HÀM SỐ
☯1. TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ

Dạng 1: ***Tính đơn điệu của hàm số***

I. Kiến thức cơ bản

1. Định nghĩa

Giả sử hàm số y = f(x) xác định trên K:

+ Hàm số y = f(x) được gọi đồng biến trên khoảng K nếu:

$$\forall x_1, x_2 \in K, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

+ Hàm số y = f(x) được gọi là nghịch biến trên khoảng K nếu:

$$\forall x_1, x_2 \in K, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

2. Qui tắc xét tính đơn điệu

a. Định lí

Cho hàm số y = f(x) có đạo hàm trên K:

+ Nếu f'(x) > 0 với mọi x thuộc K thì hàm số đồng biến

+ Nếu f'(x) < 0 với mọi x thuộc K thì hàm số nghịch biến

b. Qui tắc

B1: Tìm tập xác định của hàm số

B2: Tính đạo hàm của hàm số. Tìm các điểm x_i (i = 1, 2,…,n) mà tại đó đạo hàm bằng 0 hoặc không xác định.

B3: Sắp xếp các điểm x_i theo thứ tự tăng dần và lập bảng biến thiên.

B4: Nêu kết luận về các khoảng đồng biến, nghịch biến.

II. Các ví dụ

Loại 1: Xét sự biến thiên của hàm số

Ví dụ 1. Xét sự đồng biến và nghịc biến của hàm số:

$a.\ y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x + 2$ b. $y = -x^2 + 3x + 4$ e. $y = \sqrt{x}(x-3),\ (x > 0)$

c. $y = x^4 - 2x^2 + 3$ $d.\ y = \frac{x - 1}{x + 1}$

Ví dụ 2. Xét sự biến thiên của các hàm số sau:

$a.\ y = 3x^2 - 8x^3$ b. $y = x^4 + 8x^2 + 5$ c. $y = x^3 - 6x^2 + 9x$

$d.\ y = \frac{3 - 2x}{x + 7}$ e. $y = \frac{x^2 - 2x + 3}{x + 1}$ f. $y = \sqrt{25 - x^2}$

Loại 2: Chứng minh hàm số đồng biến hoặc nghịch biến trên khoảng xác định.

Phương pháp

+ Dựa vào định lí.

Ví dụ 3.

Chứng minh hàm số $y = \sqrt{2x - x^2}$ nghịch biến trên đoạn [1; 2]

Ví dụ 4

a. Chứng minh hàm số $y = \sqrt{x^2 - 9}$ đồng biến trên nửa khoảng [3; $+\infty$).

b. Hàm số $y = x + \frac{4}{x}$ nghịc biến trên mỗi nửa khoảng [-2; 0) và (0;2]

Ví dụ 5. Chứng minh rằng

a. Hàm số $y = \frac{3 - x}{2x + 1}$ nghịch biến trên mỗi khoảng xác định của nó.

b. Hàm số $y = \frac{2x^2 + 3x}{2x + 1}$ đồng biến trên mỗi khoảng xác định của nó.

c. Hàm số $y = -x + \sqrt{x^2 + 8}$ nghịch biến trên R.

Dạng 2. Tìm giá trị của tham số để một hàm số cho trước đồng biến, nghịch biến trên khoảng xác định cho trước
Phương pháp:

+ Sử dụng qui tắc xét tính đơn điêu của hàm số.
+ Sử dụng định lí dấu của tam thức bậc hai

Ví dụ 6.

Tìm giá trị của tham số a để hàm số $f(x)=\frac{1}{3}x^3+ax^2+4x+3$ đồng biến trên R.

Ví dụ 7.

Tìm m để hàm số $f(x)=\frac{x^2+5x+m^2+6}{x+3}$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$

Ví dụ 8. Với giá trị nào của m, hàm số: $y=x+2+\frac{m}{x-1}$ đồng biến trên mỗi khoảng xác định của nó.

Ví dụ 9

Xác định m để hàm số $y=-\frac{x^3}{3}+(m-1)x^2+(m+3)x$ đồng biến trên khoảng (0; 3)

Ví dụ 10

Cho hàm số $y=\frac{mx+4}{x+m}$

a. Tìm m để hàm số tăng trên từng khoảng xác định
b. Tìm m để hàm số tăng trên $(2;+\infty)$
c. Tìm m để hàm số giảm trên $(-\infty;1)$

Ví dụ 11

Cho hàm số $y=x^3-3(2m+1)x^2+(12m+5)x+2$. Tìm m để hàm số:

a. Liên tục trên R
b. Tăng trên khoảng $(2;+\infty)$

Ví dụ 12 (ĐH KTQD 1997)

Cho hàm số $y=x^3-ax^2-(2a^2-7a+7)x+2(a-1)(2a-3)$ đồng biến trên [2:+∞)

Dạng 3. Sử dụng chiều biến thiên để chứng minh BĐT
Phương pháp
Sử dụng các kiến thức sau:

+ Dấu hiệu để hàm số đơn điệu trên một đoạn.
+ f (x) đồng biến trên [a; b] thì $f(a)\le f(x)\le f()$
+ f(x) nghịch biến trên [a; b] thì $f(a)\ge f(x)\ge f(b)$

Ví dụ 1. Chứng minh các bất đẳng thức sau:

a. tanx > sinx, $0< x <\frac{\pi}{2}$

b. $1+\frac{1}{2}x-\frac{x^2}{8}<\sqrt{1+x}<1+\frac{1}{2}x,\ 0 < x < +\infty$

c. $\cos x > 1-\frac{x^2}{2}, x\neq 0$

d. $\sin x > x-\frac{x^3}{6},\ x > 0$

Ví dụ 2.
Chohàm số f(x) = 2sinx + tanx – 3x

a. Chứng minh rằng hàm số đồng biến trên nửa khoảng $\left[0;\frac{\pi}{2}\right)$
b. Chứng minh rằng $2\sin x+\tan x>3x, \forall x\in(0;\frac{\pi}{2})$

Ví dụ 3
Cho hàm số $f(x)=\tan x - x$

a.Chứng minh hàm số đồng biến trên nửa khoảng $\left[0;\frac{\pi}{2}\right)$

b. Chứng minh $\tan x > x + \frac{x^3}{3}, \forall x \in (0;\frac{\pi}{2})$

Ví dụ 3

Cho hàm số $f(x) = \frac{4}{\pi}x - \tan x,\ x \in [0;\ \frac{\pi}{4}]$

a. Xét chiều biến thiên của hàm số trên $[0;\ \frac{\pi}{4}]$

b. Chứng minh rằng $\tan x \le \frac{4}{\pi}x, \forall x \in [0;\frac{\pi}{4}]$

❷ CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

Dạng 1. Tìm cực trị của hàm số

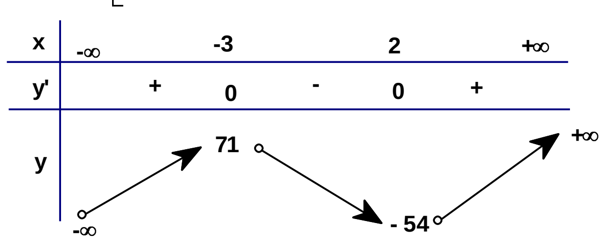
Phương pháp:

Dựa vào 2 qui tắc để tìm cực trị của hàm số y = f(x)

Qui tắc I.	Qui tắc II.
B1: Tìm tập xác định. B2: Tính f'(x). Tìm các điểm tại đó f'(x) = 0 hoặc f'(x) không xác định. B3. Lập bảng biến thiên. B4: Từ bảng biến thiên suy ra các cực trị	B1: Tìm tập xác định. B2: Tính f'(x). Giải phương trình f'(x) = 0 và kí hiệu là x_i là các nghiệm của nó. B3: Tính f''(x_i) B4: Dựa vào dấu của f'' (x_i) suy ra cực trị (f''(x_i) > 0 thì hàm số có cực tiểu tại x_i; (f''(x_i) < 0 thì hàm số có cực đại tại x_i)

* Chú ý: Qui tắc 2 thường dùng với hàm số lượng giác hoặc việc giải phương trình f'(x) = 0 phức tạp.

Ví dụ 1. Tìm cực trị của hàm số $y = 2x^3 + 3x^2 - 36x - 10$

Qui tắc I.	Qui tắc II
TXĐ: R $y' = 6x^2 + 6x - 36$ $y' = 0 \Leftrightarrow 6x^2 + 6x - 36 = 0$ $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = -3 \end{array}\right.$  Vậy x = -3 là điểm cực đại và $y_{cđ}$ =71 x= 2 là điểm cực tiểu và y_{ct} = - 54	TXĐ: R $y' = 6x^2 + 6x - 36$ $y' = 0 \Leftrightarrow 6x^2 + 6x - 36 = 0$ $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = -3 \end{array}\right.$ y''= 12x + 6 y''(2) = 30 > 0 nên hàm số đạt cực tiểu tại x = 2 và y_{ct} = - 54 y''(-3) = -30 < 0 nên hàm số đạt cực đại tại x = -3 và $y_{cđ}$ =71

Bài1. Tìm cực trị của các hàm số sau:

a. $y = 10 + 15x + 6x^2 - x^3$ b. $y = x^4 - 8x^3 + 432$

c. $y = x^3 - 3x^2 - 24x + 7$ d. $y = x^4 - 5x^2 + 4$

e. $y = -5x^3 + 3x^2 - 4x + 5$ f. $y = -x^3 - 5x$

Bài 2. Tìm cực trị của các hàm số sau:

a. $y = \dfrac{x+1}{x^2+8}$ b. $y = \dfrac{x^2+x-5}{x+1}$ c. $y = \dfrac{(x-4)^2}{x^2-2x+5}$

d. $y = x - 3 + \dfrac{9}{x-2}$ e. $y = \dfrac{x^2-3x+3}{x-1}$ f. $y = \dfrac{x}{x^2+4}$

Bài 3. Tìm cực trị các hàm số

a. $y = x\sqrt{4-x^2}$ b. $y = \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}$ c. $y = \dfrac{5-3x}{\sqrt{1-x^2}}$

d. $y = \dfrac{x}{\sqrt{10-x^2}}$ e. $y = \dfrac{x^3}{\sqrt{x^2-6}}$ f. $y = x\sqrt{3-x}$

Bài 4. Tìm cực trị các hàm số:

a. $y = x - \sin 2x + 2$ b. $y = 3 - 2\cos x - \cos 2x$ c. $y = \sin x + \cos x$

d. $y = \sin 2x$ e. $y = \cos x + \dfrac{1}{2}\cos 2x$ f. $y = 2\sin x + \cos 2x$ với $x \in [0; \pi]$

Dạng 2. Xác lập hàm số khi biết cực trị

Để tìm điều kiện sao cho hàm số y = f(x) đạt cực trị tại x = a

B1: Tính y' = f'(x)

B2: Giải phương trình f'(a) = 0 tìm được m

B3: Thử lại giá trị a có thoả mãn điều kiện đã nêu không (vì hàm số đạt cực trị tại a thì f'(a) = 0 không kể CĐ hay CT)

Ví dụ 1. Tìm m để hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + (m-1)x + 2$ đạt cực tiểu tại x = 2

LG

$y' = 3x^2 - 6mx + m - 1$.

Hàm số đạt cực trị tại x = 2 thì y'(2) = 0 $\Leftrightarrow 3.(2)^2 - 6m.2 + m - 1 = 0 \Leftrightarrow m = 1$

Với m = 1 ta được hàm số: $y = x^3 - 3x^2 + 2$ có : $y' = 3x^2 - 6x \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right.$ tại x = 2 hàm số đạt giá trị cực tiểu

Vậy m = 1 là giá trị cần tìm

Bài 1. Xác định m để hàm số $y = mx^3 + 3x^2 + 5x + 2$ đạt cực đại tại x = 2

Bài 2. Tìm m để hàm số $y = x^3 - mx^2 + (m - \frac{2}{3})x + 5$ có cực trị tại x = 1. Khi đó hàm số có CĐ hay CT

Bài 3. Tìm m để hàm số $y = \dfrac{x^2+mx+1}{x+m}$ đạt cực đại tại x = 2

Bài 4. Tìm m để hàm số $y = x^3 - 2mx^2 + m^2x - 2$ đạt cực tiểu tại x = 1

Bài 5. Tìm các hệ số a, b, c sao cho hàm số: $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ đạt cực tiểu tại điểm x = 1, f(1) = -3 và đồ thị cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 2

Bài 6. Tìm các số thực q, p sao cho hàm số $f(x) = xp + \dfrac{q}{x+1}$ đạt cực đại tại điểm x = -2 và f(-2) = -2

Hướng dẫn: $f'(x) = 1 - \dfrac{q}{(x+1)^2}$, $\forall x \neq -1$

+ Nếu $q \le 0$ thì f'(x) > 0 với $\forall x \neq -1$. Do đó hàm số luôn đồng biến . Hàm số không có cực trị.

+ Nếu q > 0 thì:

$$f'(x)=\frac{x^2+2x+1-q}{(x+1)^2}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1-\sqrt{q}\\x=-1+\sqrt{q}\end{array}\right.$$

Lập bảng biến thiên để xem hàm đạt cực tại tại giá trị x nào.

Dạng 3. Tìm điều kiện để hàm số có cực trị

Bài toán: ‘Tìm m để hàm số có cực trị và cực trị thoả mãn một tính chất nào đó.’

Phương pháp

B1: Tìm m để hàm số có cực trị.

B2: Vận dụng các kiến thức khác Chú ý:

- Hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d\ (a\neq 0)$ có cực trị khi và chỉ khi phương trình y’ = 0 có hai nghiệm phân biệt.
- Cực trị của hàm phân thức $y=\frac{p(x)}{Q(x)}$. Giả sử x_0 là điểm cực trị của y, thì giá trị của $y(x_0)$ có thể được tính bằng hai cách: hoặc $y(x_0)=\frac{P(x_0)}{Q(x_0)}$ hoặc $y(x_0)=\frac{P'(x_0)}{Q'(x_0)}$

Ví dụ . Xác định m để các hàm số sau có cực đại và cực tiểu

a. $y=\frac{1}{3}x^3+mx^2+(m+6)x-1$ *b.* $y=\frac{x^2+mx-2m-4}{x+2}$

Hướng dẫn.

a. TXĐ: R

$y'=x^2+2mx+m+6.$

Để hàm số có cực trị thì phương trình: $x^2+2mx+m+6=0$ có 2 nghiệm phân biệt

$$\Delta'=m^2-m-6>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m>3\\m<-2\end{array}\right.$$

b. TXĐ: $\mathbb{R}\setminus\ -2$

$$y'=\frac{(2x+m)(x+2)-(x^2+mx-2m-4)}{(x+2)^2}=\frac{x^2+4x+4m+4}{(x+2)^2}$$

*H*àm số có cực đại, cực tiểu khi $y'=0$ *c*ó hai nghiệm phân biệt khác -2 $\Leftrightarrow x^2+4x+4m+4=0$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta'>0\\4-8+4m+4\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4-4m-4>0\\m\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow m<0$$

Bài 1. Tìm m để hàm số $y=x^3-3mx^2+2$. Với giá trị nào của m thì hàm số có CĐ, CT?

