}+\frac{10}{a}$$

$$\Leftrightarrow\quad Y=-\frac{10}{a^2}X+\frac{20}{a}$$

Tiếp tuyến cắt TCĐ tại A $\Rightarrow\ A\left[0\ ,\ \dfrac{20}{a}\right]$

Tiếp tuyến cắt TCN tại B

$$\Rightarrow\ B\ (2a\ ,\ 0)$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{X_A+X_B}{2}=a=X_C\\[2mm]\dfrac{Y_A+Y_B}{2}=\dfrac{10}{a}=Y_C\end{cases}$$

$\Rightarrow$ C là trung điểm AB

Mặt khác:

$$S_{IAB}=\frac{1}{2}\left|X_B\right|.\left|Y_A\right|=\frac{1}{2}|2a|.\left|\frac{20}{a}\right|=20\quad(\text{đvdt})$$

Vậy: C là trung điểm đoạn AB và S_{IAB} = 20 (không đổi).

Caâu 47:

Cho hàm số: $y = x^4 - 4x^2 + m$ (C)

1) Khảo sát hàm số với m = 3:

$$y = x^4 - 4x^2 + 3$$

- TCĐ: D = R

  $y' = 4x^3 - 8x = 4x(x^2 - 2)$

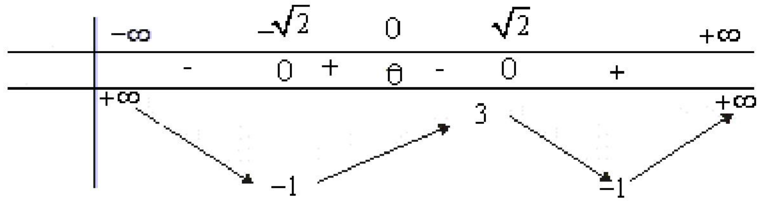
  $$y'=0\quad\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=\pm\sqrt{2}\end{array}\right.$$

  $y'' = 12x^2 - 8$

  $$y''=0\quad\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{\frac{2}{3}}\quad\Rightarrow y=\frac{7}{9}$$

Điểm uốn: $\left(-\sqrt{\dfrac{2}{3}}\,,\,\dfrac{7}{9}\right)$, $\left(\sqrt{\dfrac{2}{3}}\,,\,\dfrac{7}{9}\right)$

- BBT:



- Đồ thị (học sinh hãy tự vẽ)

Cho $y = 0 \quad \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm 1 \\ x = \pm 3 \end{array}\right.$

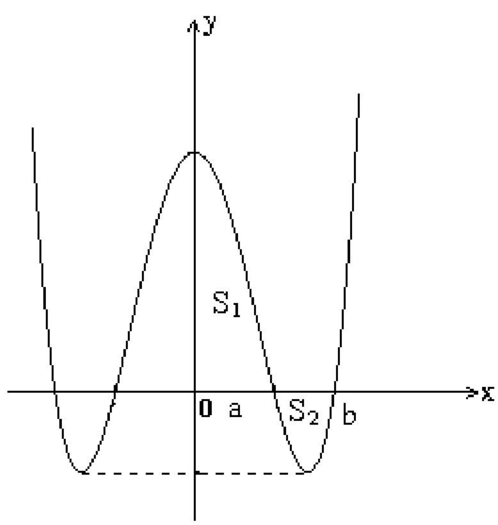
2) Giả sử (C) cắt Ox tại 4 điểm phân biệt. Xác định m sao cho diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C) và trục Ox có diện tích phía trên và phía dưới Ox bằng nhau.

(C) cắt Ox tại 4 điểm phân biệt $\Leftrightarrow \; x^4 - 4x^2 + m = 0$ (1)

có 4 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \; t^2 - 4t + m = 0$ (2)

(với $t = x^2 \geq 0$) có 2 nghiệm phân biệt.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 - m > 0 \\ m > 0 \\ 4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad 0 < m < 4$$



Khi đó, do tính đối xứng, theo đề bài ta có : $S_1 = S_2$.

$$\Leftrightarrow \int_0^a f(x)dx = \int_a^b -f(x)dx$$

$$\Leftrightarrow F(a) - F(0) = -F(b) + F(a)$$

$$\Leftrightarrow F(b) = F(0)$$

mà:

$$F(x)=\frac{x^5}{5}-\frac{4x^3}{3}+mx$$

$$\Rightarrow \frac{b^5}{5}-\frac{4b^3}{3}+mb=0$$

$$\Rightarrow \frac{b^4}{5}-\frac{4b^2}{3}+m=0 \qquad (b\neq 0) \qquad\qquad (1)$$

Mà điểm

$(b\ ,\ 0)\in(C) \quad\Leftrightarrow\quad b^4-4b^2+m=0 \qquad (2)$

$\Leftrightarrow \quad m=4b^2-b^4$

Thay vào (1)

$$\Rightarrow \frac{b^4}{5}-\frac{4b^2}{3}+4b^2-b^4=0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{8b^2}{3}-\frac{4b^4}{5}=0 \quad\Leftrightarrow\quad b^2=\frac{10}{3} \quad\Rightarrow\quad m=\frac{40}{3}-\frac{100}{9}=\frac{20}{9}$$

Vậy $m=\dfrac{20}{9}$

CÂU 48:

Cho hàm số : $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2-x+m+1$

1) Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số ứng với m = 0

$$y=\frac{1}{3}x^3-x+1 \quad (C)$$

- TXĐ : D = R

$y'=x^2-1$

$y'=0 \quad\Leftrightarrow\quad \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=1 \end{array}\right.$

$y''=2x$

$y''=0 \quad\Leftrightarrow\quad x=0 \quad\Rightarrow\quad y=1$

điểm uốn I(0, 1)

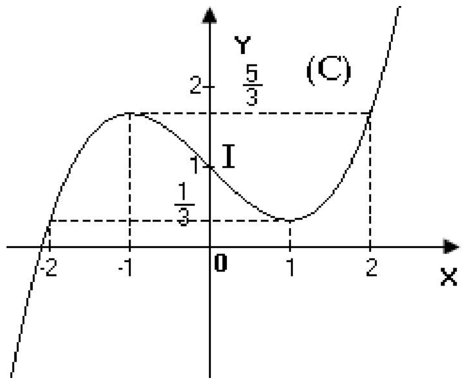
- BBT:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		+	0	−	0	+	
y		↗	$\frac{5}{3}$	↘	$\frac{1}{3}$	↗	

- Đồ thị:

Cho $x = -2 \quad , \quad y = \frac{1}{3}$

$x = 2 \quad , \quad y = \frac{5}{3}$



2) Tìm tiếp tuyến của (C) có hệ số góc nhỏ nhất

Ta có : $y = \frac{1}{3}x^3 - x + 1$

$y' = x^2 - 1$

$y'' = 2x$

BXD:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y''		-	0	+	
y'		↘	-1	↗	

$\Rightarrow \min\limits_{R} y' = -1$ tại x = 0, y = 1 $\Rightarrow$ I(0, 1)

Vậy : Hệ số góc của tiếp tuyến tại điểm uốn I là nhỏ nhất.

Phương trình tiếp tuyến tại I là:

$y' = x^2 - 2mx - 1$

$y' = 0 \;\Leftrightarrow\; x^2 - 2mx - 1 = 0 \quad (1)$

$\Delta' = m^2 + 1 > 0 \;, \forall m \;\Rightarrow\;$ (1) có hai nghiệm phân biệt.

$\Rightarrow$ Hàm luôn luôn có CĐ, CT.

- Tìm m sao cho khoảng cách giữa điểm CĐ và điểm CT là nhỏ nhất.