Bài 2. Tìm m để hàm sô $y=\frac{x^2-m(m+1)x+m^3+1}{x-m}$ luôn có cực đại và cực tiểu.

Bài 3. Cho hàm số $y=2x^3+\tilde{a}^2-12x-13$. Tìm a để hàm số có cực đại, cực tiểu và các điểm cực tiểu của đồ thị cách đều trục tung.

Bài 4. Hàm số $y=\frac{m}{3}x^3-2(m+1)x^2+4mx-1$. Tìm m để hàm số có cực đại cực tiểu.

Bài 5. Cho hàm $y=\frac{x^2+mx}{1-x}$. Tìm m để hàm số có cực trị

Bài 6. Cho hàm số $y=\frac{x^2+mx-2m-4}{x+2}$. Xác định m để hàm số có cực đại và cực tiểu.

Dạng 4. Tìm tham số để các cực trị thoả mãn tính chất cho trước.

Phương pháp

+ Tìm điều kiện để hàm số có cực trị

+ Vận dụng các kiến thức về tam thức, hệ thức Viet để thoả mãn tính chất.
Ví dụ .

Bài1. Tìm cực trị của các hàm số sau:

a. $y = 10 + 15x + 6x^2 - x^3$ b. $y = x^4 - 8x^3 + 432$

c. $y = x^3 - 3x^2 - 24x + 7$ d. $y = x^4 - 5x^2 + 4$

e. $y = -5x^3 + 3x^2 - 4x + 5$ f. $y = -x^3 - 5x$

Bài 2. Tìm cực trị của các hàm số sau:

a. $y = \dfrac{x+1}{x^2+8}$ b. $y = \dfrac{x^2+x-5}{x+1}$ c. $y = \dfrac{(x-4)^2}{x^2-2x+5}$

d. $y = x - 3 + \dfrac{9}{x-2}$ e. $y = \dfrac{x^2-3x+3}{x-1}$ f. $y = \dfrac{x}{x^2+4}$

Bài 3. Tìm cực trị các hàm số

a. $y = x\sqrt{4-x^2}$ b. $y = \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}$ c. $y = \dfrac{5-3x}{\sqrt{1-x^2}}$

d. $y = \dfrac{x}{\sqrt{10-x^2}}$ e. $y = \dfrac{x^3}{\sqrt{x^2-6}}$ f. $y = x\sqrt{3-x}$

Bài 4. Tìm cực trị các hàm số:

a. $y = x - \sin 2x + 2$ b. $y = 3 - 2\cos x - \cos 2x$ c. $y = \sin x + \cos x$

d. $y = \sin 2x$ e. $y = \cos x + \dfrac{1}{2}\cos 2x$ f. $y = 2\sin x + \cos 2x$ với $x \in [0; \pi]$

Bài 5. Xác định m để hàm số $y = mx^3 + 3x^2 + 5x + 2$ đạt cực đại tại x = 2

Bài 6. Tìm m để hàm số $y = x^3 - mx^2 + (m - \frac{2}{3})x + 5$ có cực trị tại x = 1. Khi đó hàm số có CĐ hay CT

Bài 7. Tìm m để hàm số $y = \dfrac{x^2+mx+1}{x+m}$ đạt cực đại tại x = 2

Bài 8. Tìm m để hàm số $y = x^3 - 2mx^2 + m^2x - 2$ đạt cực tiểu tại x = 1

Bài 9. Tìm các hệ số a, b, c sao cho hàm số: $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ đạt cực tiểu tại điểm x = 1, f(1) = -3 và đồ thị cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 2

Bài 10. Tìm các số thực q, p sao cho hàm số $f(x) = xp + \dfrac{q}{x+1}$ đạt cực đại tại điểm x = -2 và f(-2) = -2

Bài 11. Tìm m để hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 2$. Với giá trị nào của m thì hàm số có CĐ, CT?

Bài 12. Tìm m để hàm sô $y = \dfrac{x^2 - m(m+1)x + m^3 + 1}{x-m}$ luôn có cực đại và cực tiểu.

Bài 13. Cho hàm số $y = 2x^3 + \tilde{a}^2 - 12x - 13$. Tìm a để hàm số có cực đại, cực tiểu và các điểm cực tiểu của đồ thị cách đều trục tung.

Bài 14. Hàm số $y = \dfrac{m}{3}x^3 - 2(m+1)x^2 + 4mx - 1$. Tìm m để hàm số có cực đại cực tiểu.

Bài 15. Cho hàm $y = \dfrac{x^2+mx}{1-x}$. Tìm m để hàm số có cực trị

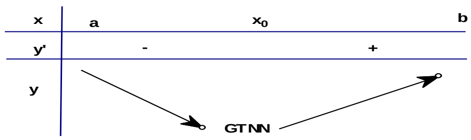
Bài 16. Cho hàm số $y = \dfrac{x^2+mx-2m-4}{x+2}$. Xác định m để hàm số có cực đại và cực tiểu.

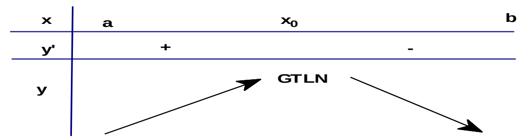
❸ GIÁ TRỊ LỚN NHẤT VÀ GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ

DẠNG 1. ***Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số***

- Để tìm GTLN, GTNN của hàm số y = f(x) trên $(a;b)$:

+B1: Tính đạo hàm của hàm số y' = f'(x)
+ B2: Xét dấu đạo hàm f'(x), lập bảng biến thiên





Trong đó tại x_0 thì $f'(x_0)$ bằng 0 hoặc không xác định

- Để tìm GTLN, GTNN của hàm số y = f(x) trên [a; b]:

B1: Tìm các giá trị $x_i \in (a;b)$ (i = 1, 2, ..., n) làm cho đạo hàm bằng 0 hoặc không xác định .

B2: Tính $f(a), f(x_1), f(x_2), ..., f(x_n), f(b)$

B3: GTLN = max{ $f(a), f(x_1), f(x_2), ..., f(x_n), f(b)$ }

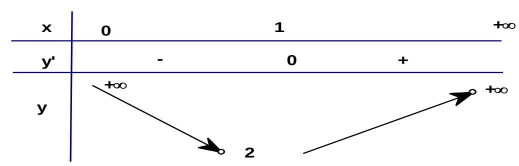
GTNN = Min{ $f(a), f(x_1), f(x_2), ..., f(x_n), f(b)$ }

Ví dụ 1. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y = x + \dfrac{1}{x}$ trên khoảng $(0;+\infty)$

Hướng dẫn:

Dễ thấy h àm số liên tục trên $(0;+\infty)$

$y' = 1 - \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{x^2-1}{x^2} \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$.



Dễ thấy $x = -1 \notin (0;+\infty)$

Vậy Minf(x) = 2 khi x = 1 và hàm số không có giá trị lớn nhất.

Ví dụ 2.

Tính GTLN, GTNN của hàm số $y = \dfrac{x^3}{3} + 2x^2 + 3x - 4$ trên đoạn [-4; 0]

Hướng dẫn

Hàm số liên tục trên [-4; 0],

$$f'(x) = x^2 + 4x + 3 \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 4x + 3 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = -3 \end{array}\right.$$

$$f(-4) = \frac{-16}{3}, f(-3) = -4, f(-1) = \frac{-16}{3}, f(0) = -4$$

Vậy $\underset{x\in[-4;0]}{\text{Max}}\, y = -4$ *khi* x = -3 hoặc x = 0

$\underset{x\in[-4;0]}{\text{Min}}\, y = \dfrac{-16}{3}$ khi x = -4 hoặc x = -1

Bài 1. Tìm GTLN, GTNN của hàm số (nếu có):

a. f(x) = $x^3 + 3x^2 - 9x + 1$ trên [-4; 4]

b. f(x) = $x^3 + 5x - 4$ trên đoạn [-3; 1]

c. f(x) = $x^4 - 8x^2 + 16$ trên đoạn [-1; 3]

d. f(x) = $x^3 + 3x^2 - 9x - 7$ trên đoạn [-4; 3]

Bài 2. Tìm GTLN, GTNN của hàm số (nếu có):

a. $f(x) = \frac{x}{x+2}$ trên nửa khoảng (-2; 4] b. $f(x) = x + 2 + \frac{1}{x-1}$ trên khoảng $(1; +\infty)$

c. $f(x) = x\sqrt{1 - x^2}$ d. $f(x) = \frac{1}{\cos x}$ trên khoảng $(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2})$

❹ TIỆM CẬN CỦA HÀM SỐ

I. Kiến thức cần nắm

Cho hàm số y = f(x) có đồ thị là (C)

- $y = y_0$ là tiệm cận ngang của nếu một trong hai điệu kiên sau được thoả mãn:
  $\lim_{x\to+\infty} f(x) = y_0$, hoặc $\lim_{x\to-\infty} f(x) = y_0$
- $x = x_0$ là tiệm cận đứng của (C) nếu một trong các điều kiện sau được thoả mãn:
  $\lim_{x\to x_0^+} = +\infty$, $\lim_{x\to x_0^-} = +\infty$, $\lim_{x\to x_0^+} = -\infty$, $\lim_{x\to x_0^-} = -\infty$
- Đường thẳng y = ax + b ($a \neq 0$) được gọi là tiệm cận xiên nếu một trong hai điều kiện sau thoả mãn:
  $\lim_{x\to+\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$ hoặc $\lim_{x\to-\infty} [f(x) - (ax+b)] = 0$

II. Các dạng toán

Dạng 1: Tiệm cận hàm số hữu tỉ $y = \frac{P(x)}{Q(x)}$

Phương pháp

- Tiệm cận đứng: Nghiệm của mẫu không phải là nghiệm của tử cho phép xác định tiệm cận đứng.
- Tiệm cận ngang, xiên:
  + Det(P(x)) < Det (Q(x)): Tiệm cận ngang y = 0
  + Det(P(x)) = Det(Q(x)): Tiệm cận ngang là tỉ số hai hệ số bậc cao nhất của tử và mẫu.
  + Det (P(x)) = Det(Q(x)) + 1: Không có tiệm cận ngang; Tiệm cận xiên được xác định bằng cách phân tích hàm số thành dạng: f(x) = ax + b + $\varepsilon(x)$ với $\lim_{x\to\infty} \varepsilon(x) = 0$ thì y = ax + b là tiệm cận xiên.

Ví dụ 1. Tìm các tiệm cận của các hàm số:

a. $y = \frac{2x-1}{x+2}$ b. $y = \frac{x^2 - x - 7}{x-3}$ c. $y = \frac{x+2}{x^2-1}$

Hướng dẫn

a. Ta thấy $\lim_{x\to-2^-} \frac{2x-1}{x+2} = -\infty$; $\lim_{x\to-2^+} \frac{2x-1}{x+2} = +\infty$ nên đường thẳng x= 2 là tiệm cận đứng.

Vì $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x-1}{x+2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2 - \frac{1}{x}}{1 + \frac{2}{x}} = 2$ nên y = 2 là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

b.

+ $\lim_{x\to3^-} \frac{x^2 - x - 7}{x-3} = -\infty$. Nên x = 3 là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

+ $y = x + 2 - \frac{1}{x-3}$. Ta thấy $\lim_{x\to\infty}$[y - (x + 2)]=$\lim_{x\to\infty} \frac{-1}{x-3} = 0$ Vậy y = x+ 2 là tiệm cân xiên của đồ thị hàm số.

c. Ta thấy $\lim_{x\to1^+} = \frac{x+2}{x^2-1} = +\infty$. Nên x = 1 là đường tiệm cận đứng.

+ $\lim_{x\to-1^-} \frac{x+2}{x^2-1} = +\infty$. Nên x = -1 là tiệm cận đứng.

+ $\lim_{x\to+\infty} \frac{x+2}{x^2-1} = \frac{\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}}{1 - \frac{1}{x^2}} = 0$. Nên y = 0 là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Dạng 2. Tiệm cận của hàm vô tỉ $y=\sqrt{ax^2+bx+c}$ $(a>0)$

Phương pháp

Ta phân tích $\sqrt{ax^2+bx+c}\approx\sqrt{a}\left|x+\dfrac{b}{2a}\right|+\varepsilon(x)$

Với $\lim\limits_{x\to+\infty}\varepsilon(x)=0$ khi đó $y=\sqrt{a}(x+\dfrac{b}{2a})$ có tiệm cận xiên bên phải

Với $\lim\limits_{x\to-\infty}\varepsilon(x)=0$ khi đó $y=-\sqrt{a}(x+\dfrac{b}{2a})$ có tiệm cận xiên bên tr ái

Ví dụ

Tìm tiệm cận của hàm số: $y=\sqrt{9x^2-18x+20}$

H- ớng dẫn

$y=\sqrt{9(x-2)^2+6}$

Các tính giới hạn vô cực của hàm số $y=\dfrac{f(x)}{g(x)}$

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$	$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$	Dấu của g(x)	$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$
L	$\pm\infty$	Tuỳ ý	0
L > 0	0	+	$+\infty$
		-	$-\infty$
L < 0	0	-	$+\infty$
		+	$-\infty$

Bài 1. Tìm tiệm cận các hàm số sau:

a. $y=\dfrac{2x-1}{x+2}$ b. $y=\dfrac{3-2x}{3x+1}$ c. $y=\dfrac{5}{2-3x}$ d. $y=\dfrac{-4}{x+1}$

e. $y=\dfrac{x+1}{2x+1}$ f. $y=4+\dfrac{1}{x-2}$ g. $y=\dfrac{-x+3}{x}$ h. $y=\dfrac{4-x}{3x+1}$

Bài 2. Tìm tiệm cận của các hàm số sau:

a. $y=\dfrac{x^2-12x+27}{x^2-4x+5}$ b. $y=\dfrac{x^2-x-2}{(x-1)^2}$ c. $y=\dfrac{x^2+3x}{x^2-4}$ d. $y=\dfrac{2-x}{x^2-4x+3}$

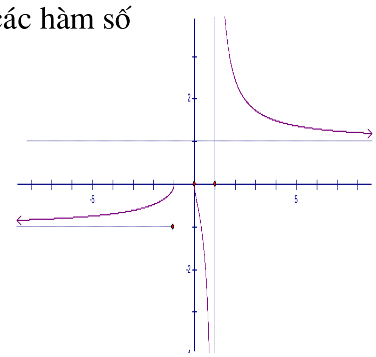
e. $y=2x-1+\dfrac{1}{x}$ f. $y=\dfrac{x^2+2x}{x-3}$ g. $y=x-3+\dfrac{1}{2(x-1)^2}$ h. $y=\dfrac{2x^3-x^2}{x^2+1}$

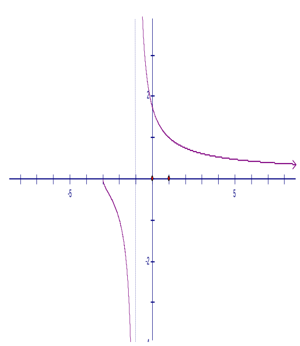
Bài 3. Tìm tiệm cận các hàm số

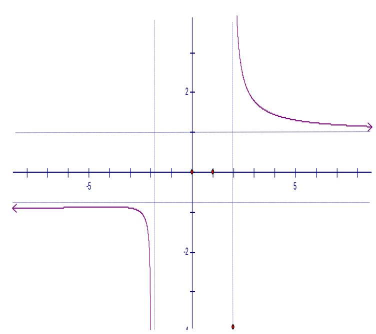
a. $y=\dfrac{\sqrt{x^2+x}}{x-1}$

b. $y=\dfrac{\sqrt{x+3}}{x+1}$

c. $y=\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2-4}}$







Bài 4. Xác định m để đồ thị hàm số: $y=\dfrac{x-3}{x^2+2(m+2)x+m^2+1}$ có đúng 2 tiệm cận đứng.

Bài 5. Tính diện tích của tam giác tạo bởi tiệm cận xiên của đồ thị tạo với hai trục toạ độ của các hàm số:

a. y = $\dfrac{3x^2+x+1}{x-1}$ b. y = $\dfrac{-3x^2+x-4}{x+2}$

Bài 6.(ĐHSP 2000). Tìm m để tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2+2(m-1)x-4m+3}{x-2}$ tạo với hai trục toạ độ một tam giác có diện tích bằng 8 (đvdt)

Bài 7. Cho hàm số: $y=\dfrac{x^2+x(3m-2)+3-3m}{x-1}$ (1)

a. Tìm m để tiệm cận xiên của đồ thị đi qua điểm $A(4;-\sqrt{3})$
b. Tìm m để đ- ờng tiệm cận xiên của (1) cắt Parabol $y=x^2$ tại hai điểm phân biệt.

☯4. KHẢO SÁT VÀ VẼ HÀM BẬC BA

DẠNG 1: Khảo sát và vẽ hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ (a $\neq 0$)

Ph- ơng pháp

1. Tìm tập xác định.
2. Xét sự biến thiên của hàm số
a. Tìm các giới hạn tại vô cực và các giới hạn tại vô cực (nếu có). Tìm các đ- ờng tiệm cận.
b. Lập bảng biến thiên của hàm số, bao gồm:
+ Tìm đạo hàm, xét dấu đạo hàm, xét chiều biến thiên và tìm cực trị.
+ Điền các kết quả vào bảng.
3. Vẽ đồ thị của hàm số.
+ Vẽ đ- ờng tiệm cận nếu có.
+ Xác định một số điểm đặc biệt: Giao với Ox, Oy, điểm uốn.
+ Nhận xét đồ thị: Chỉ ra tâm đối xứng, trục đối xứng (không cần chứng minh)

Ví dụ 1. Cho hàm số: $y=-x^3+3x^2-1$

a. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số.
b. Tuỳ theo giá trị của m, biện luận số nghiệm của ph- ơng trình: $-x^3+3x^2-1=m$

H- ớng dẫn

a.

1. TXĐ: $D=\mathbb{R}$

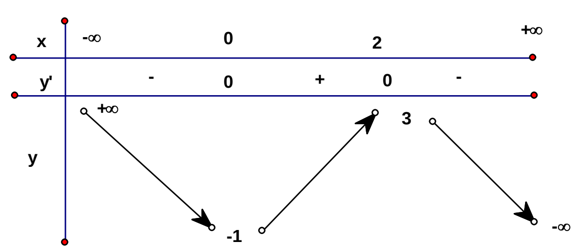
2. Sự biến thiên của hàm số

a. Giới hạn tại vô cực

$$\lim_{x\to+\infty}(-x^3+3x-1)=\lim_{x\to+\infty}x^3(1+\frac{3}{x^2}-\frac{1}{x^3})=+\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}(-x^3+3x-1)=\lim_{x\to-\infty}x^3(1+\frac{3}{x^2}-\frac{1}{x^3})=-\infty$$

c. Bảng biến thiên



$$y'=-3x^2+6x\Rightarrow y'=0\Leftrightarrow -3x^2+6x=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\end{array}\right.$$

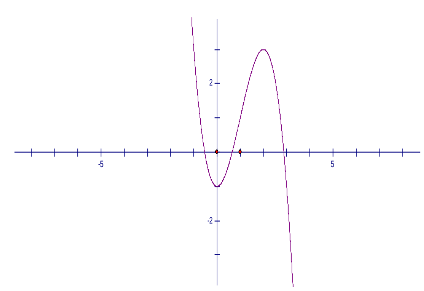
Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;0)$ và $(2;+\infty)$

Và nghịch biến trên khoảng (0; 2).

Hàm số đạt cực đại tại điểm x= 2 ; và $y_{CĐ}$=y(2)= 3

Hàm số đạt cực tiểu tại điểm x =0 và y_{CT} = y(1) = -1

3. Đồ thị



+ Giao với Oy: cho x = 0 $\Rightarrow y=0$. Vởy giao với Oy tại điểm O(0; -1)

+ $y''=0\Leftrightarrow -6x+6=0\Rightarrow x=1$. Điểm A (1; 1)

+ Nhận điểm A làm tâm đối xứng.

b.

Số nghiệm của ph- ơng trình là số giao điểm của 2 đồ thị $y = -x^3 + 3x^2 - 1$ và y =m

Dựa vào đồ thị ta có kết quả biện luận:

m > 3: Ph- ơng trình có 1 nghiệm.

$m = 3$ phương trình có 2 nghiệm

-1< m < 3: Phương trình có 3 nghiệm.

m = -1: Phương trình có 2 nghiệm

m < -1: Phương trình có 1nghiệm

CÁC BÀI TOÁN VỀ HÀM BẬC BA

Bài 1(TNTHPT 2008)

Cho hàm số $y = 2x^3 + 3x^2 - 1$

a. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số.
b. Biệm luận theo m số nghiệm của ph- ơng trình $2x^3 + 3x^2 - 1 = m$

Bài 2 (TN THPT- lần 2 2008)

Cho hàm số y = x^3 - $3x^2$

a. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số đã cho.
b. Tìm các giá trị của m để ph- ơng trình $x^3 - 3x^2 - m = 0$ có 3 nghiệm phân biệt.

Bài 3 (TNTHPT - 2007)

Cho hàm số y= $x^3 - 3x + 2$ có đồ thị là (C) .

a/ Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số .

b/ Viết phương trình tiếp tuyến tại điểm A(2 ;4) .

Bài 4 (TNTHPT - 2006)

Cho hàm số y=$-x^3 + 3x^2$ có đồ thị (C) .

a/ Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số .

b/ Dựa vào đồ thị biện luận số nghiệm phương trình : $-x^3 + 3x^2$ -m=0 .

Bài 5 (TNTHPT – 2004- PB)

Cho hàm số y= $x^3 - 6x^2 + 9x$ có đồ thị là (C) .

a/ Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số .

b/ Viết phương trình tiếp tuyến tại điểm có hoành độ là nghiệm của phương trình y’’=0 .

c/ Với giá trị nào của m thì đường thẳng y=x+m^2-m đi qua trung điểm của đoạn thẳng nối cực đại vào cực tiểu .

Bài 6 (TNTHPT – 2004 - KPB)

Cho hàm số y= $x^3 - 3mx^2 + 4m^3$.

a/ Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số khi m=1 .

b/ Viết phương trình tiếp tuyến tại điểm có hoành độ x=1 .

Bài 7 (ĐH- A- 2002)

Cho hàm số $y = -x^3 + 3mx^2 + 3(1 - m^2)x + m^3 - m^2$

a. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số với m= 1
b. Tìm k để ph- ơng trình: $-x^3 + 3x^2 + k^3 - 3k^2 = 0$ có 3 nghiệm phân biệt.
c. Viết ph- ơng trình đ- ờng thẳng qua 2 điểm cực trị của đồ thị hàm số (1).

Bài 8 (CĐ SP MGTW- 2004)

Cho hàm số y = x^3 - $3x^2$ + 4m

a. Chứng minh đồ thị hàm số luôn có 2 cực trị.
b. Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số khi m = 1

Bài 9 (ĐH-B- 2007)

Cho hàm số $y = -x^3 + 3x^2 + 3(m^2 - 1)x - 3m^2 - 1$

a. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số với m =1
b. Tìm m để hàm số có cực đại cực tiểu và các điểm cực trị cách đều điểm O.

Bài 10 (ĐH - D - 2004)

Cho hàm số $y = x^3 — 3mx^2 + 9x + 1$

a. Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số với m = 2
b. Tìm m để nghiệm của phương trình y’’= 0 thuộc đường thẳng y = x+ 1

Bài 8

Cho hàm số $y = (x - 1)(x^2 + mx + m)$

a. Tìm m để đồ thị hàm số cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt
b. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số với m= 4

Bài 3

Cho hàm số $y = 2x^3 + 3(m-1)x^2 + 6(m-2)x - 1$

a. Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số với m =2
b. Với giá trị nào của m hàm số có cực đại, cực tiểu.

Bài 5 (ĐH 2006- D)

Cho hàm số $y = x^3 - 3x + 2$

a. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.
b. Gọi d là đ- ờng thẳng qua điểm A(3; 20) và có hệ số góc m. Tìm m để đ- ờng thẳng d cắt (C) tại 3 điểm phân biệt. (Gợi ý đ- ờng thẳng d qua $M(x_0;y_0)$ có hệ số góc m có dạng: $y = m(x - x_0) + y_0$)

Bài 7

Cho hàm số $y = (x - m)^3 - 3x$

a. Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số với m = 1
b. Tìm m để hàm số đã cho đạt cực tiểu tại điểm có hoành độ x = 0

Bài 8

Cho hàm số $y = (x - 1)(x^2 + mx + m)$

c. Tìm m để đồ thị hàm số cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt
d. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số với m= 4

Bài 11

Cho hàm số y = $x^3 - 2mx^2 + m^2x - 2$

a. Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số khi m =1
b. Tìm m để hàm số đạt cực tiểu tại x = 1

❺ HÀM BẬC BỐN TRÙNG PH□ƠNG VÀ MỘT SỐ BÀI TẬP CÓ LIÊN QUAN

I. Một số tính chất của hàm trùng ph- ơng

- Hàm số luôn có cực trị với mọi giá trị của tham số sao cho $a \neq 0$
- Hàm số đạt giá trị cực đại, cực tiểu $\Leftrightarrow y' = 0 \Leftrightarrow 2x(2ax^2 + b) = 0$ có ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \dfrac{b}{2a} < 0$
- Đồ thị hàm số luôn nhận Oy là trục đối xứng.
- Nếu hàm số có ba cực trị trị chúng tạo thành một tam giác cân.

Dạng toán: Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số

Ví dụ 1 (TNTHPT-2008)

Cho hàm số $y = x^4 - 2x^2$

a. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số.
b. Viết ph- ơng trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm có hoành độ x = -2

Ví dụ 2. Cho hàm số $y = x^4 + 4mx^3 + 3(m+1)x^2 + 1$

a. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số với m =0
b. Với giá trị nào của m hàm số có 3 cực trị

Bài tập hàm số trùng ph□ơng

Bài 1. Khảo sát và vẽ đồ thị các hàm số sau:

a. y= $-x^4 + 2x^2$ b. y = $x^4 + x^2 - 2$ c. y = $x^4 - 6x^2 + 1$

d. y = $\frac{1}{2}x^4 - 3x^2 = \frac{5}{2}$ e.y = $-x^4 + 2x^2 + 3$ f. y = $x^4 + 2x^2 + 1$

Bài 2.

Cho hàm số $y = x^4 - 2m^2x^2 + 1$

a. Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số với m =1
b. Tìm m để đồ thị hàm số có ba cực trị là ba đỉnh của tam giác vuông cân.

Bài 3 (ĐH Đà Lạt - 2002)

a. Giải ph- ơng trình $x^4 - 2x^2 + 1 = 0$
b. Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số y = $x^4 - 2x^2 + 1$
c. Biện luận theo m số nghiệm của ph- ơng trình $x^4 - 2x^2 + 1 - m = 0$

Bài 4 (ĐH Thái Nguyên - 2002)

Cho hàm số $y = -x^4 + 2mx^2$ (C_m)

a. Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số với m = 1
b. Hãy xác định m để hàm số đồ thị hàm số có 3 cực trị

Bài 5. (ĐH Vinh - 2002)

1. Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số $y = -x^4 + 5x^2 - 4$
2. Xác định m để ph- ơng trình $x^4 - 5x^2 - m^2 + \sqrt{3} = 0$ có 4 nghiệm phân biệt.

Bài 6

Cho hàm số $y = \frac{x^4}{4} - 2x^2 - \frac{9}{4}$

a. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số
b. Biện luận theo k số giao điểm của (C) với đồ thị (P) của hàm số $y = k - 2x^2$

Bài 7

Cho hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + m^3 - m^2$

a. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số khi m = 1
b. Xác định m để đồ thị (C_m) của hàm số đã cho tiếp xúc với trục hoành tại 2 điểm

Bài 8. (ĐH Cần thơ - 2002)

Cho hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 2 - m$ (C_m)

a. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số với m = 0
b. Tìm các giá trị của m để đồ thị (C_m) của hàm số chỉ có hai điểm chung với Ox
c. Chứng minh với mọi m tam giác có 3 đỉnh là ba cực trị là một tam giác vuông cân.