Gọi $M_1(x_1, y_1)$ và $M_2(x_2, y_2)$ là điểm CĐ và CT của đồ thị, ta có:

$M_1M_2^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$

Để tìm y_1, y_2 ta chia f(x) cho f '(x) :

$y = f'(x).\left(\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}m\right) - \frac{2}{3}(m^2 + 1)x + \frac{2}{3}m + 1$

Vì f '(x_1) = 0, f '(x_2) = 0

$$\Rightarrow\ y_1 = \frac{-2}{3}(m^2+1)x_1 + \frac{2}{3}m + 1$$

$$y_1 = \frac{-2}{3}(m^2+1)x_2 + \frac{2}{3}m + 1$$

$$\Rightarrow\ M_1M_2^2 = (x_2-x_1)^2 + \frac{4}{9}(m^2+1^2)(x_2-x_1)^2$$

$$= (x_2-x_1)^2\left[\frac{4}{9}(m^2+1)^2+1\right]$$

$$= \left(\frac{2\sqrt{\Delta'}}{a}\right)\left[\frac{4}{9}(m^2+1)^2+1\right]$$

$$\Rightarrow \min M_1M_2^2 = \frac{52}{9} \text{ khi m = 0}$$

$$\Rightarrow \min M_1M_2 = \frac{2\sqrt{3}}{3} \text{ khi m = 0}$$

Câu 49 :

1. Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số :

$$y = x^3 - 6x^2 + 9x \quad \text{(C)}$$

- TXĐ : D = R

$y' = 3x^2 - 12x + 9$

$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 3 \end{array}\right.$

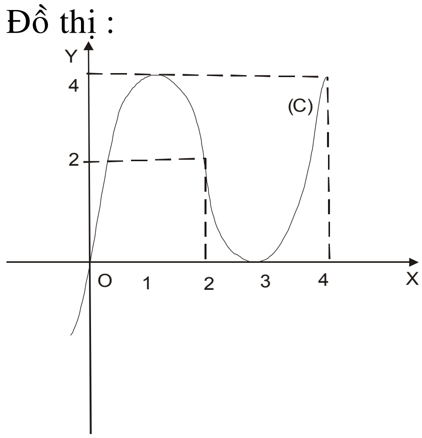
$y'' = 6x - 12$

$y'' = 0 \Leftrightarrow x = 2 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow$ điểm uốn (2,2)

- BBT :

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
y'		+	0	—	0	+	
y	$-\infty$	↗	4	↘	0	↗	$+\infty$

- Đồ thị :

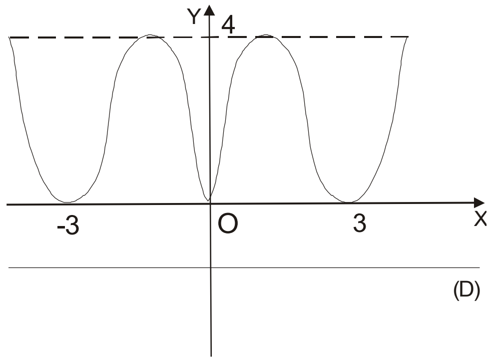


2.a.Từ đồ thị (C) hãy suy ra đồ thị (C_1) của hàm số :

$$y_1 = |x|^3 - 6x^2 + 9|x|$$

Ta có : $y_1 = |x|^3 - 6|x|^2 + 9|x| \Rightarrow y_1 = f(|x|)$

Đây là hàm số chẳn nên đồ thị (C_1) nhận Oy làm trục đối xứng



Do đó đồ thị (C_1) suy từ (C) như sau :

-Phần của (C) bên phải trục Oy giữ nguyên

-Bỏ phần của (C) bên trái Oy và lấy phần đối xứng của phần bên phải của (C) qua trục Oy.

b.Biện luận theo m số nghiệm của phương trình :

$$|x|^3 - 6x^2 + 9|x| - 3 + m = 0$$

$$\Leftrightarrow |x|^3 - 6x^2 + 9|x| = 3 - m$$

Đây là phương trình hoành độ giao điểm của (C_1) và đường thẳng d : y = 3 – m . Số giao điểm của (C_1) và d là số nghiệm của phương trình .

Biện luận :

$3 - m < 0 \Leftrightarrow m > 3$:vô nghiệm

$3 - m = 0 \Leftrightarrow m = 3$: 3 nghiệm

$0 < 3 - m < 4 \Leftrightarrow -1 < m < 3$: 6 nghiệm

$3 - m = 4 \Leftrightarrow m = -1$: 4 nghiệm

$3 - m > 4 \Leftrightarrow m < -1$: 2 nghiệm

Câu 50:

Cho hàm số : $y = (m + 2)x^3 + 3x^2 + mx - 5$

1) Với giá trị nào của m thì hàm số có CĐ, CT:

Ta có: $y' = 3(m + 2)x^2 + 6x + m$

$y' = 0 \Leftrightarrow 3(m + 2)x^2 + 6x + m = 0$ (1)

Hàm số có CĐ, CT $\Leftrightarrow$ (1) có 2 nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m+2 \neq 0 \\ \Delta' > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -2 \\ 9 - 3m(m+2) > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -2 \\ -3m^2 - 6m + 9 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -2 \\ -3 < m < 1 \end{cases}$$

Vậy hàm số có CĐ, CT khi:

$-3 < m < 1$ và $m \neq -2$

2) Khảo sát hàm số ứng với m = 0

$y = 2x^3 + 3x^2 - 5$ (C)

- TXĐ: D = R

$$y' = 6x^2 + 6x$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -1 \end{array}\right.$$

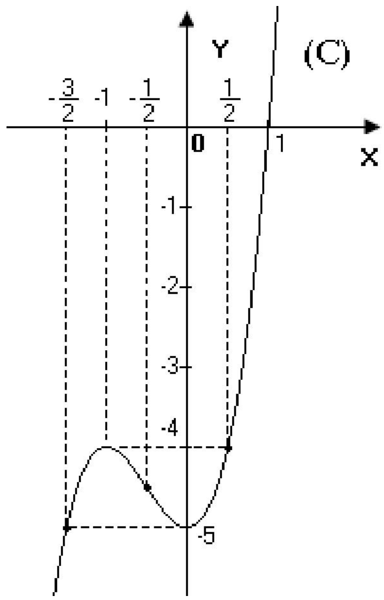
$$y'' = 12x + 6$$

$$y'' = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2} \Rightarrow y = -\frac{9}{2} \Rightarrow \text{điểm uốn } \left(-\frac{1}{2}, -\frac{9}{2}\right)$$

- BBT:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		+	0	−	0	+	
y	$-\infty$	↗	-4	↘	-5	↗	$+\infty$

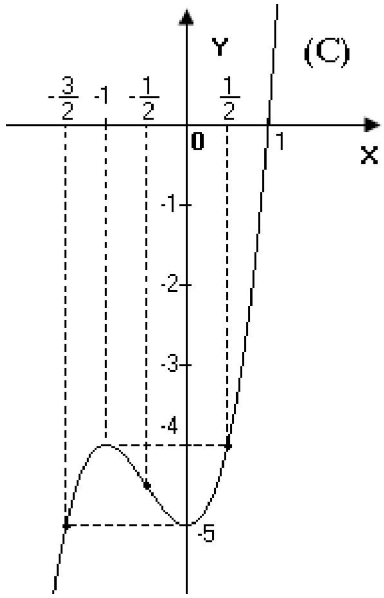
- Đồ thị :



Cho $x = \frac{1}{2}, y = -4$

$x = -\frac{3}{2}, y = -5$

$x = 1, y = 0$



3) Chứng minh rằng từ điểm A(1, -4) có 3 tiếp tuyến với đồ thị (C) : Đường thẳng (d) qua A có hệ số góc k có phương trình:

y = k(x - 1) – 4

(d) tiếp xúc với (C) $\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^3+3x^2-5=k(x-1)-4 & (1)\\ 6x^2+6x=k & (2)\end{cases}$ có nghiệm.