HỌ ĐƯỜNG CONG

BÀI TOÁN TỔNG QUÁT:

Cho họ đường cong $(C_m): y = f(x,m)$ (m là tham số)

Biện luận theo m số đường cong của họ (C_m) đi qua điểm $M_0(x_0;y_0)$ cho trước.

PHƯƠNG PHÁP GIẢI:

Ta có :

Họ đường cong (C_m) đi qua điểm $M_0(x_0;y_0)$ $\Leftrightarrow$ $y_0 = f(x_0,m)$ (1)

Xem (1) là phương trình theo ẩn m.

Tùy theo số nghiệm của phương trình (1) ta suy ra số đường cong của họ (Cm) đi qua M_0

Cụ thể:

- Nếu phương trình (1) có n nghiệm phân biệt thì có n đường cong của họ (Cm) đi qua M_0
- Nếu phương trình (1) vô nghiệm thì mọi đường cong của họ (Cm) đều không đi qua M_0
- Nếu phương trình (1) nghiệm đúng với mọi m thì mọi đường cong của họ (Cm) đều đi qua M_0

Trong trường hợp này ta nói rằng M_0 là điểm cố định của họ đường cong (C_m)

Dạng 1:

TÌM ĐIỂM CỐ ĐỊNH CỦA HỌ ĐƯỜNG CONG

BÀI TOÁN TỔNG QUÁT:

Cho họ đường cong $(C_m): y = f(x,m)$ (m là tham số)

Tìm điểm cố định của họ đường cong (C_m)

PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Bước 1: Gọi $M_0(x_0;y_0)$ là điểm cố định (nếu có) mà họ (C_m) đi qua. Khi đó phương trình:

$$y_0 = f(x_0,m) \text{ nghiệm đúng } \forall m \qquad (1)$$

Bước 2: Biến đổi phương trình (1) về một trong các dạng sau:

Dạng 1: $Am + B = 0 \ \forall m$

Dạng 2: $Am^2 + Bm + C = 0 \ \forall m$

Áp dụng định lý: $Am + B = 0 \ \forall m \Leftrightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \end{cases}$ (2)

$$Am^2 + Bm + C = 0 \ \forall m \Leftrightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \\ C = 0 \end{cases} \quad (3)$$

Bước 3: Giải hệ (2) hoặc (3) ta sẽ tìm được $(x_0;y_0)$

Bài tập

Bài 1. Cho họ (C_m) $y = x^3 - 3(m+1)x^2 + 2(m^2+4m+1)x - 4m(m+1)$. CMR: Khi m thay đổi thì họ đ- ờng cong luôn qua một điểm cố định.

Bài 2. Cho họ đồ thị (C_m): $= \dfrac{mx+1}{x+m}$. Tìm các điểm cố định mà đồ thị của hàm số luôn đi qua với mọi $m \neq \pm 1$

Bài 3. Cho họ (C_m) có ph- ơng trình: $y = \dfrac{x^2 + mx - m - 1}{x+1}$. Chứng minh rằng (C_m) luôn đi qua một điểm cố định.

Bài 4. Cho hàm số (C_m): $y = x^3 - 3mx + 2m$

a. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số với m = 1.
b. Chứng minh rằng họ đ- ờng cong luôn đi qua một điểm cố định.

Bài 5. Cho hàm số: $y = \dfrac{mx-1}{x-m}$, $m \neq \pm 1$. Gọi (H_m) là đồ thị của hàm số đã cho.

a. Chứng minh rằng với mọi $m \neq \pm 1$, họ đ- ờng cong luôn qua 2 điểm cố định.
b. Gọi M là giao điểm của 2 tiệm cận. Tìm tập hợp các điểm M khi m thay đổi.

Bài 6. Cho hàm số: $y = (m+2)x^3 + 2(m+2)x^2 - (m+3)x - 2m + 1$ (C_m). Chứng minh rằng họ đồ thị luôn qua ba điểm cố định và 3 điểm cố định đó cùng nằm trên một đ- ờng thẳng.

DẠNG 2: TÌM ĐIỂM HỌ ĐỒ THỊ HÀM SỐ KHÔNG ĐI QUA

Ph- ơng pháp:

B1: Giả sử $M(x_0; y_0)$ là điểm mà họ đ- ờng cong không thể đi qua.

B2: Khi có ph- ơng trình: $y_0 = f(x_0, m)$ vô nghiệm với m từ đó tìm đ- ợc $(x_0; y_0)$

B3: Kết luận về điểm mà họ đ- ờng cong không thể đi qua.

Bài 1. Cho hàm số $y = (x-2)(x^2 - 2mx + m^2 - 1)$ (C_m). Tìm các điểm mà (C_m) không thể đi qua.

Bài 2. Cho hàm số $y = \dfrac{(3m+1)x - m^2 + m}{x+m}$

a. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số với m = 1.
b. Tìm các điểm trên đ- ờng thẳng x = 1, sao cho không thể có giá trị nào của m để đồ thị hàm số đi qua.

Bài 3. Cho đồ thị hàm số $y = 2x^3 - 3(m+3)x^2 + 18mx - 8$ (C_m). Chứng minh rằng trên đ- ờng cong $y = x^2$ có hai điểm mà (C_m) không đi qua với mọ m.

CHUYÊN ĐỀ : PHƯƠNG PHÁP GIẢI PHƯƠNG TRÌNH VÔ TỈ

I. PHƯƠNG PHÁP BIẾN ĐỔI TƯƠNG ĐƯƠNG

1. Bình phương 2 vế của phương trình

a) **Phương pháp**

✓ Thông thường nếu ta gặp phương trình dạng : $\sqrt{A} + \sqrt{B} = \sqrt{C} + \sqrt{D}$, ta thường bình phương 2 vế , điều đó đôi khi lại gặp khó khăn hãy giải ví dụ sau

✓ $\sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B} = \sqrt[3]{C} \Rightarrow A + B + 3\sqrt[3]{A.B}\left(\sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B}\right) = C$

và ta sử dụng phép thế : $\sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B} = C$ **ta được phương trình :** $A + B + 3\sqrt[3]{A.B.C} = C$

b) **Ví dụ**

Bài 1. Giải phương trình sau : $\sqrt{x+3} + \sqrt{3x+1} = 2\sqrt{x} + \sqrt{2x+2}$

Giải: Đk $x \geq 0$

Bình phương 2 vế không âm của phương trình ta được: $1 + \sqrt{(x+3)(3x+1)} = x + 2\sqrt{x(2x+1)}$, để giải phương trình này dĩ nhiên là không khó nhưng hơi phức tạp một chút .

Phương trình giải sẽ rất đơn giản nếu ta chuyển vế phương trình : $\sqrt{3x+1} - \sqrt{2x+2} = \sqrt{4x} - \sqrt{x+3}$

Bình phương hai vế ta có : $\sqrt{6x^2 + 8x + 2} = \sqrt{4x^2 + 12x} \Leftrightarrow x = 1$

Thử lại x=1 thỏa

➢ **Nhận xét :** Nếu phương trình : $\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)} = \sqrt{h(x)} + \sqrt{k(x)}$

Mà có : $f(x)+h(x)=g(x)+k(x)$, thì ta biến đổi phương trình về dạng :

$\sqrt{f(x)}-\sqrt{h(x)}=\sqrt{k(x)}-\sqrt{g(x)}$ sau đó bình phương ,giải phương trình hệ quả

Bài 2. Giải phương trình sau :

$$\sqrt{\frac{x^3+1}{x+3}}+\sqrt{x+1}=\sqrt{x^2-x+1}+\sqrt{x+3}$$

Giải:

Điều kiện : $x\ge -1$

Bình phương 2 vế phương trình ?

Nếu chuyển vế thì chuyển như thế nào?

Ta có nhận xét : $\sqrt{\frac{x^3+1}{x+3}}.\sqrt{x+3}=\sqrt{x^2-x+1}.\sqrt{x+1}$, từ nhận xét này ta có lời giải như sau :

$$(2)\Leftrightarrow\sqrt{\frac{x^3+1}{x+3}}-\sqrt{x+3}=\sqrt{x^2-x+1}-\sqrt{x+1}$$

Bình phương 2 vế ta được: $\frac{x^3+1}{x+3}=x^2-x-1\Leftrightarrow x^2-2x-2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1-\sqrt{3}\\x=1+\sqrt{3}\end{array}\right.$

Thử lại : $x=1-\sqrt{3},x=1+\sqrt{3}$ l nghiệm

Qua lời giải trên ta có nhận xét : Nếu phương trình : $\sqrt{f(x)}+\sqrt{g(x)}=\sqrt{h(x)}+\sqrt{k(x)}$

Mà có : $f(x).h(x)=k(x).g(x)$ thì ta biến đổi $\sqrt{f(x)}-\sqrt{h(x)}=\sqrt{k(x)}-\sqrt{g(x)}$

2. Trục căn thức

2.1. Trục căn thức để xuất hiện nhân tử chung

a) Phương pháp

Một số phương trình vô tỉ ta có thể nhẩm được nghiệm x_0 như vậy phương trình luôn đưa về được dạng tích $(x-x_0)A(x)=0$ ta có thể giải phương trình $A(x)=0$ hoặc chứng minh $A(x)=0$ vô nghiệm , ***chú ý điều kiện của nghiệm của phương trình để ta có thể đánh gía*** $A(x)=0$ ***vô nghiệm***

b) Ví dụ

Bài 1 . Giải phương trình sau : $\sqrt{3x^2-5x+1}-\sqrt{x^2-2}=\sqrt{3(x^2-x-1)}-\sqrt{x^2-3x+4}$

Giải:

Ta nhận thấy : $(3x^2-5x+1)-(3x^2-3x-3)=-2(x-2)$ v $(x^2-2)-(x^2-3x+4)=3(x-2)$

Ta có thể trục căn thức 2 vế : $\frac{-2x+4}{\sqrt{3x^2-5x+1}+\sqrt{3(x^2-x+1)}}=\frac{3x-6}{\sqrt{x^2-2}+\sqrt{x^2-3x+4}}$

Dể dàng nhận thấy x=2 là nghiệm duy nhất của phương trình .

Bài 2. Giải phương trình sau **(OLYMPIC 30/4 đề nghị)** : $\sqrt{x^2+12}+5=3x+\sqrt{x^2+5}$

Giải: Để phương trình có nghiệm thì : $\sqrt{x^2+12}-\sqrt{x^2+5}=3x-5\ge 0\Leftrightarrow x\ge\frac{5}{3}$

Ta nhận thấy : x=2 là nghiệm của phương trình , như vậy phương trình có thể phân tích về dạng $(x-2)A(x)=0$, để thực hiện được điều đó ta phải nhóm , tách như sau :

$$\sqrt{x^2+12}-4=3x-6+\sqrt{x^2+5}-3 \Leftrightarrow \frac{x^2-4}{\sqrt{x^2+12}+4}=3(x-2)+\frac{x^2-4}{\sqrt{x^2+5}+3}$$

$$\Leftrightarrow (x-2)\left(\frac{x+2}{\sqrt{x^2+12}+4}-\frac{x+1}{\sqrt{x^2+5}+3}-3\right)=0 \Leftrightarrow x=2$$

Dễ dàng chứng minh được : $\dfrac{x+2}{\sqrt{x^2+12}+4}-\dfrac{x+2}{\sqrt{x^2+5}+3}-3<0, \forall x>\dfrac{5}{3}$

Bài 3. Giải phương trình : $\sqrt[3]{x^2-1}+x=\sqrt{x^3-1}$

Giải :Đk $x \geq \sqrt[3]{2}$

Nhận thấy x=3 là nghiệm của phương trình , nên ta biến đổi phương trình

$$\sqrt[3]{x^2-1}-2+x-3=\sqrt{x^3-2}-5 \Leftrightarrow (x-3)\left[1+\frac{x+3}{\sqrt[3]{(x^2-1)^2}+2\sqrt[3]{x^2-1}+4}\right]=\frac{(x-3)(x^2+3x+9)}{\sqrt{x^3-2}+5}$$

Ta chứng minh : $1+\dfrac{x+3}{\sqrt[3]{(x^2-1)^2}+2\sqrt[3]{x^2-1}+4}=1+\dfrac{x+3}{\left(\sqrt[3]{x^2-1}+1\right)^2+3}<2<\dfrac{x^2+3x+9}{\sqrt{x^3-2}+5}$

Vậy pt có nghiệm duy nhất x=3

2.2. Đưa về "hệ tạm "

a) Phương pháp

❖ Nếu phương trình vô tỉ có dạng $\sqrt{A}+\sqrt{B}=C$, mà : $A-B=\alpha C$

ở dây C có thể là hàng số ,có thể là biểu thức của x. Ta có thể giải như sau :

$\dfrac{A-B}{\sqrt{A}-\sqrt{B}}=C \Rightarrow \sqrt{A}-\sqrt{B}=\alpha$, khi đĩ ta có hệ: $\begin{cases}\sqrt{A}+\sqrt{B}=C\\ \sqrt{A}-\sqrt{B}=\alpha\end{cases} \Rightarrow 2\sqrt{A}=C+\alpha$

b) Ví dụ

Bài 4. Giải phương trình sau : $\sqrt{2x^2+x+9}+\sqrt{2x^2-x+1}=x+4$

Giải:

Ta thấy : $(2x^2+x+9)-(2x^2-x+1)=2(x+4)$

$x=-4$ không phải là nghiệm

Xét $x \neq -4$

Trục căn thức ta có : $\dfrac{2x+8}{\sqrt{2x^2+x+9}-\sqrt{2x^2-x+1}}=x+4 \Rightarrow \sqrt{2x^2+x+9}-\sqrt{2x^2-x+1}=2$

Vậy ta có hệ: $\begin{cases}\sqrt{2x^2+x+9}-\sqrt{2x^2-x+1}=2\\ \sqrt{2x^2+x+9}+\sqrt{2x^2-x+1}=x+4\end{cases} \Rightarrow 2\sqrt{2x^2+x+9}=x+6 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\ x=\dfrac{8}{7}\end{array}\right.$

Thử lại thỏa; vậy phương trình có 2 nghiệm : x=0 v x=$\dfrac{8}{7}$

Bài 5. Giải phương trình : $\sqrt{2x^2+x+1}+\sqrt{x^2-x+1}=3x$

Ta thấy : $(2x^2+x+1)-(x^2-x+1)=x^2+2x$, như vậy không thỏa mãn điều kiện trên.