Thay (2) vào (1)

$$2x^3+3x^2-5=(6x^2+6x)(x-1)-4$$

$$\Leftrightarrow 2x^3+3x^2-5=6x^3-6x^2+6x^2-6x-4$$

$$\Leftrightarrow 4x^3-3x^2-6x+1=0 \qquad (3)$$

$$\Leftrightarrow (x+1)(4x^2-7x+1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1\\ x=\dfrac{7\pm\sqrt{33}}{8}\end{array}\right.$$

(3) có 3 nghiệm thay vào (2) $\Rightarrow$ 3 giá trị k

Vậy : Từ A(1, -4) có 3 tiếp tuyến với đồ thị (C)

CÂU 51:

1) Cho hàm số: $y=x^3-3(a-1)x^2+3a(a-2)x+1$

a) Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số khi a=0

$y=x^3+3x^2+1$

D = R

$y'=3x^2+6x=3x(x+2)$

$y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0\\ x=-2\end{array}\right.$

$y''=6x+6$

$y''=0 \Leftrightarrow x=-1 \Rightarrow y=3$

$\Rightarrow$ Điểm uốn (-1, 3)

- BBT:

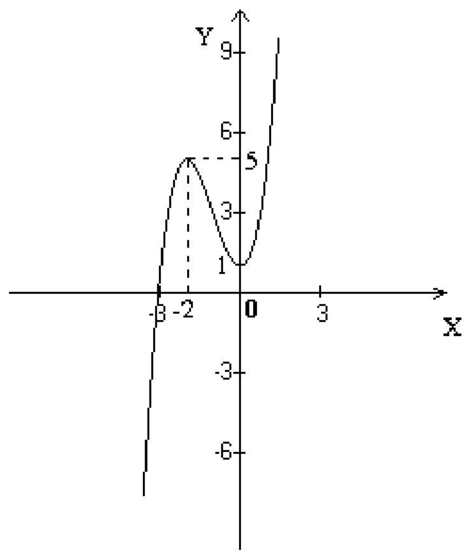
x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
y'		+	0	−	0	+	
y	$-\infty$	↗	5	↘	1	↗	$+\infty$

- Đồ thị:

Cho

$x = 1 \Rightarrow y = 5$

$x = -3 \Rightarrow y = 1$



b) Với giá trị nào của a thì hàm số đồn biến với $1 \le |x| \le 2$

Ta có:

$y = x^3 - 3(a-1)x^2 + 3a(a-2)x + 1$

$y' = 3x^2 - 6(a-1)x + 3a(a-2)$

Hàm số đồng biến với $1 \le |x| \le 2$

$\Leftrightarrow y' \ge 0$ với $1 \le |x| \le 2$

$\Leftrightarrow x^2 - 2(a-1)x + a(a-2) \ge 0$ với : $-2 \le x \le -1 \;\vee\; 1 \le x \le 2$

BXD:

x	$-\infty$		a-2		a		$+\infty$
y		+	0	-	0	+	

$y' \ge 0$ với $-2 \le x \le -1 \;\vee\; 1 \le x \le 2$

$\Leftrightarrow -1 \le a - 2 \;\vee a \le 1$

$\Leftrightarrow a \ge 1 \vee\; a \le 1 \quad \Leftrightarrow a \in \mathbb{R}$

Vậy hàm số đồng biến trong $1 \le |x| \le 2$ với mọi $a \in \mathbb{R}$

2) Tìm m để đồ thị $y = x^2 - 3x + \frac{m}{x} + 3$ có 3 điểm cực trị.

Ta có: $y' = 2x - 3 - \frac{m}{x^2}$

Hàm số có 3 cực trị $\Leftrightarrow$ y'= 0 có 3 nghiệm phân biệt.

$\Leftrightarrow 2x^3 - 3x^2 - m = 0$ có 3 nghiệm phân biệt.

Xét hàm số $g(x) = 2x^3 - 3x^2 - m$

$$\Rightarrow g'(x) = 6x^2 - 6x$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x = 0 & \Rightarrow y_{cđ} = -m \\ x = 1 & \Rightarrow y_{CT} = -(m+1) \end{array}\right.$$

g(x) = 0 có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow y_{cđ}.y_{ct} < 0$

$$\Leftrightarrow m(m+1) < 0 \quad \Leftrightarrow \ -1 < m < 0$$

Vậy đồ thị có 3 điểm cực trị khi: -1 < m < 0

Chia f(x) cho f'(x) ta được phương trình đường cong chứa 3 điểm cực trị:

$$y = f'(x)\left(\frac{1}{2}x - \frac{3}{4}\right) + \frac{3}{4} + \frac{3}{2}.\frac{m}{x} - \frac{3}{4}.\frac{m}{x^2}$$

Tọa độ các điểm cực trị thỏa hệ:

$$\begin{cases} f'(x) = 0 \\ y = \frac{3}{4} + \frac{3}{2}.\frac{m}{x} - \frac{3}{4}.\frac{m}{x^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 3 = \frac{m}{x^2} & (1) \\ y = \frac{3}{4} + \frac{3}{2}.\frac{m}{x} - \frac{3}{4}.\frac{m}{x^2} & (2) \end{cases}$$

Khử m ta có:

$$\frac{m}{x^2} = 2x - 3 \quad \Rightarrow \frac{m}{x} = 2x^2 - 3x$$

Thay vào (2) ta được :

$$y = \frac{3}{4} + \frac{3}{2}\left(2x^2 - 3x\right) - \frac{3}{4}(2x - 3)$$

$$\Leftrightarrow y = 3x^2 - 6x + 3$$

$$\Leftrightarrow y = 3(x-1)^2$$

Vậy 3 điểm cực trị ở trên đường cong có phương trình:

$$y = 3(x-1)^2$$

Câu 52:

1) Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số : $y = \frac{x^2 + x - 1}{x - 1} = x + 2 + \frac{1}{x - 1}$

- TXĐ : D = R\ $\{1\}$

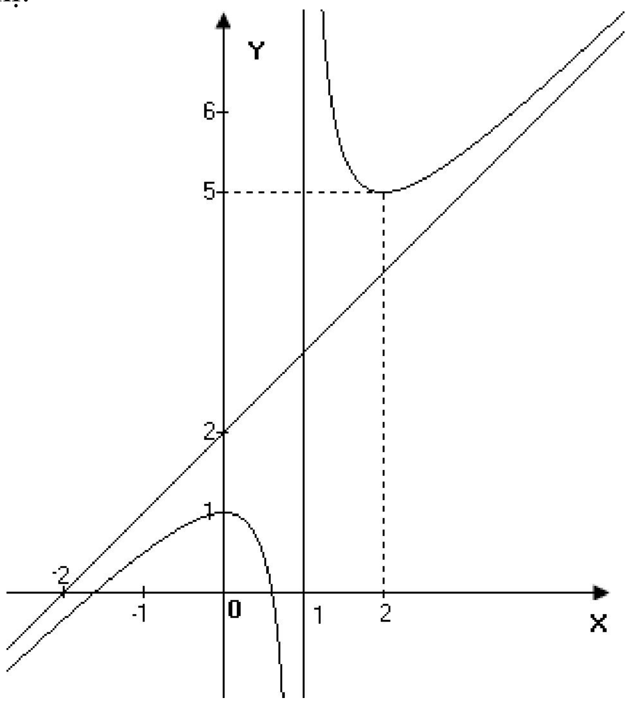
$$y' = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right.$$

- Tiệm cận đứng : x = 1 vì $\lim\limits_{x \to 1} y = \infty$
- Tiệm cận xiên : y = x + 2 vì $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x-1} = 0$
- BBT:

x	$-\infty$	0		1		2		$+\infty$
y'	+	0	-	‖	-	0	+	
y	$-\infty \nearrow$	1	$\searrow -\infty$	‖	$+\infty \searrow$	5	$\nearrow +\infty$	

- Đồ Thị:



2) Chứng minh rằng tích các khoảng cách từ 1 điểm bất kì trên (C) tới hai tiệm cận của (C) là 1 số không đổi.