Ta có thể chia cả hai vế cho x và đặt $t=\dfrac{1}{x}$ thì bài toán trở nên đơn giản hơn

Bài tập đề nghị

Giải các phương trình sau :

$x^2+3x+1= \; x+3 \; \sqrt{x^2+1}$	$\sqrt[3]{x^2-1}+\sqrt{3x^3-2}=3x-2$
$\sqrt{4-3\sqrt{10-3x}}=x-2$ ***(HSG Toàn Quốc 2002)***	$2x^2-11x+21-3\sqrt[3]{4x-4}=0$ ***(OLYMPIC 30/4-2007)***
$2\sqrt{\; 2-x \quad 5-x \;}=x+\sqrt{\; 2-x \quad 10-x \;}$	$\sqrt{2x^2-1}+\sqrt{x^2-3x-2}=\sqrt{2x^2+2x+3}+\sqrt{x^2-x+2}$
$\sqrt[3]{x^2+4}=\sqrt{x-1}+2x-3$	$\sqrt{2x^2+16x+18}+\sqrt{x^2-1}=2x+4$
	$\sqrt{x^2+15}=3x-2+\sqrt{x^2+8}$

3. Phương trình biến đổi về tích

❖ **Sử dụng đẳng thức**

$u+v=1+uv \Leftrightarrow \; u-1 \quad v-1 \; =0$

$au+bv=ab+vu \Leftrightarrow \; u-b \quad v-a \; =0$

$A^2=B^2$

Bài 1. Giải phương trình : $\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{x+2}=1+\sqrt[3]{x^2+3x+2}$

Giải: $pt \Leftrightarrow \; \sqrt[3]{x+1}-1 \quad \sqrt[3]{x+2}-1 \; =0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-1 \end{array}\right.$

Bi 2. Giải phương trình : $\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{x^2}=\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2+x}$

Giải:

+ $x=0$, không phải là nghiệm

+ $x\neq 0$, ta chia hai vế cho x: $\sqrt[3]{\dfrac{x+1}{x}}+\sqrt[3]{x}=1+\sqrt[3]{x+1} \Leftrightarrow \left(\sqrt[3]{\dfrac{x+1}{x}}-1\right) \; \sqrt[3]{x}-1 \; =0 \Leftrightarrow x=1$

Bài 3. Giải phương trình: $\sqrt{x+3}+2x\sqrt{x+1}=2x+\sqrt{x^2+4x+3}$

Giải: $dk: x\geq -1$

pt$\Leftrightarrow \; \sqrt{x+3}-2x \quad \sqrt{x+1}-1 \; =0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=0 \end{array}\right.$

Bài 4. Giải phương trình : $\sqrt{x+3}+\dfrac{4x}{\sqrt{x+3}}=4\sqrt{x}$

Giải:

Đk: $x\geq 0$

Chia cả hai vế cho $\sqrt{x+3}$: $1+\dfrac{4x}{x+3}=2\sqrt{\dfrac{4x}{x+3}} \Leftrightarrow \left(1-\sqrt{\dfrac{4x}{x+3}}\right)^2=0 \Leftrightarrow x=1$

❖ **Dùng hằng đẳng thức**

Biến đổi phương trình về dạng : $A^k=B^k$

Bài 1. Giải phương trình : $\sqrt{\sqrt{3}-x}=x\sqrt{\sqrt{3}+x}$

Giải:

Đk: $0\leq x\leq \sqrt{3}$ khi đó pt đ cho tương đương : $x^3+\sqrt{3}x^2+x-\sqrt{3}=0 \Leftrightarrow \left(x+\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^3=\dfrac{10}{3\sqrt{3}} \Leftrightarrow x=\dfrac{\sqrt[3]{10}-1}{\sqrt{3}}$

Bài 2. Giải phương trình sau : $2\sqrt{x+3}=9x^2-x-4$

Giải:

Đk: $x \geq -3$ phương trình tương đương : $\left(1+\sqrt{3+x}\right)^2 = 9x^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{x+3}+1=3x\\ \sqrt{x+3}+1=-3x\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1\\ x=\dfrac{-5-\sqrt{97}}{18}\end{array}\right.$

Bài 3. Giải phương trình sau : $2+3\sqrt[3]{9x^2\left(x+2\right)} = 2x+3\sqrt[3]{3x\left(x+2\right)^2}$

Giải : pttt $\Leftrightarrow \left(\sqrt[3]{x+2}-\sqrt[3]{3x}\right)^3 = 0 \Leftrightarrow x=1$

II. PHƯƠNG PHÁP ĐẶT ẨN PHỤ

1. Phương pháp đặt ẩn phụ thông thường

➢ Đối với nhiều phương trình vô vô tỉ , để giải chúng ta có thể đặt $t = f\left(x\right)$ và chú ý điều kiện của t nếu phương trình ban đầu trở thành phương trình chứa một biến t quan trọng hơn ta có thể giải được phương trình đó theo t thì việc đặt phụ xem như "hoàn toàn " .Nói chung những phương trình mà có thể đặt hoàn toàn $t = f\left(x\right)$ thường là những phương trình dễ .

Bài 1. Giải phương trình: $\sqrt{x-\sqrt{x^2-1}}+\sqrt{x+\sqrt{x^2-1}}=2$

Điều kiện: $x \geq 1$

Nhận xét. $\sqrt{x-\sqrt{x^2-1}}.\sqrt{x+\sqrt{x^2-1}}=1$

Đặt $t=\sqrt{x-\sqrt{x^2-1}}$ thì phương trình có dạng: $t+\dfrac{1}{t}=2 \Leftrightarrow t=1$

Thay vào tìm được $x=1$

Bài 2. Giải phương trình: $2x^2-6x-1=\sqrt{4x+5}$

Giải

Điều kiện: $x \geq -\dfrac{4}{5}$

Đặt $t=\sqrt{4x+5}(t \geq 0)$ thì $x=\dfrac{t^2-5}{4}$. Thay vào ta có phương trình sau:

$$2.\frac{t^4-10t^2+25}{16}-\frac{6}{4}(t^2-5)-1=t \Leftrightarrow t^4-22t^2-8t+27=0$$

$$\Leftrightarrow (t^2+2t-7)(t^2-2t-11)=0$$

Ta tìm được bốn nghiệm là: $t_{1,2}=-1\pm 2\sqrt{2};\ t_{3,4}=1\pm 2\sqrt{3}$

Do $t \geq 0$ nên chỉ nhận các gái trị $t_1=-1+2\sqrt{2}, t_3=1+2\sqrt{3}$

Từ đó tìm được các nghiệm của phương trình l: $x=1-\sqrt{2}$ và $x=2+\sqrt{3}$

Cách khác: Ta có thể bình phương hai vế của phương trình với điều kiện $2x^2-6x-1\geq 0$

Ta được: $x^2(x-3)^2-(x-1)^2=0$, từ đó ta tìm được nghiệm tương ứng.

Đơn giản nhất là ta đặt : $2y-3=\sqrt{4x+5}$ và đưa về hệ đối xứng (**Xem phần đặt ẩn phụ đưa về hệ)**

Bài 3. Giải phương trình sau: $x+\sqrt{5+\sqrt{x-1}}=6$

Điều kiện: $1\leq x\leq 6$

Đặt $y=\sqrt{x-1}(y\geq 0)$ thì phương trình trở thnh: $y^2+\sqrt{y+5}=5 \Leftrightarrow y^4-10y^2-y+20=0$ (với $y\leq\sqrt{5}) \Leftrightarrow (y^2+y-4)(y^2-y-5)=0 \Leftrightarrow y=\dfrac{1+\sqrt{21}}{2}$(loại), $y=\dfrac{-1+\sqrt{17}}{2}$

Từ đó ta tìm được các giá trị của $x = \dfrac{11-\sqrt{17}}{2}$

Bài 4. **(THTT 3-2005)** Giải phương trình sau : $x = \ 2004+\sqrt{x}\ \ \ 1-\sqrt{1-\sqrt{x}}\ \ ^{2}$

Giải: đk $0 \le x \le 1$

Đặt $y = \sqrt{1-\sqrt{x}}$ pttt$\Leftrightarrow 2\ \ 1-y\ \ ^{2}\ \ y^2+y-1002\ \ =0 \Leftrightarrow y=1 \Leftrightarrow x=0$

Bài 5. Giải phương trình sau : $x^2+2x\sqrt{x-\dfrac{1}{x}}=3x+1$

Giải:

Điều kiện: $-1 \le x < 0$

Chia cả hai vế cho x ta nhận được: $x+2\sqrt{x-\dfrac{1}{x}}=3+\dfrac{1}{x}$

Đặt $t = x-\dfrac{1}{x}$, ta giải được.

Bài 6. Giải phương trình : $x^2+\sqrt[3]{x^4-x^2}=2x+1$

Giải: $x=0$ không phải là nghiệm , Chia cả hai vế cho x ta được: $\left(x-\dfrac{1}{x}\right)+\sqrt[3]{x-\dfrac{1}{x}}=2$

Đặt t=$\sqrt[3]{x-\dfrac{1}{x}}$, Ta có : $t^3+t-2=0 \Leftrightarrow t=1 \Leftrightarrow x=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$

Bài tập đề nghị

Giải các phương trình sau

$15x-2x^2-5=\sqrt{2x^2-15x+11}$	$x^2+\sqrt{x^2+11}=31$
$(x+5)(2-x)=3\sqrt{x^2+3x}$	$2\sqrt[n]{(1+x)^2}+3\sqrt[n]{1-x^2}+\sqrt[n]{(1-x)^2}=0$
$\sqrt{(1+x)(2-x)}=1+2x-2x^2$	$x=(2004+\sqrt{x})(1-\sqrt{1-\sqrt{x}})^2$
$x+\sqrt{17-x^2}+x\sqrt{17-x^2}=9$	$(x+3\sqrt{x}+2)(x+9\sqrt{x}+18)=168x$
$\sqrt{3x-2}+\sqrt{x-1}=4x-9+2\sqrt{3x^2-5x+2}$	$\sqrt{1-x^2}+2\sqrt[3]{1-x^2}=3$

Nhận xét : đối với cách đặt ẩn phụ như trên chúng ta chỉ giải quyết được một lớp bài đơn giản, đôi khi phương trình đối với t lại quá khó giải

2. Đặt ẩn phụ đưa về phương trình thuần nhất bậc 2 đối với 2 biến :

- Chúng ta đã biết cách giải phương trình: $u^2+\alpha uv+\beta v^2=0$ (1) bằng cách

Xét $v \ne 0$ phương trình trở thành : $\left(\dfrac{u}{v}\right)^2+\alpha\left(\dfrac{u}{v}\right)+\beta=0$

$v=0$ thử trực tiếp

Các trường hợp sau cũng đưa về được (1)

- ✓ $a.A\ \ x\ \ +bB\ \ x\ \ =c\sqrt{A\ \ x\ \ .B\ \ x}$
- ✓ $\alpha u+\beta v=\sqrt{mu^2+nv^2}$

Chúng ta hãy thay các biểu thức A(x) , B(x) bởi các biểu thức vô tỉ thì sẽ nhận được phương trình vô tỉ theo dạng này .

a) . Phương trình dạng : $a.A(x)+bB(x)=c\sqrt{A(x).B(x)}$

Như vậy phương trình $Q(x)=\alpha\sqrt{P(x)}$ có thể giải bằng phương pháp trên nếu $\begin{cases}P(x)=A(x).B(x)\\ Q(x)=aA(x)+bB(x)\end{cases}$

Xuất phát từ đẳng thức :

$x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)$

$x^4+x^2+1=(x^4+2x^2+1)-x^2=(x^2+x+1)(x^2-x+1)$

$x^4+1=(x^2-\sqrt{2}x+1)(x^2+\sqrt{2}x+1)$

$4x^4+1=(2x^2-2x+1)(2x^2+2x+1)$

Hãy tạo ra những phương trình vô tỉ dạng trên ví dụ như: $4x^2-2\sqrt{2}x+4=\sqrt{x^4+1}$

Để có một phương trình đẹp , chúng ta phải chọn hệ số a,b,c sao cho phương trình bậc hai $at^2+bt-c=0$ giải " nghiệm đẹp"

Bài 1. Giải phương trình : $2(x^2+2)=5\sqrt{x^3+1}$

Giải: Đặt $u=\sqrt{x+1}, v=\sqrt{x^2-x+1}$

Phương trình trở thành : $2(u^2+v^2)=5uv \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}u=2v\\ u=\frac{1}{2}v\end{array}\right.$ Tìm được: $x=\frac{5\pm\sqrt{37}}{2}$

Bài 2. Giải phương trình : $x^2-3x+1=-\frac{\sqrt{3}}{3}\sqrt{x^4+x^2+1}$

Bài 3: giải phương trình sau : $2x^2+5x-1=7\sqrt{x^3-1}$

Giải:

Đk: $x\geq 1$

Nhận xt : Ta viết $\alpha(x-1)+\beta(x^2+x+1)=7\sqrt{(x-1)(x^2+x+1)}$

Đồng nhất thức ta được: $3(x-1)+2(x^2+x+1)=7\sqrt{(x-1)(x^2+x+1)}$

Đặt $u=x-1\geq 0, v=x^2+x+1>0$, ta được: $3u+2v=7\sqrt{uv} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}v=9u\\ v=\frac{1}{4}u\end{array}\right.$

Ta được : $x=4\pm\sqrt{6}$

Bài 4. Giải phương trình : $x^3-3x^2+2\sqrt{(x+2)^3}-6x=0$

Giải:

Nhận xét : Đặt $y=\sqrt{x+2}$ ta hãy biến pt trên về phương trình thuần nhất bậc 3 đối với x và y :

$x^3-3x^2+2y^3-6x=0 \Leftrightarrow x^3-3xy^2+2y^3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=y\\ x=-2y\end{array}\right.$

Pt có nghiệm : $x=2, \quad x=2-2\sqrt{3}$

b).Phương trình dạng : $\alpha u+\beta v=\sqrt{mu^2+nv^2}$

Phương trình cho ở dạng này thường khó "phát hiện " hơn dạng trên , nhưng nếu ta bình phương hai vế thì đưa về được dạng trên.