Gọi M(a, b) ∈ (C) $\Leftrightarrow$ $b = a + 2 + \dfrac{1}{a - 1}$

TCĐ : x – 1 = 0

TCX : y – x – 2 = 0

Ta có: d(M, TCĐ). d(M, TCX) = $|a-1|\dfrac{|b-a-2|}{\sqrt{2}}$

$$= |a-1|\frac{1}{\sqrt{2}\,|a-1|} = \frac{1}{2} \text{ (không đổi)}$$

Câu 53:

1) Khảo sát hàm số : y = $2x^3 + 3x^2 - 12x - 1$ (C)

- TXĐ : D = R

$$y' = 6x^2 + 6x - 12$$

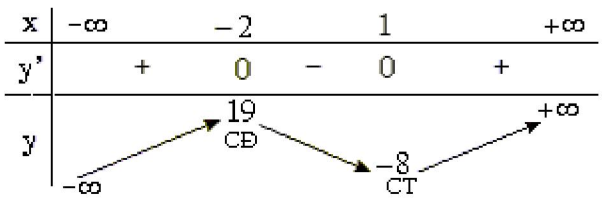
$$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -2 \end{array}\right.$$

$$y'' = 12x + 6$$

$$y'' = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2} \Rightarrow y = \frac{11}{2}$$

$\Rightarrow$ điểm uốn $\left(-\frac{1}{2}, \frac{11}{2}\right)$

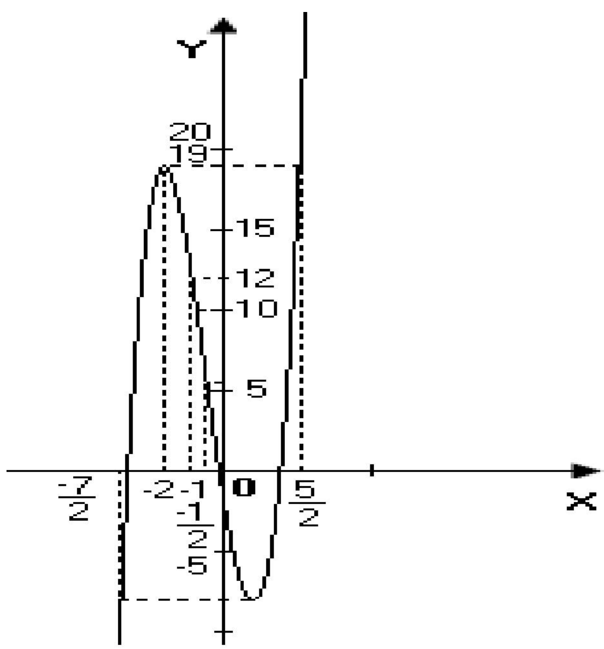
- BBT:



- Điểm đặt biệt:

$x = -\frac{7}{2}$, $y = -8$

$x = \frac{5}{2}$, $y = 19$



2) Tìm điểm M thuộc (C) sao cho tiếp tuyến của (C) tại M đi qua O. Đường thẳng (d) đi qua O và có hệ số góc k có phương trình:

$$y = kx$$

(d) tiếp xúc (C) $\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^3 + 3x^2 - 12x - 1 = kx & (1) \\ 6x^2 + 6x - 12 = k & (2) \end{cases}$ có nghiệm.

Thay (2) vào (1) :

$$2x^3+3x^2-12x-1=(6x^2+6x-12)x$$
$$\Leftrightarrow 2x^3+3x^2-12x-1=6x^3+6x^2-12x$$
$$\Leftrightarrow 4x^3+3x^2+1=0$$
$$\Leftrightarrow (x+1)(4x^2-x+1)=0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x=-1 \;\Rightarrow\; y=12 & \\ 4x^2-x+1=(& \text{(voâ nghieäm)} \end{array}\right.$$

Vậy toạ độ tiếp điểm M là: M(-1, 12).

Câu 54:

Cho hàm số: $y=\dfrac{x^2+(m-2)x+m+1}{x+1}$

1) Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số khi m = 2:

$$y=\frac{x^2+3}{x+1}=x-1+\frac{4}{x+1} \qquad (C)$$

- TXĐ: D = R\{-1}

$$y'=\frac{x^2+2x-3}{(x+1)^2}$$
$$y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-3 \end{array}\right.$$

- Tiệm cận đứng:

$$x=-1 \text{ vì } \lim_{x\to -1} y=\infty$$

- Tiệm cận xiên:

$$y = x-1 \text{ vì } \lim_{x\to\infty}\frac{4}{x+1}=0$$

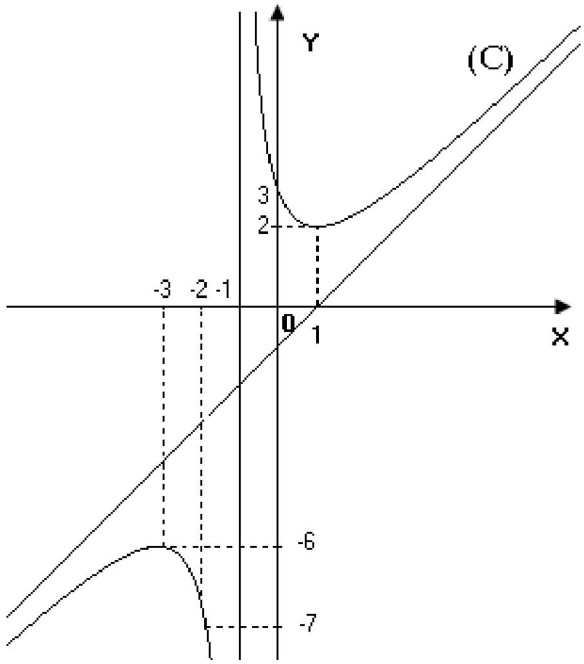
- BBT:

x	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
y'		+	0	−	||	−	0	+	
y	$-\infty$	↗	-6	↘	$-\infty$ || $+\infty$	↘	2	↗	$+\infty$

- Đồ thị:

Cho $x=0$, $y=3$

$x=-2$, $y=-7$



2) Tìm m trên đồ thị có 2 điểm A, B sao cho :

$$5x_A - y_A + 3 = 0,\ 5x_B - y_B + 3 = 0$$

Ta có: A, B $\in$ (d') : $5x - y + 3 = 0 \Leftrightarrow y = 5x + 3$

Phương trình hoành độ giao điểm của (C_m) và (d') :

$$\frac{x^2+(m-2)x+m+1}{x+1} = 5x+3$$

$$\Leftrightarrow x^2+(m-2)x+m+1 = (5x+3)(x+1)$$

$$\Leftrightarrow 4x^2-(m-10)x+2-m = 0$$

$$\Delta = (m-10)^2 - 16(2-m) = m^2 - 4m + 68 > 0, \forall m$$

Vậy (d') luôn luôn cắt (C_m) tại 2 điểm A, B với mọi m.

- Tìm m để 2 điểm A, B đối xứng với nhau qua đường thẳng (d) : $x + 5y + 9 = 0$

Ta có: (d) $\perp$ (d').

Toạ độ trung điểm I của AB:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{x_A + x_B}{2} = \dfrac{m-10}{8} \\ y_1 = 5x_1 + 3 = \dfrac{5(m-10)}{8} + 3 = \dfrac{5m-26}{8} \end{cases}$$

A và B đối xứng nhau qua (d) $\Leftrightarrow I \in (d)$

$$\Leftrightarrow \frac{m-10}{8} + \frac{5(5m-26)}{8} + 9 = 0$$

$$\Leftrightarrow 26m - 68 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{68}{26} = \frac{34}{13}$$

Vậy : $m = \dfrac{34}{13}$

Câu 55:

1) Khảo sát hàm số: $y = x^3 - 2x^2 + x$ (C)

- TXĐ : D = R

$$y' = 3x^2 - 4x + 1$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = \dfrac{1}{3} \end{array}\right.$$

$$y'' = 6x - 4$$

$$y'' = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2}{3} \Rightarrow y = \frac{2}{27} \Rightarrow \text{ điểm uốn } \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{27}\right)$$

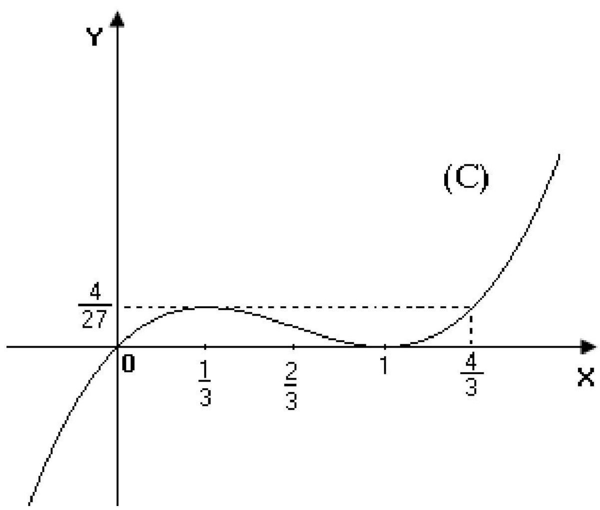
- BBT:

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		1		$+\infty$
y'		+	0	−	0	+	
y	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{4}{27}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

- Điểm đặc biệt:

Cho x = 0, y = 0

$$x = \frac{4}{3}, y = \frac{4}{27}$$



2) Tìm diện tích giới hạn bởi (C) và đường thẳng y = 4x.

Phương trình hoành độ giao điểm :

$$x^3 - 2x^2 + x = 4x$$

$$\Leftrightarrow x^3 - 2x^2 - 3x = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x^2 - 2x - 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -1 \\ x = 3 \end{array}\right.$$

Diện tích hình phẳng cho bởi:

$$S=\int_{-1}^{0}(x^3-2x^2+x-4x)dx+\int_{0}^{3}(4x-x^3+2x^2-x)dx$$

$$=\left(\frac{x^4}{4}-\frac{2x^3}{3}-\frac{3x^2}{2}\right)\Bigg|_{-1}^{0}+\left(-\frac{x^4}{4}+\frac{2x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}\right)\Bigg|_{0}^{3}$$

$$=\frac{7}{12}+\frac{45}{4}=\frac{71}{6}(dvdt)$$

Câu 56:

Cho hàm số : $y=\dfrac{-2x^2-3x+m}{2x+1}$

a) Với giá trị nào của m thì hàm số nghịch biến trong khoảng $\left(-\frac{1}{2},+\infty\right)$.

Ta có : $y'=\dfrac{-4x^2-4x-3-2m}{(2x+1)^2}$

Hàm số nghịch biến trong : $\left(-\frac{1}{2},+\infty\right)\Leftrightarrow y'\le 0,\forall x\in\left(-\frac{1}{2},+\infty\right)$

$\Leftrightarrow -4x^2-4x-3-2m\le 0,\Delta x\in\left(-\frac{1}{2},+\infty\right)$

$\Leftrightarrow \Delta'\le 0 \Leftrightarrow 4-4(3+2m)\le 0$

$\Leftrightarrow m\ge -1$

b) Khảo sát hàm số khi m = 1

$$y=\frac{-2x^2-3x+1}{2x+1}$$

- TXĐ: D = R\ $\left\{-\frac{1}{2}\right\}$

$$y'=\frac{-4x^2-4x-5}{(2x+1)^2}<0,\forall x\ne\frac{1}{2}$$

$\Rightarrow$ Hàm số nghịch biến trong từng khoảng xác định.

- Tiệm cận đứng:

$$x=-\frac{1}{2}\quad \text{vì}\quad \lim_{x\to-\frac{1}{2}}y=\infty$$

Ta có: $y=-x-1+\dfrac{2}{2x+1}$

- Tiệm cận xiên :

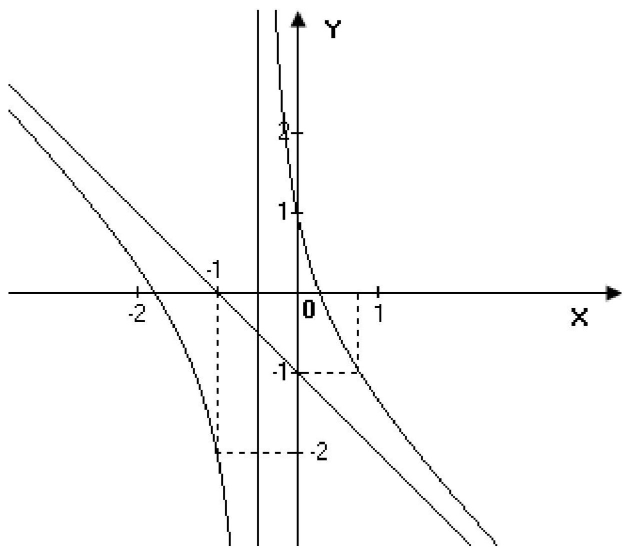
$$y=-x-1\quad \text{vì}\quad \lim_{x\to\infty}\frac{2}{2x+1}=0$$

- BBT:

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
y'		$-$	||	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$ $-\infty$	||	$+\infty$ $\searrow$	$-\infty$

- Điểm đặt biệt:

x	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	1
y	$\frac{1}{3}$	-2	||	1	$-\frac{4}{3}$



Câu 57:

Cho hàm số $y = mx^3 - 3mx^2 + 2(m - 1)x + 2$

1) Tìm những điểm cố định mà mọi đường cong của họ trên đều đi qua.

Ta có thể viết : $m(x^3 - 3x^2 + 2x) + 2 - 2x - y = 0$ (1)

Điểm cố định A(x, y) thoả (1), $\forall$m.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 3x^2 + 2x = 0 \\ 2 - 2x - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x^2 - 3x + 2) = 0 \\ y = -2x + 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ , } y = 2 \\ x = 1 \text{ , } y = 0 \\ x = 2 \text{ , } y = -2 \end{cases}$$

Vậy họ đường cong luôn đi qua 3 điểm cố định :

A(0, 2), B(1, 0), C(2, - 2)

2) Chứng tỏ rằng những điểm cố định đó thẳng hàng. Từ đó suy ra họ đường cong có 1 tâm đối xứng.

Toạ độ 3 điểm A, B, C thoả phương trình $y = -2x + 2$ nên 3 điểm A, B, C thẳng hàng vì A và C đối xứng qua B nên họ đường cong có chung 1 tâm đối xứng là B(1, 0).

3) Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số ứng với m = 1:

$$y = x^3 - 3x^2 + 2 \qquad (C)$$

- TXĐ : D = R

$$y' = 3x^2 - 6x$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right.$$

$$y'' = 6x - 6$$

$$y'' = 0 \Leftrightarrow x = 1 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow \text{điểm uốn } (1, 0)$$

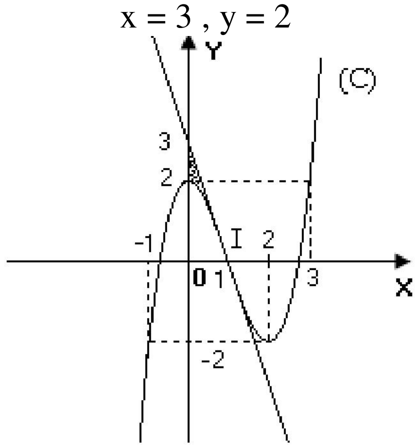
-BBT

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		+	0	−	0	+	
y	$-\infty$	↗	2	↘	-2	↗	$+\infty$

- Đồ thị :

Cho $x = -1$, $y = -2$

$x = 3$, $y = 2$



4) Viết phương trình tiếp tuyến với (C) tại điểm uốn và chứng tỏ rằng trong các tiếp tuyến của (C) thì tiếp tuyến này có hệ số góc nhỏ nhất.