Bài 1. giải phương trình : $x^2+3\sqrt{x^2-1}=\sqrt{x^4-x^2+1}$

Giải:

Ta đặt : $\begin{cases} u = x^2 \\ v=\sqrt{x^2-1} \end{cases}$ khi đó phương trình trở thành : $u+3v=\sqrt{u^2-v^2}$

Bài 2. Giải phương trình sau : $\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{2x-1}=\sqrt{3x^2+4x+1}$

Giải

Đk $x\ge\frac{1}{2}$. Bình phương 2 vế ta có :

$$\sqrt{x^2+2x\quad 2x-1}=x^2+1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+2x\quad 2x-1}=x^2+2x\;-\;2x-1$$

Ta có thể đặt : $\begin{cases} u=x^2+2x \\ v=2x-1 \end{cases}$ khi đó ta có hệ : $uv=u^2-v^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u=\frac{1-\sqrt{5}}{2}v \\ u=\frac{1+\sqrt{5}}{2}v \end{array}\right.$

Do $u,v\ge 0$. $u=\frac{1+\sqrt{5}}{2}v \Leftrightarrow x^2+2x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\;2x-1$

Bài 3. giải phương trình : $\sqrt{5x^2-14x+9}-\sqrt{x^2-x-20}=5\sqrt{x+1}$

Giải:

Đk $x\ge 5$. Chuyển vế bình phương ta được: $2x^2-5x+2=5\sqrt{x^2-x-20\quad x+1}$

Nhận xét : không tồn tại số α,β để : $2x^2-5x+2=\alpha\;\;x^2-x-20\;+\beta\;\;x+1$ vậy ta không thể đặt

$\begin{cases} u=x^2-x-20 \\ v=x+1 \end{cases}$.

Nhưng may mắn ta có : $x^2-x-20\quad x+1\;=\;x+4\quad x-5\quad x+1\;=\;x+4\quad x^2-4x-5$

Ta viết lại phương trình: $2\;\;x^2-4x-5\;+3\;\;x+4\;=5\sqrt{(x^2-4x-5)(x+4)}$. Đến đây bài toán được giải quyết .

Các em hãy tự sáng tạo cho mình những phương trình vô tỉ "đẹp " theo cách trên

3. Phương pháp đặt ẩn phụ không hoàn toàn

- Từ những phương trình tích $\sqrt{x+1}-1\quad\sqrt{x+1}-x+2\;=0$, $\sqrt{2x+3}-x\quad\sqrt{2x+3}-x+2\;=0$

Khai triển và rút gọn ta sẽ được những phương trình vô tỉ không tầm thường chút nào, độ khó của phương trình dạng này phụ thuộc vào phương trình tích mà ta xuất phát .
Từ đó chúng ta mới đi tìm cách giải phương trình dạng này .Phương pháp giải được thể hiện qua các ví dụ sau .

Bài 1. Giải phương trình : $x^2+\;3-\sqrt{x^2+2}\;\;x=1+2\sqrt{x^2+2}$

Giải:

$t=\sqrt{x^2+2}$, ta có : $t^2-\;2+x\;\;t-3+3x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=3 \\ t=x-1 \end{array}\right.$

Bài 2. Giải phương trình : $x+1\ \sqrt{x^2-2x+3}=x^2+1$

Giải:

Đặt : $t=\sqrt{x^2-2x+3},\quad t\ge\sqrt{2}$ Khi đó phương trình trở thnh : $x+1\ t=x^2+1 \Leftrightarrow x^2+1-\ x+1\ t=0$

Bây giờ ta thêm bớt , để được phương trình bậc 2 theo t có Δ chẵn

: $x^2-2x+3-\ x+1\ t+2\ x-1\ =0 \Leftrightarrow t^2-\ x+1\ t+2\ x-1\ =0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=2 \\ t=x-1 \end{array}\right.$

Từ một phương trình đơn giản : $\sqrt{1-x}-2\sqrt{1+x}\quad \sqrt{1-x}-2+\sqrt{1+x}\ =0$, khai triển ra ta sẽ được pt sau

Bài 3. Giải phương trình sau : $4\sqrt{x+1}-1=3x+2\sqrt{1-x}+\sqrt{1-x^2}$

Giải:

Nhận xét : đặt $t=\sqrt{1-x}$, pttt: $4\sqrt{1+x}=3x+2t+t\sqrt{1+x}$ (1)

Ta rút $x=1-t^2$ thay vào thì được pt: $3t^2-\ 2+\sqrt{1+x}\ t+4\ \sqrt{1+x}-1\ =0$

Nhưng không có sự may mắn để giải được phương trình theo t $\Delta=\ 2+\sqrt{1+x}\ ^2-48\ \sqrt{x+1}-1$ không có dạng bình phương .

Muốn đạt được mục đích trên thì ta phải tách 3x theo $\sqrt{1-x}\ ^2,\ \sqrt{1+x}\ ^2$

Cụ thể như sau : $3x=-\ 1-x\ +2\ 1+x$ thay vào pt (1) ta được:

Bài 4. Giải phương trình: $2\sqrt{2x+4}+4\sqrt{2-x}=\sqrt{9x^2+16}$

Giải .

Bình phương 2 vế phương trình: $4\ 2x+4\ +16\sqrt{2\ 4-x^2}\ +16\ 2-x\ =9x^2+16$

Ta đặt : $t=\sqrt{2\ 4-x^2}\ \ge 0$. Ta được: $9x^2-16t-32+8x=0$

Ta phải tách $9x^2=\alpha 2\ 4-x^2\ +\ 9+2\alpha\ x^2-8\alpha$ làm sao cho Δ_t có dạng chính phương .

Nhận xét : Thông thường ta chỉ cần nhóm sao cho hết hệ số tự do thì sẽ đạt được mục đích

4. Đặt nhiều ẩn phụ đưa về tích

- Xuất phát từ một số hệ "đại số " đẹp chúng ta có thể tạo ra được những phương trình vô tỉ mà khi giải nó chúng ta lại đặt nhiều ẩn phụ và tìm mối quan hệ giữa các ẩn phụ để đưa về hệ

Xuất phát từ đẳng thức $a+b+c\ ^3=a^3+b^3+c^3+3\ a+b\ \ b+c\ \ c+a$, Ta có

$a^3+b^3+c^3=\ a+b+c\ ^3 \Leftrightarrow\ a+b\ \ a+c\ \ b+c\ =0$

Từ nhận xét này ta có thể tạo ra những phương trình vô tỉ có chứa căn bậc ba .

$\sqrt[3]{7x+1}-\sqrt[3]{x^2-x-8}+\sqrt[3]{x^2-8x+1}=2$

$\sqrt[3]{3x+1}+\sqrt[3]{5-x}+\sqrt[3]{2x-9}-\sqrt[3]{4x-3}=0$

Bài 1. Giải phương trình : $x=\sqrt{2-x}.\sqrt{3-x}+\sqrt{3-x}.\sqrt{5-x}+\sqrt{5-x}.\sqrt{2-x}$

Giải : $\begin{cases} u=\sqrt{2-x} \\ v=\sqrt{3-x} \\ w=\sqrt{5-x} \end{cases}$, ta có : $\begin{cases} 2-u^2=uv+vw+wu \\ 3-v^2=uv+vw+wu \\ 5-w^2=uv+vw+wu \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u+v\ \ u+w\ =2 \\ u+v\ \ v+w\ =3 \\ v+w\ \ u+w\ =5 \end{cases}$, giải hệ ta được:

$u=\dfrac{\sqrt{30}}{60} \Leftrightarrow x=\dfrac{239}{120}$

Bài 2. Giải phương trình sau : $\sqrt{2x^2-1}+\sqrt{x^2-3x-2}=\sqrt{2x^2+2x+3}+\sqrt{x^2-x+2}$

Giải . Ta đặt : $\begin{cases} a=\sqrt{2x^2-1} \\ b=\sqrt{x^2-3x-2} \\ c=\sqrt{2x^2+2x+3} \\ d=\sqrt{x^2-x+2} \end{cases}$, khi đó ta có : $\begin{cases} a+b=c+d \\ a^2-b^2=c^2-d^2 \end{cases} \Leftrightarrow x=-2$

Bài 3. Giải các phương trình sau

1) $\sqrt{4x^2+5x+1}-2\sqrt{x^2-x+1}=9x-3$

2) $\sqrt{x}+\sqrt[4]{x\ \ 1-x\ }+\sqrt[4]{\ 1-x\ ^3}=\sqrt{1-x}+\sqrt[4]{x^3}+\sqrt[4]{x^2\ \ 1-x}$

5. Đặt ẩn phụ đưa về hệ:

5.1 Đặt ẩn phụ đưa về hệ thông thường

- Đặt $u=\alpha\ \ x\ \ ,v=\beta\ \ x$ và tìm mối quan hệ giữa $\alpha\ \ x$ và $\beta\ \ x$ từ đó tìm được hệ theo u,v

Bài 1. Giải phương trình: $x\sqrt[3]{25-x^3}\ \ x+\sqrt[3]{25-x^3}\ \ =30$

Đặt $y=\sqrt[3]{35-x^3}\Rightarrow x^3+y^3=35$

Khi đó phương trình chuyển về hệ phương trình sau: $\begin{cases} xy(x+y)=30 \\ x^3+y^3=35 \end{cases}$, giải hệ này ta tìm được $(x;y)=(2;3)=(3;2)$. Tức là nghiệm của phương trình là $x\in\{2;3\}$

Bài 2. Giải phương trình: $\sqrt{\sqrt{2}-1-x}+\sqrt[4]{x}=\dfrac{1}{\sqrt[4]{2}}$

Điều kiện: $0\le x\le\sqrt{2}-1$

Đặt $\begin{cases} \sqrt{\sqrt{2}-1-x}=u \\ \sqrt[4]{x}=v \end{cases}\Rightarrow 0\le u\le\sqrt{\sqrt{2}-1},0\le v\le\sqrt[4]{\sqrt{2}-1}$

Ta đưa về hệ phương trình sau: $\begin{cases} u+v=\dfrac{1}{\sqrt[4]{2}} \\ u^2+v^4=\sqrt{2}-1 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} u=\dfrac{1}{\sqrt[4]{2}}-v \\ \left(\dfrac{1}{\sqrt[4]{2}}-v\right)^2+v^4=\sqrt{2}-1 \end{cases}$

Giải phương trình thứ 2: $(v^2+1)^2-\left(v+\dfrac{1}{\sqrt[4]{2}}\right)^2=0$, từ đó tìm ra v rồi thay vào tìm nghiệm của phương trình.

Bài 3. Giải phương trình sau: $x+\sqrt{5+\sqrt{x-1}}=6$

Điều kiện: $x\ge1$

Đặt $a=\sqrt{x-1},\ b=\sqrt{5+\sqrt{x-1}}(a\ge0,b\ge0)$ thì ta đưa về hệ phương trình sau:

$\begin{cases} a^2+b=5 \\ b^2-a=5 \end{cases}\to(a+b)(a-b+1)=0\Rightarrow a-b+1=0\Rightarrow a=b-1$

Vậy $\sqrt{x-1}+1=\sqrt{5+\sqrt{x-1}}\Leftrightarrow\sqrt{x-1}=5-x\Rightarrow x=\dfrac{11-\sqrt{17}}{2}$

Bài 8. Giải phương trình: $\dfrac{6-2x}{\sqrt{5-x}}+\dfrac{6+2x}{\sqrt{5+x}}=\dfrac{8}{3}$

Giải

Điều kiện: $-5<x<5$

Đặt $u=\sqrt{5-x}, v=\sqrt{5-y}\quad 0<u,v<\sqrt{10}$.

Khi đó ta được hệ phương trình: $\begin{cases} u^2+v^2=10 \\ -\dfrac{4}{u}-\dfrac{4}{v}+2(u+z)=\dfrac{8}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (u+v)^2=10+2uv \\ (u+v)\left(1-\dfrac{2}{uv}\right)=\dfrac{4}{3} \end{cases}$

5.2 Xây dựng phương trình vô tỉ từ hệ đối xứng loại II

- Ta hãy đi tìm nguồn gốc của những bài toán giải phương trình bằng cách đưa về hệ đối xứng loại II
- Ta xét một hệ phương trình đối xứng loại II sau : $\begin{cases} (x+1)^2=y+2 & (1) \\ (y+1)^2=x+2 & (2) \end{cases}$ việc giải hệ này thì đơn giản

Bây giời ta sẽ biến hệ thành phương trình bằng cách đặt $y=f(x)$ sao cho (2) luôn đúng , $y=\sqrt{x+2}-1$, khi đó ta có phương trình : $(x+1)^2=(\sqrt{x+2}-1)+1 \Leftrightarrow x^2+2x=\sqrt{x+2}$

Vậy để giải phương trình : $x^2+2x=\sqrt{x+2}$ ta đặt lại như trên và đưa về hệ

Bằng cách tương tự xét hệ tổng quát dạng bậc 2 : $\begin{cases} (\alpha x+\beta)^2=ay+b \\ (\alpha y+\beta)^2=ax+b \end{cases}$, ta sẽ xây dựng được phương trình dạng sau : đặt $\alpha y+\beta=\sqrt{ax+b}$, khi đó ta có phương trình : $(\alpha x+\beta)^2=\dfrac{a}{\alpha}\sqrt{ax+b}+b-\dfrac{\beta}{\alpha}$

Tương tự cho bậc cao hơn : $(\alpha x+\beta)^n=\dfrac{a}{\alpha}\sqrt[n]{ax+b}+b-\dfrac{\beta}{\alpha}$

Tóm lại phương trình thường cho dưới dạng khai triển ta phải viết về dạng : $(\alpha x+\beta)^n=p\sqrt[n]{a'x+b'}+\gamma$ v đặt $\alpha y+\beta=\sqrt[n]{ax+b}$ để đưa về hệ , chú ý về dấu của α ???

Việc chọn $\alpha;\beta$ thông thường chúng ta chỉ cần viết dưới dạng : $(\alpha x+\beta)^n=p\sqrt[n]{a'x+b'}+\gamma$ là chọn được.