Ta có điểm uốn I(1, 0) $\Rightarrow$ phương trình tiếp tuyến của (C) tại I:

$$y = f'(1).(x - 1) \Leftrightarrow y = -3(x - 1)$$

$$\Leftrightarrow y = -3x + 3$$

Ta có hệ số góc các tiếp tuyến là:

$$y' = 3x^2 - 6x$$

$$\Rightarrow y = 6x - 6$$

$$y'' = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

BXĐ:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y''		−	0	+	
y'		↘	-3	↗	

$\Rightarrow$ min $y' = -3$ tại $x = 1$

Vậy hệ số góc của tiếp tuyến tại điểm uốn I nhỏ nhất.

5) Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C) tiếp tuyến tại điểm uốn và trục Oy.
Diện tích hình phẳng là :

$$S = \int_0^1 \left[(-3x+3)-(x^3-3x^2+2)\right]dx = \left(-\frac{x^4}{4}+x^3-\frac{3x^2}{2}+x\right]_0^1$$

$$\Rightarrow S = \frac{1}{4} \text{ (đvdt)}$$

Câu 58:

Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3(m^2 - 1)x + 2$

1) Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số khi m = 1

$$y = x^3 - 3x^2 + 2$$

- TXĐ: D = R

$$y' = 3x^2 - 6x$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right.$$

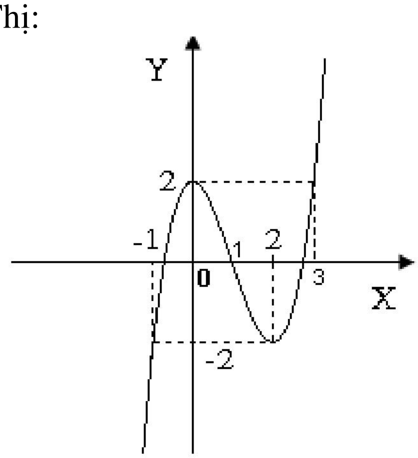
$$y'' = 6x - 6$$

$y'' = 0 \Leftrightarrow x = 1 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow$ điểm uốn (1, 0)

- BBT:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		+	0	−	0	+	
y	$-\infty$	↗	2	↘	−2	↗	$+\infty$

- Đồ Thị:



2) Tìm m để đồ thị hàm số đã cho có điểm CĐ và điểm CT đồng thời các điểm CĐ và điểm CT nằm về 2 phía đối với trục tung.

Ta có: $y = x^3 - 3mx^2 + 3(m^2 - 1)x + 2$

$y' = 3x^2 - 6mx + 3(m^2 - 1)$

$y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2mx + m^2 - 1 = 0$ (1)

Hàm số có điểm CĐ và điểm CT ở hai bên Oy

$\Leftrightarrow$ (1) có hai nghiệm x_1, x_2 sao cho : $x_1 < 0 < x_2$

$\Leftrightarrow P < 0 \Leftrightarrow m^2 - 1 < 0 \Leftrightarrow -1 < m < 1$

Vậy -1< m < 1.

Câu 59:

1) Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số:

$$y = \frac{x^2+3}{x+1} \qquad (1)$$

- TXD: D = R \{1}

  $$y' = \frac{x^2+2x-3}{(x+1)^2}$$

  $$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -3 \end{array}\right.$$

- Tiệm cận đứng:

  x = -1 vì $\lim\limits_{x\to -1} y = \infty$

  Ta có: $y = x - 1 + \dfrac{4}{x+1}$

- Tiệm cân xiên:

  y = x – 1 vì $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4}{x+1} = 0$

- BBT:

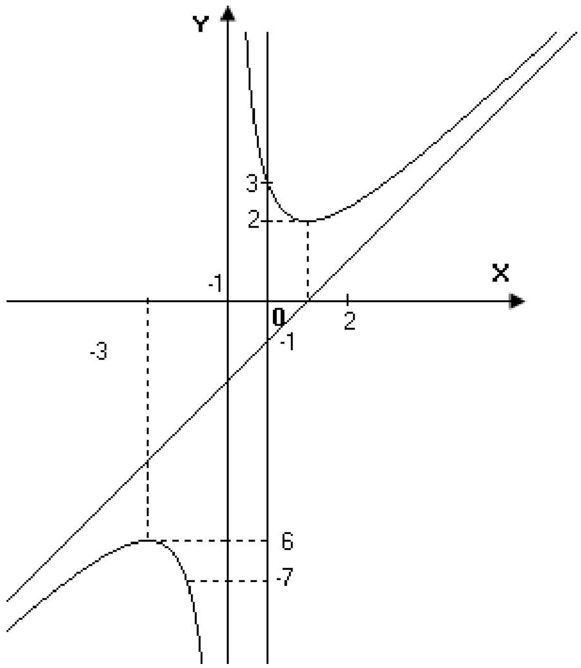
x	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
y'		+	0	−	‖	−	0	+	
y	$-\infty$	↗	-6 CĐ	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	CT 2	↗	$+\infty$

- Đồ thị

  Cho x = 0 $\Rightarrow$ y = 3

  x = -2 $\Rightarrow$ y = – 7

- Đồ thị:



2) Viết phương trình đường thẳng (d) đi qua điểm $M(2,\frac{2}{5})$ sao cho (d) cắt đồ thị hàm số (1) tại hai điểm A, B và M là trung điểm AB.

Đường thẳng (d) qua $M(2,\frac{2}{5})$ và có hệ số góc k:

$$y = k(x-2) + \frac{2}{5}$$

Phương trình hoành độ giao điểm của (1) và (d):

$$\frac{x^2+3}{x+1} = k(x-2) + \frac{2}{5}$$

$$\Leftrightarrow 5(x^2+3)x^2 = 5k(x-2)(x+1) + 2(x+1) \qquad x \neq 0$$

$$\Leftrightarrow 5(1-k)x^2 + (5k-2)x + 10k + 13 = 0$$

Đường thẳng (d) cắt đồ thị (1) tại 2 điểm A, B sao cho M là trung điểm của AB.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1-k \neq 0 \\ \Delta > 0 \\ x_A + x_B = 2x_M \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k \neq 1 \\ \Delta = (5k-2)^2 - 20(1-k)(10k+13) > 0 \\ \dfrac{2-5k}{5(1-k)} = 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k \neq 1 \\ \Delta = 4^2 - 20\left(-\dfrac{1}{5}\right)(25) > 0 \Leftrightarrow k = \dfrac{6}{5} \\ k = \dfrac{6}{5} \end{cases}$$

Vậy phương trình đường thẳng (d) là:

$$y = \frac{6}{5}(x-2) + \frac{2}{5}$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{6}{5}x - 2$$

Câu 60:

Cho hàm số: $y = x^2 - 3x^2 + m^2 x + m$

1) Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số ứng với m = 0.