Bài 1. Giải phương trình: $x^2-2x=2\sqrt{2x-1}$

Điều kiện: $x\geq\dfrac{1}{2}$

Ta có phương trình được viết lại là: $(x-1)^2-1=2\sqrt{2x-1}$

Đặt $y-1=\sqrt{2x-1}$ thì ta đưa về hệ sau: $\begin{cases} x^2-2x=2(y-1) \\ y^2-2y=2(x-1) \end{cases}$

Trừ hai vế của phương trình ta được $(x-y)(x+y)=0$

Giải ra ta tìm được nghiệm của phương trình là: $x=2+\sqrt{2}$

Bài 6. Giải phương trình: $2x^2-6x-1=\sqrt{4x+5}$

Giải

Điều kiện $x\geq-\dfrac{5}{4}$

Ta biến đổi phương trình như sau: $4x^2-12x-2=2\sqrt{4x+5}\Leftrightarrow(2x-3)^2=2\sqrt{4x+5}+11$

Đặt $2y-3=\sqrt{4x+5}$ ta được hệ phương trình sau: $\begin{cases}(2x-3)^2=4y+5\\(2y-3)^2=4x+5\end{cases}\Rightarrow(x-y)(x+y-1)=0$

Với $x=y\Rightarrow 2x-3=\sqrt{4x+5}\Rightarrow x=2+\sqrt{3}$

Với $x+y-1=0\Rightarrow y=1-x\rightarrow x=1-\sqrt{2}$

Kết luận: Nghiệm của phương trình là $\{1-\sqrt{2};1+\sqrt{3}\}$

Các em hãy xây dựng một số hệ dạng này ?

❖ **Dạng hệ gần đối xứng**

Ta xt hệ sau : $\begin{cases}(2x-3)^2=2y+x+1\\(2y-3)^2=3x+1\end{cases}$ (1) đây không phải là hệ đối xứng loại 2 nhưng chúng ta vẫn giải hệ được , và từ hệ này chúng ta xây dưng được bài toán phương trình sau :

Bài 1 . Giải phương trình: $4x^2+5-13x+\sqrt{3x+1}=0$

Nhận xét : Nếu chúng ta nhóm như những phương trình trước : $\left(2x-\frac{13}{4}\right)^2=\sqrt{3x+1}-\frac{33}{4}$

Đặt $2y-\frac{13}{4}=\sqrt{3x+1}$ thì chúng ta không thu được hệ phương trình mà chúng ta có thể giải được.

Để thu được hệ ***(1)*** ta đặt : $\alpha y+\beta=\sqrt{3x+1}$, chọn α,β sao cho hệ chúng ta có thể giải được , ***(đối xứng hoặc gần đối xứng)***

Ta có hệ : $\begin{cases}\alpha y+\beta\ ^2=3x+1\\4x^2-13x+5=-\alpha y-\beta\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha^2y^2+2\alpha\beta y-3x+\beta^2-1=0 & (1)\\4x^2-13x+\alpha y+5+\beta=0 & (2)\end{cases}$ (*)

Để giải hệ trên thì ta lấy (1) nhân với k cộng với (2): và mong muốn của chúng ta là có nghiệm $x=y$

Nên ta phải có : $\frac{\alpha^2}{4}=\frac{2\alpha\beta-3}{\alpha-13}=\frac{\beta^2-1}{5+\beta}$, ta chọn được ngay $\alpha=-2;\ \beta=3$

Ta có lời giải như sau :

Điều kiện: $x\ge-\frac{1}{3}$, Đặt $\sqrt{3x+1}=-(2y-3),\ (y\le\frac{3}{2})$

Ta có hệ phương trình sau: $\begin{cases}(2x-3)^2=2y+x+1\\(2y-3)^2=3x+1\end{cases}\Rightarrow(x-y)(2x+2y-5)=0$

Với $x=y\Rightarrow x=\frac{15-\sqrt{97}}{8}$

Với $2x+2y-5=0\Rightarrow x=\frac{11+\sqrt{73}}{8}$

Kết luận: tập nghiệm của phương trình là: $\left\{\frac{15-\sqrt{97}}{8};\frac{11+\sqrt{73}}{8}\right\}$

Chú ý : khi đã làm quen, chúng ta có thể tìm ngay $\alpha;\beta$ bằng cách viết lại phương trình

ta viết lại phương trình như sau: $(2x-3)^2=-\sqrt{3x+1}+x+4$

khi đó đặt $\sqrt{3x+1}=-2y+3$, nếu đặt $2y-3=\sqrt{3x+1}$ thì chúng ta không thu được hệ như mong muốn , ta thấy dấu của α cùng dấu với dấu trước căn.

Một cách tổng quát .

Xét hệ: $\begin{cases} f(x)=A.x+B.y+m & (1) \\ f(y)=A'.x+m' & (2) \end{cases}$ để hệ có nghiệm x = y thì : A-A'=B và m=m',

Nếu từ (2) tìm được hàm ngược $y=g\left(x\right)$ thay vào (1) ta được phương trình

Như vậy để xây dựng pt theo lối này ta cần xem xét để có hàm ngược và tìm được và hơn nữa hệ phải giải được.
Một số phương trình được xây dựng từ hệ.

Giải các phương trình sau

1) $4x^2-13x+5+\sqrt{3x+1}=0$	4) $\sqrt[3]{6x+1}=8x^3-4x-1$
2) $4x^2-13x+5+\sqrt{3x+1}=0$	5) $\frac{15}{2}\left(30x^2-4x\right)=2004\left(\sqrt{30060x+1}+1\right)$
3) $\sqrt[3]{81x-8}=x^3-2x^2+\frac{4}{3}x-2$	6) $\sqrt[3]{3x-5}=8x^3-36x^2+53-25$

Giải (3):

Phương trình : $\Leftrightarrow 27\sqrt[3]{81x-8}=27x^3-54x^2+36x-54 \Leftrightarrow 27\sqrt[3]{81x-8}=\left(3x-2\right)^3-46$

Ta đặt : $3y-2=\sqrt[3]{81x-8}$

Các em hãy xây dựng những phương trình dạng này !

III. PHƯƠNG PHÁP ĐÁNH GIÁ

1. Dùng hằng đẳng thức :

- Từ những đánh giá bình phương : $A^2+B^2\ge 0$, ta xây dựng phương trình dạng $A^2+B^2=0$

Từ phương trình $\left(\sqrt{5x-1}-2x\right)^2+\left(\sqrt{9-5x}-2\right)^2+\sqrt{x-1}=0$ ta khai triển ra có phương trình :

$4x^2+12+\sqrt{x-1}=4\left(x\sqrt{5x-1}+\sqrt{9-5x}\right)$

2. Dùng bất đẳng thức

- Một số phương trình được tạo ra từ dấu bằng của bất đẳng thức: $\begin{cases} A\ge m \\ B\le m \end{cases}$ nếu dấu bằng ỏ (1) và (2) cùng dạt được tại x_0 thì x_0 là nghiệm của phương trình $A=B$

Ta có : $\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\le 2$ Dấu bằng khi và chỉ khi $x=0$ và $\sqrt{x+1}+\frac{1}{\sqrt{x+1}}\ge 2$, dấu bằng khi và chỉ khi x=0. Vậy ta có phương trình: $\sqrt{1-2008x}+\sqrt{1+2008x}=\frac{1}{\sqrt{x+1}}+\sqrt{1+x}$

Đôi khi một số phương trình được tạo ra từ ý tưởng : $\begin{cases} A\ge f\left(x\right) \\ B\le f(x) \end{cases}$ khi đó : $A=B\Leftrightarrow \begin{cases} A=f\left(x\right) \\ B=f\left(x\right) \end{cases}$

✓ Nếu ta đoán trước được nghiệm thì việc dùng bất đẳng thức dễ dàng hơn, nhưng có nhiều bài nghiệm là vô tỉ việc đoán nghiệm không được, ta vẫn dùng bất đẳng thức để đánh giá được

Bài 1. Giải phương trình (OLYMPIC 30/4 -2007): $\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{x+1}}+\sqrt{x}=\sqrt{x+9}$

Giải: Đk $x \ge 0$

Ta có : $\left(\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{x+1}}+\sqrt{x}\right)^2 \le \left[\left(2\sqrt{2}\right)^2+x+1\right]\left[\dfrac{1}{x+1}+\left(\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}}\right)^2\right]=x+9$

Dấu bằng $\Leftrightarrow \dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{x+1}}=\dfrac{1}{\sqrt{x+1}} \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{7}$

Bài 2. Giải phương trình : $13\sqrt{x^2-x^4}+9\sqrt{x^2+x^4}=16$

Giải: Đk: $-1 \le x \le 1$

Biến đổi pt ta có : $x^2\left(13\sqrt{1-x^2}+9\sqrt{1+x^2}\right)^2=256$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki:

$\left(\sqrt{13}.\sqrt{13}.\sqrt{1-x^2}+3.\sqrt{3}.\sqrt{3}\sqrt{1+x^2}\right)^2 \le \left(13+27\right)\left(13-13x^2+3+3x^2\right)=40\left(16-10x^2\right)$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi: $10x^2\left(16-10x^2\right) \le \left(\dfrac{16}{2}\right)^2=64$

Dấu bằng $\Leftrightarrow \begin{cases}\sqrt{1-x^2}=\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{3}\\ 10x^2=16-10x^2\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{2}{\sqrt{5}}\\ x=-\dfrac{2}{\sqrt{5}}\end{array}\right.$

Bài 3. giải phương trình: $x^3-3x^2-8x+40-8\sqrt[4]{4x+4}=0$

Ta chứng minh : $8\sqrt[4]{4x+4} \le x+13$ và $x^3-3x^2-8x+40 \ge 0 \Leftrightarrow \left(x-3\right)^2\left(x+3\right) \ge x+13$

Bài tập đề nghị .

Giải các phương trình sau

$\sqrt{1-2x}+\sqrt{1+2x}=\sqrt{\dfrac{1-2x}{1+2x}}+\sqrt{\dfrac{1+2x}{1-2x}}$ $\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{1-x}+\sqrt{x}-\sqrt{1-x}=\sqrt{2}+\sqrt[4]{8}$ $2x^4+8=4\sqrt{4+x^4}+4\sqrt{x^4-4}$	$16x^4+5=6\sqrt[3]{4x^3+x}$ $x^3-3x^2-8x+40-8\sqrt[4]{4x+4}=0$ $\sqrt{8+x^3}+\sqrt{64-x^3}=x^4-8x^2+28$ $\sqrt{2-x^2}+\sqrt{2-\dfrac{1}{x^2}}=4-\left(x+\dfrac{1}{x}\right)$

3. Xây dựng bài toán từ tính chất cực trị hình học

3.1 Dùng tọa độ của véc tơ

❖ Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, Cho các véc tơ: $\vec{u}=\left(x_1;y_1\right)$, $\vec{v}=\left(x_2;y_2\right)$ khi đó ta có

✓ $\left|\vec{u}+\vec{v}\right| \le \left|\vec{u}\right|+\left|\vec{v}\right| \Leftrightarrow \sqrt{\left(x_1+x_2\right)^2+\left(y_1+y_2\right)^2} \le \sqrt{x_1^2+y_1^2}+\sqrt{x_2^2+y_2^2}$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi hai véc tơ $\vec{u}$, $\vec{v}$ cùng hướng $\Leftrightarrow \dfrac{x_1}{x_2}=\dfrac{y_1}{y_2}=k \ge 0$, chú ý tỉ số phải dương

✓ $\vec{u}.\vec{v}=\left|\vec{u}\right|.\left|\vec{v}\right|.\cos\alpha\le\left|\vec{u}\right|.\left|\vec{v}\right|$, dấu bằng xẩy ra khi và chỉ khi $\cos\alpha=1\Leftrightarrow u\uparrow\uparrow\vec{v}$

3.2 Sử dụng tính chất đặc biệt về tam giác

✓ Nếu tam giác ABC là tam giác đều , thì với mọi điểm M trên mặt phẳng tam giác, ta luôn có $MA+MB+MC\ge OA+OB+OC$ với O là tâm của đường tròn .Dấu bằng xẩy ra khi và chỉ khi $M\equiv O$.

✓ Cho tam giác ABC có ba góc nhọn và điểm M tùy ý trong mặt mặt phẳng Thì MA+MB+MC nhỏ nhất khi điểm M nhìn các cạnh AB,BC,AC dưới cùng một góc 120^0

Bài tập

1) $\sqrt{2x^2-2x+1}+\sqrt{2x^2-\left(\sqrt{3}-1\right)x+1}+\sqrt{2x^2+\left(\sqrt{3}+1\right)x+1}=3$

2) $\left|\sqrt{x^2-4x+5}-\sqrt{x^2-10x+50}\right|=5$

IV. PHƯƠNG PHÁP HÀM SỐ

1.Xây dựng phương trình vô tỉ dựa theo hàm đơn điệu

➢ Dựa vào kết quả : “ Nếu $y=f\left(t\right)$ là hàm đơn điệu thì $f\left(x\right)=f\left(t\right)\Leftrightarrow x=t$” ta có thể xây dựng được những phương trình vô tỉ

Xuất phát từ hàm đơn điệu : $y=f\left(x\right)=2x^3+x^2+1$ mọi $x\ge 0$ ta xây dựng phương trình :

$f\left(x\right)=f\left(\sqrt{3x-1}\right)\Leftrightarrow 2x^3+x^2+1=2\left(\sqrt{3x-1}\right)^3+\sqrt{(3x-1)^2}+1$, Rút gọn ta được phương trình

$2x^3+x^2-3x+1=2\left(3x-1\right)\sqrt{3x-1}$

Từ phương trình $f\left(x+1\right)=f\left(\sqrt{3x-1}\right)$ thì bài toán sẽ khó hơn $2x^3+7x^2+5x+4=2\left(3x-1\right)\sqrt{3x-1}$

Để gải hai bài toán trên chúng ta có thể làm như sau :

Đặt $y=\sqrt{3x-1}$ khi đó ta có hệ : $\begin{cases}2x^3+7x^2+5x+4=2y^3\\3x-1=y^2\end{cases}$ cộng hai phương trình ta được:

$2\left(x+1\right)^3+\left(x+1\right)^2=2y^3+y^2$

Hãy xây dựng những hàm đơn điệu và những bài toán vô tỉ theo dạng trên ?