$$y = x^3 - 3x^2$$

- TXD: D = R

  y’ = $3x^2$- 6x

  $$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right.$$

  y’’= 6x – 6

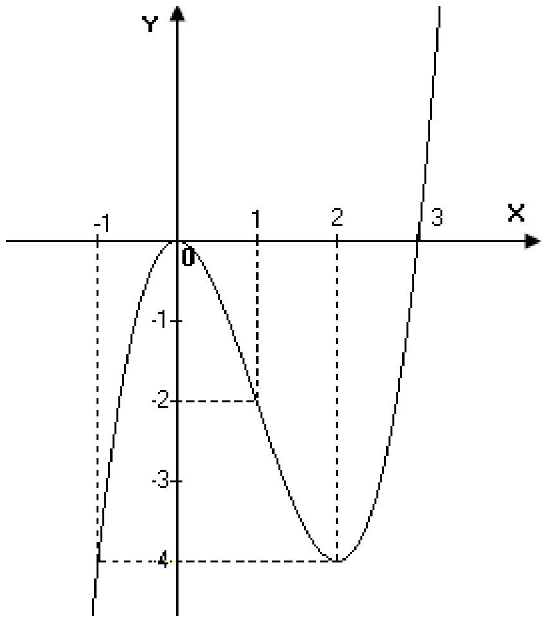
  y’’= 0 $\Rightarrow$ x = 1$\Rightarrow$ y = -2

  $\Rightarrow$ điểm uốn I(1, -2)

- BBT:

x	- ∞		0		2		+ ∞
y'		+	0	-	0	+	
y	- ∞	↗	0	↘	-4	↗	+ ∞

- Đồ thị:



2) Tìm m để hàm số có cực đại, cực tiểu và các điểm CĐ và CT đối xứng nhau qua đường thẳng $y = \frac{1}{2}x - \frac{5}{2}$

Ta có: $y = x^3 - 3x^2 + m^2x + m$

$y' = 3x^2 - 6x + m^2$

$y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x + m^2 = 0$ (1)

Hàm số có cực đại, cực tiểu $\Leftrightarrow$ (1) có hai nghiệm phân biệt.

$\Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow 9 - 3m^2 > 0$

$\Leftrightarrow -\sqrt{3} < m < \sqrt{3}$

Gọi $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ là điểm CĐ, điểm CT của đồ thị.

M_1, M_2 đối xứng qua (d): $y = \frac{1}{2}x - \frac{5}{2}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{Trung điểm I của } M_1M_2 \in (d) \\ M_1M_2 \perp (d) \end{cases}$$

- Chia f(x) cho f'(x) ta được phương trình đường thẳng M_1M_2:

$$y = f'(x)\left(\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{2}{3}m^2 - 2\right)x + \frac{1}{3}m^2 + m$$

$$\Rightarrow (M_1M_2): y = \left(\frac{2}{3}m^2 - 2\right)x + \frac{1}{3}m^2 + m$$

- Trung điểm I của M_1M_2 là điểm uốn của đồ thị:

Ta có: $y'' = 6x - 6$

$y' = 0 \Leftrightarrow x = 1 \Rightarrow y = m^2 + m - 2 \Rightarrow I(1, m^2 + m - 2)$

Ta có:

$$\begin{cases} M_1 M_2 \\ I \in (d) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\dfrac{2}{3}m^2 - 2\right).\dfrac{1}{2} = -1 \\ m^2 + m - 2 = \dfrac{1}{2} - \dfrac{5}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} m = 0 \\ m^2 + m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = 0 \vee m = -1 \end{cases} \Leftrightarrow m = 0$$

So với điều kiện: $-\sqrt{3} < m < \sqrt{3}$ nhận m = 0.

ĐS: m = 0

Câu 61:

1) Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số:

$$y = \frac{-x^2 + x + 1}{x - 1} \qquad (C)$$

- TXD: $D = R\backslash\{1\}$

$$y' = \frac{-x^2 + 2x - 2}{(x-1)^2} < 0, \ \forall x \neq 1$$

$\Rightarrow$ Hàm số giảm trong từng khoảng xác định.

- Tiệm cận đứng:

  x = 1 vì $\lim\limits_{x \to 1} y = \infty$

  Chia tử cho mẫu: $y = -x + \dfrac{1}{x-1}$

- Tiệm cận xiên:

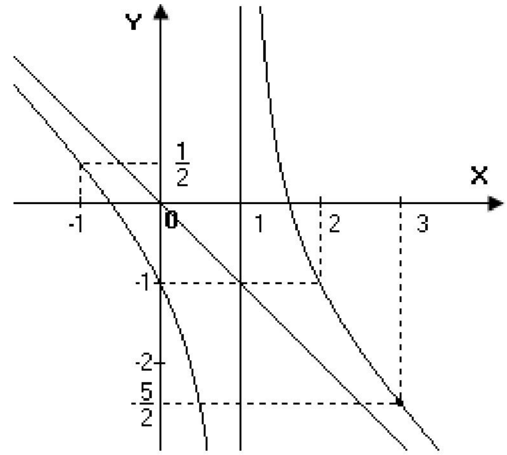
  Ta có: y = - x vì $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1}{x-1}$

- BBT:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		−	‖	−	
y	$+\infty$ ↘	$-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	$-\infty$

- Đồ thị:

x	-1	0	1	2	3
y	$\frac{1}{2}$	-1	‖	-1	$-\frac{5}{2}$



2) Chứng minh rằng ∀ đường thẳng y = m cắt (C) tại 2 điểm phân biệt A, B. Xác định m để độ dài đoạn AB ngắn nhất.

Phương trình hoành độ giao điểm:

$$\frac{-x^2+x+1}{x-1}=m$$

$$\Leftrightarrow -x^2+x+1=mx-m$$

$$\Leftrightarrow x^2+(m-1)x-m-1=0$$

$$\Delta=(m-1)^2+4(m+1)=m^2+2m+5$$

$$=(m+1)^2+4>0,\quad \forall m$$

⇒ Đường thẳng (d) cắt (C) tại 2 điểm phân biệt A, B, ∀m.

Ta có:

$$AB^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_2)^2=(x_2-x_1)^2+0$$

$$=x_2^2+x_1^2-2x_1x_2$$

$$=S^2\text{-2P-2P=}S^2\text{-4P}$$

Mà:

$$S=-\frac{b}{a}=-m+1$$

$$P=\frac{c}{a}=-m-1$$

$$\Rightarrow AB^2=(-m+1)^2+4(m+1)=m^2+2m+5$$

$$\Rightarrow AB^2=(m+1)^2+4$$

$$\Rightarrow AB=\sqrt{(m+1)^2+4}$$

$$\Rightarrow \text{Min}(AB)=2 \text{ khi } m+1=0 \Leftrightarrow m=-1$$

Câu 62:

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số:

$$y=\frac{x^2}{x-1}\quad (C)$$

- TXĐ: D = R\{1}

$$y' = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$$

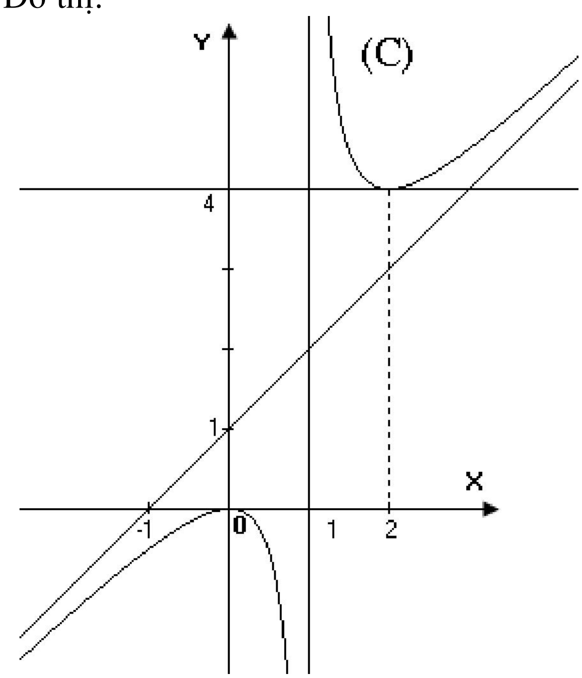
$$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right.$$

- Tiệm cận đứng:
  $x = 1$ vì $\lim\limits_{x \to 1} y = \infty$

  Ta có: $y = x + 1 + \dfrac{1}{x-1}$
- Tiệm cận xiên:
  $y = x + 1$ vì $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1}{x-1} = 0$
- BBT:

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
y'		+	0	−	‖	−	0	+	
y	$-\infty$	↗	0	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	4	↗	$+\infty$

- Đồ thị:



2) Tìm trên đường thẳng y = 4 tất cả các điểm mà từ mỗi điểm đó có thể kẻ tới (C) 2 tiếp tuyến lập với nhau 1 góc 45^0.

- Gọi M(a, 4) $\in$ đường thẳng y = 4, ta có đường thẳng y = 4 là tiếp tuyến kẻ từ M đến (C) và song song Ox $\Rightarrow$ tiếp tuyến thứ hai tạo với Ox 1 góc bằng $\pm 45^0$

$\Rightarrow$ Hệ số góc tiếp tuyến tại $M_0(x_0, y_0) \in (C)$ là $f'(x_0) = \pm 1$

$$f'(x_0)=1 \Leftrightarrow \frac{x_0^2-2x_0}{(x_0-1)^2}=1 \quad \text{(vô nghiệm)}$$

$$f'(x_0)=-1 \Leftrightarrow \frac{x_0^2-2x_0}{(x_0-1)^2}=-1$$

$$\Leftrightarrow 2x_0^2-4x_0+1=0 \left[\begin{array}{l} x_0=1+\frac{\sqrt{2}}{2} \\ x_0=1-\frac{\sqrt{2}}{2}\end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} y_0=2+\frac{3\sqrt{2}}{2} \\ y_0=2-\frac{3\sqrt{2}}{2}\end{array}\right.$$

Phương trình tiếp tuyến tại M_0 là:

$$y=-(x+x_0)+y_0$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ll} y=-x+3+2\sqrt{2} & (d_1) \\ y=-x+3-2\sqrt{2} & (d_2)\end{array}\right.$$

(d_1) qua M(a, 4) $\Rightarrow$ $4=-a+3+2\sqrt{2} \Leftrightarrow a=-1+2\sqrt{2}$

(d_2) qua M(a, 4) $\Rightarrow$ $4=-a+3-2\sqrt{2} \Leftrightarrow a=-1-2\sqrt{2}$

Vậy có 2 điểm M thỏa điều kiện của bài toán.

$$M_1(-1+2\sqrt{2},4);\ M_2(-1-2\sqrt{2},4)$$

CÂU 63:

Cho hàm số $y=2x^3+3(m-3)x^2+11-3m \quad (C_m)$

1. Cho m=2. Tìm phương trình các đường thẳng qua $A(\frac{9}{12},4)$ và tiếp xúc với (C_2).

Với m=2: $y=2x^3-3x^2+5$ (C_2).

Đường thẳng (d) qua A và có hệ số góc k:

$$y=k(x-\frac{19}{12})+4$$

(d) tiếp xúc (C_2) $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} 2x^3-3x^2+5=k(x-\frac{19}{12})+4 & (1) \\ 6x^2-6x=k & (2)\end{cases}$

có nghiệm.

Thay (2) vào (1):

$$2x^3 - 3x^2 + 5 = (6x^2 - 6x)(x - \frac{19}{12}) + 4$$

$$\Leftrightarrow 8x^3 - 25x^2 + 19x - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(8x^2 - 17x + 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \Leftrightarrow k = 0 \\ x = 2 \Leftrightarrow k = 12 \\ x = \frac{1}{8} \Leftrightarrow k = -\frac{21}{32} \end{array}\right.$$

Vậy phương trình đường thẳng qua A và tiếp xúc với (C_2) là:

y=4 hay y=12x - 15 hay $y = -\frac{21}{32}x + \frac{645}{128}$

2. Tìm m để hàm số có 2 cực trị.

Ta có: $y = 2x^3 + 3(m-3)x^2 + 11 - 3m$

$$y' = 6x^2 + 6(m-3)$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow 6x^2 + 6(m-3) = 0 \quad (1)$$

$$(1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 3 - m \end{array}\right.$$

Hàm số có 2 cực trị $\Leftrightarrow$ (1) có 2 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow m - 3 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 3$.

Tìm m để 2 điểm cực trị M_1, M_2 và B(0, -1) thẳng hàng.

Để tìm phương trình đường thẳng qua 2 điểm cực trị M_1, M_2 ta chia f(x) cho $f'(x)$:

$$f(x) = f'(x)\left(\frac{1}{3}x + \frac{m-3}{6}\right) - (m-3)^2 x + 11 - 3m$$

Suy ra phương trình đường thẳng M_1M_2 là:

$$y = -(m-3)^2 x + 11 - 3m$$

M_1, M_2, B thẳng hàng $\Leftrightarrow B \in M_1M_2$

$\Leftrightarrow$ -1=11-3m $\Leftrightarrow$ m= 4

So với điều kiện m$\neq$3 nhận m= 4

ĐS:m=4

Câu 64:

1) a. Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số: $y = \frac{1}{3}x^3 - x + \frac{2}{3}$ (C)

- TXĐ: D = R

$$y' = x^2 - 1$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 1 \end{array}\right.$$

$$y'' = 2x$$

$y''=0 \Leftrightarrow x=0 \Rightarrow y=\frac{2}{3} \Rightarrow$ Điểm uốn $\left(0,\frac{2}{3}\right)$

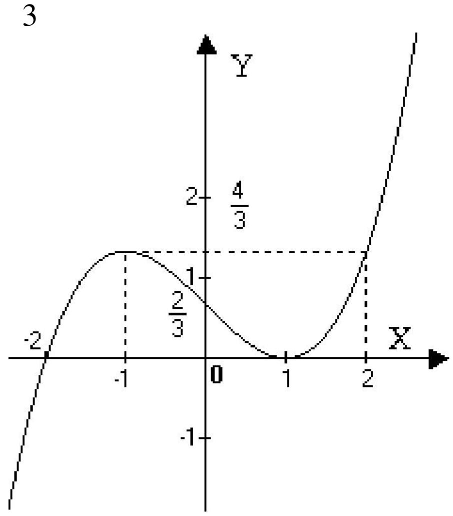
- BBT:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		+	0	−	0	+	
y	$-\infty$	↗	$\frac{4}{3}$ CĐ	↘	0 CT	↗	$+\infty$

- Đồ thị:

Cho $x=-2, y=0$

$x=2, y=\frac{4}{3}$



b. Tìm điểm trên (C) tại đó tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng

$y=-\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}$ (d)

Gọi $M_0(x_0,y_0)\in(C) \Rightarrow$ hệ số góc tiếp tuyến tại M_0 là: $f'(x_0)=x_0^2-1$

Tiếp tuyến tại M_0 vuông góc (d) $\Leftrightarrow f'(x_0)=-\frac{1}{k_d}$

$\Leftrightarrow x_0^2-1=3 \Leftrightarrow x_0^2=4 \Leftrightarrow x_0=\pm 2$

$x_0=2 \Rightarrow y_0=\frac{4}{3}$

$x_0=-2 \Rightarrow y_0=0$

Vậy có 2 điểm M: $M_0(-2,0)$ và $M_1(2,\frac{4}{3})$

2) $I=\int_0^1 (1-x-x^2)^2.dx$

$$= \int_0^1 (1 + x^2 + x^4 - 2x - 2x^2 + 2x^3)dx$$

$$= \int_0^1 (x^4 + 2x^3 - x^2 - 2x + 1)dx$$

$$= \frac{x^5}{5} + \frac{1}{2}x^4 - \frac{x^3}{3} - x^2 + x\Big|_0^1$$

$$= \frac{1}{5} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - 1 + 1 = \frac{11}{30}$$