Bài 1. Giải phương trình : $\left(2x+1\right)\left(2+\sqrt{4x^2+4x+4}\right)+3x\left(2+\sqrt{9x^2+3}\right)=0$

Giải:

$\Leftrightarrow\left(2x+1\right)\left(2+\sqrt{\left(2x+1\right)^2+3}\right)=\left(-3x\right)\left(2+\sqrt{\left(-3x\right)^2+3}\right)\Leftrightarrow f\left(2x+1\right)=f\left(-3x\right)$

Xét hàm số $f\left(t\right)=t\left(2+\sqrt{t^2+3}\right)$, là hàm đồng biến trên R, ta có $x=-\dfrac{1}{5}$

Bài 2. Giải phương trình $x^3-4x^2-5x+6=\sqrt[3]{7x^2+9x-4}$

Giải . Đặt $y=\sqrt[3]{7x^2+9x-4}$, ta có hệ : $\begin{cases}x^3-4x^2-5x+6=y\\7x^2+9x-4=y^3\end{cases}\Rightarrow y^3+y=\left(x+1\right)^3+\left(x+1\right)$

Xét hàm số : $f\left(t\right)=t^3+t$, là hàm đơn điệu tăng. Từ phương trình

$$f\left(y\right)=f\left[\left(x+1\right)\right]\Leftrightarrow y=x+1\Leftrightarrow\left(x+1\right)=\sqrt[3]{7x^2+9x-4}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=5\\x=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}\end{array}\right.$$

Bài 3. Giải phương trình : $\sqrt[3]{6x+1}=8x^3-4x-1$

V. PHƯƠNG PHÁP LƯỢNG GIÁC HÓA

1. Một số kiến thức cơ bản:

- ✓ **Nếu** $|x|\le 1$ thì có một số t với $t\in\left[\frac{-\pi}{2};\frac{-\pi}{2}\right]$ sao cho : $\sin t = x$ và một số y với $y\in\ 0;\pi$ sao cho $x=\cos y$
- ✓ **Nếu** $0\le x\le 1$ thì có một số t với $t\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ sao cho : $\sin t = x$ và một số y với $y\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ sao cho $x=\cos y$
- ✓ Với mỗi số thực x có $t\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ sao cho : $x=\tan t$
- ✓ Nếu : x, y là hai số thực thỏa: $x^2+y^2=1$, thì có một số t với $0\le t\le 2\pi$, sao cho $x=\sin t, y=\cos t$

Từ đó chúng ta có phương pháp giải toán :

- ➢ Nếu :$|x|\le 1$ thì đặt $\sin t = x$ với $t\in\left[\frac{-\pi}{2};\frac{-\pi}{2}\right]$ hoặc $x=\cos y$ với $y\in\ 0;\pi$
- ➢ **Nếu** $0\le x\le 1$ thì đặt $\sin t = x$, với $t\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ hoặc $x=\cos y$, với $y\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$
- ➢ Nếu : x, y là hai số thực thỏa: $x^2+y^2=1$, thì đặt $x=\sin t, y=\cos t$ với $0\le t\le 2\pi$
- ➢ Nếu $|x|\ge a$, ta có thể đặt : $x=\frac{a}{\sin t}$, với $t\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$, tương tự cho trường hợp khác
- ➢ x là số thực bất kỳ thi đặt : $x=\tan t,\ t\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$

Tại sao lại phải đặt điều kiện cho t như vậy ?

Chúng ta biết rằng khi đặt điều kiện $x=f\ \ t$ thì phải đảm bảo với mỗi x có duy nhất một t, và điều kiện trên để đảm bào điều này . **(xem lại vòng tròn lượng giác)**

2. Xây dựng phương trình vô tỉ bằng phương pháp lượng giác như thế nào ?

Từ công phương trình lượng giác đơn giản: $\cos 3t=\sin t$, ta có thể tạo ra được phương trình vô tỉ

Chú ý : $\cos 3t = 4\cos^3 t - 3\cos t$ ta có phương trình vô tỉ: $4x^3-3x=\sqrt{1-x^2}$ (1)

Nếu thay x bằng $\frac{1}{x}$ ta lại có phương trình : $4-3x^2=x^2\sqrt{x^2-1}$ (2)

Nếu thay x trong phương trình (1) bởi : (x-1) ta sẽ có phương trình vố tỉ khó: $4x^3-12x^2+9x-1=\sqrt{2x-x^2}$ (3)

Việc giải phương trình (2) và (3) không đơn giản chút nào ?

Tương tự như vậy từ công thức sin 3x, sin 4x,…….hãy xây dựng những phương trình vô tỉ theo kiểu lượng giác .

3. Một số ví dụ

Bài 1. Giải phương trình sau : $\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}\left[\sqrt{\ 1+x\ ^3}-\sqrt{\ 1-x\ ^3}\right]=\frac{2}{\sqrt{3}}+\sqrt{\frac{1-x^2}{3}}$

Giải:

Điều kiện :$|x|\le 1$

Với $x\in[-1;0]$: thì $\sqrt{\ 1+x\ ^3}-\sqrt{\ 1-x\ ^3}\le 0$ (ptvn)

$x\in[0;1]$ ta đặt : $x=\cos t,\ t\in\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$. Khi đó phương trình trở thành:

$2\sqrt{6}\cos x\left(1+\dfrac{1}{2}\sin t\right)=2+\sin t\Leftrightarrow \cos t=\dfrac{1}{\sqrt{6}}$ vậy phương trình có nghiệm : $x=\dfrac{1}{\sqrt{6}}$

Bài 2. Giải các phương trình sau :

1) $\sqrt{1-2x}+\sqrt{1+2x}=\sqrt{\dfrac{1-2x}{1+2x}}+\sqrt{\dfrac{1+2x}{1-2x}}$ HD: $\tan x=\sqrt{\dfrac{1+2\cos x}{1-2\cos x}}$

2) $\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}=x\left(1+2\sqrt{1-x^2}\right)$ Đs: $x=\dfrac{1}{2}$

3) $x^3-3x=\sqrt{x+2}$ HD: chứng minh $|x|>2$ vô nghiệm

Bài 3 . Giải phương trình sau: $\sqrt[3]{6x+1}=2x$

Giải: Lập phương 2 vế ta được: $8x^3-6x=1\Leftrightarrow 4x^3-3x=\dfrac{1}{2}$

Xét : $|x|\le 1$, đặt $x=\cos t,\ t\in\left[0;\pi\right]$. Khi đó ta được $S=\left\{\cos\dfrac{\pi}{9};\cos\dfrac{5\pi}{9};\cos\dfrac{7\pi}{9}\right\}$ mà phương trình bậc 3 có tối đa 3 nghiệm vậy đó cũng chính là tập nghiệm của phương trình.

Bài 4. .Giải phương trình $x^2\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}\right)$

Giải: đk: $|x|>1$, ta có thể đặt $x=\dfrac{1}{\sin t},\ t\in\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$

Khi đó ptt: $\dfrac{1}{\sin^2 x}\left(1+\cot t\right)=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos t=0\\ \sin 2t=-\dfrac{1}{2}\end{array}\right.$

Phương trình có nghiệm : $x=-\sqrt{2}\left(\sqrt{3}+1\right)$

Bài 5 .Giải phương trình : $\sqrt{x^2+1}=\dfrac{x^2+1}{2x}+\dfrac{\left(x^2+1\right)^2}{2x\left(1-x^2\right)}$

Giải: đk $x\ne 0, x\ne\pm 1$

Ta có thể đặt : $x=\tan t,\ t\in\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$

Khi đó pttt. $2\sin t\cos 2t+\cos 2t-1=0\Leftrightarrow \sin t\left(1-\sin t-2\sin^2 t\right)=0$

Kết hợp với điều kiện ta có nghiệm $x=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

Bài tập tổng hợp

Giải các phương trình sau

$x^3+\sqrt{\left(1-x^2\right)^3}=x\sqrt{2-2x^2}$	$\sqrt{x-1}+\sqrt{x^3+x^2+x+1}=1+\sqrt{x^4-1}$ $4\left(2x+4\right)+16\sqrt{2\left(4-x^2\right)}+16\left(2-x\right)=9x^2+16$

$2x^2-2x\sqrt{30}-\sqrt{2007}.\sqrt{30+4x\sqrt{2007}}=\sqrt{30}.\sqrt{2007}$	$x=(2004+\sqrt{x})(1-\sqrt{1-\sqrt{x}})^2$
$\sqrt{2x+4}-2\sqrt{2-x}>\dfrac{12x-8}{\sqrt{9x^2+16}}$	$(x+3\sqrt{x}+2)(x+9\sqrt{x}+18)=168x$
$\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{x+1}=x\sqrt[3]{2}$	$x^2-3x+1=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\sqrt{x^4+x^2+1}$
$\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x+1}=2x+1$	$2\sqrt[3]{1+x^{\ 2}}+3\sqrt[3]{1-x^2}+\sqrt[3]{1-x^{\ 2}}=0$
$\sqrt{4x+5}+\sqrt{3x+1}=\sqrt{2x+7}+\sqrt{x+3}$	$2008x^2-4x+3=2007\sqrt{4x-3}$
$x^2+3x+1=\ x+3\ \sqrt{x^2+1}$	$3\ \sqrt{2x^2+1}-1\ =x\ 1+3x+8\sqrt{2x^2+1}$
$\sqrt{4-3\sqrt{10-3x}}=x-2$ ***(HSG Toàn Quốc 2002)***	$x^2+x+12\sqrt{x+1}=36$
$2\sqrt{\ 2-x\ \ 5-x\ }=x+\sqrt{\ 2-x\ \ 10-x}$	$4x-1\ \sqrt{x^3+1}=2x^3+2x+1$
$\sqrt[3]{x^2+4}=\sqrt{x-1}+2x-3$	$2x+\dfrac{x-1}{x}=\sqrt{1-\dfrac{1}{x}}+3\sqrt{x-\dfrac{1}{x}}$
$\sqrt[3]{x^2-1}+\sqrt{3x^3-2}=3x-2$	$\sqrt{5x^2-14x+9}-\sqrt{x^2-x-20}=5\sqrt{x+1}$
$2x^2-11x+21-3\sqrt[3]{4x-4}=0$ ***(OLYMPIC 30/4-2007)***	$\sqrt[3]{6x+1}=8x^3-4x-1$
$\sqrt{2x^2-1}+\sqrt{x^2-3x-2}=\sqrt{2x^2+2x+3}+\sqrt{x^2-x+2}$	$\dfrac{15}{2}\ 30x^2-4x\ =2004\ \sqrt{30060x+1}+1$
$\sqrt{2x^2+16x+18}+\sqrt{x^2-1}=2x+4$	$\sqrt{\dfrac{4x+9}{28}}=7x^2+7x$
$\sqrt{x^2+x+2}=\dfrac{3x^2+3x+2}{3x+1}$	$4x^2-4x-10=\sqrt{8x^2-6x-10}$
$12\sqrt{x}+2\sqrt{x-1}=3x+9$	$\sqrt{\sqrt{3}-x}=x\sqrt{\sqrt{x}+x}$
$\sqrt[4]{x+1}+\sqrt{x}=1+\sqrt[4]{x^3+x^2}$	
$4x^2+3x+3=4x\sqrt{x+3}+2\sqrt{2x-1}$	

CHUYÊN ĐỀ: PHƯƠNG TRÌNH VÔ TỶ

I. PHƯƠNG PHÁP BIẾN ĐỔI TƯƠNG ĐƯƠNG

Dạng 1 : Phương trình $\sqrt{A}=\sqrt{B}\Leftrightarrow A=B\geq 0\Leftrightarrow\begin{cases}x\in D\ \ (*)\\ A=B\end{cases}$

Lưu ý: Điều kiện (*) được chọn tuỳ thuôc vào độ phức tạp của $A\geq 0$ hay $B\geq 0$

Dạng 2: Phương trình $\sqrt{A}=B\Leftrightarrow\begin{cases}B\geq 0\\ A=B^2\end{cases}$

Dạng 3: Phương trình

+) $\sqrt{A}+\sqrt{B}=\sqrt{C}\Leftrightarrow\begin{cases}A\geq 0\\ B\geq 0\\ A+B+2\sqrt{AB}=C\end{cases}$ *(chuyển về dạng 2)*

+) $\sqrt[3]{A}+\sqrt[3]{B}=\sqrt[3]{C}\Rightarrow A+B+3\sqrt[3]{A.B}\ \ \sqrt[3]{A}+\sqrt[3]{B}\ \ =C$

và ta sử dụng phép thế : $\sqrt[3]{A}+\sqrt[3]{B}=C$ **ta được phương trình :** $A+B+3\sqrt[3]{A.B.C}=C$

Bài 1: Giải phương trình:

a) $\sqrt{x^2-1}=x-1$	f) $\sqrt{3+x}-\sqrt{2-x}=1$
b) $x-\sqrt{2x+3}=0$	g) $\sqrt{x+9}=5-\sqrt{2x+4}$

c) $x^2+\sqrt{x+1}=1$ e) $\sqrt{3x-2}+\sqrt{x-1}=3$	h) $\sqrt{3x+4}-\sqrt{2x+1}=\sqrt{x+3}$ i) $(x+3)\sqrt{10-x^2}=x^2-x-12$

Bài 2: Tìm m để phương trình sau có nghiệm: $\sqrt{-x^2+3x-2}=\sqrt{2m+x-x^2}$

Bài 3: Cho phương trình: $\sqrt{x^2-1}-x=m$

-Giải phương trình khi m=1

-Tìm m để phương trình có nghiệm.

Bài 4: Cho phương trình: $\sqrt{2x^2+mx-3}=x-m$

-Giải phương trình khi m=3

-Với giá trị nào của m thì phương trình có nghiệm.

II.PHƯƠNG PHÁP ĐẶT ẨN PHỤ

Phương pháp đặt ẩn phụ thông thường.

-Nếu bài toán có chứa $\sqrt{f(x)}$ và $f(x)$ khi đó đặt $t=\sqrt{f(x)}$ (với điều kiện tối thiểu là $t\geq 0$. đối với các phương trình có chứa tham số thì nhất thiết phải tìm ***<u>điều kiện đúng</u>*** cho ẩn phụ).

-Nếu bài toán có chứa $\sqrt{f(x)}$, $\sqrt{g(x)}$ và $\sqrt{f(x)}.\sqrt{g(x)}=k$ (với k là hằng số) khi đó có thể đặt : $t=\sqrt{f(x)}$, khi đó $g(x)=\frac{k}{t}$

-Nếu bài toán có chứa $\sqrt{f(x)}\pm\sqrt{g(x)};\sqrt{f(x).g(x)}$ và $f(x)+g(x)=k$ khi đó có thể đặt:

$t=\sqrt{f(x)}\pm\sqrt{g(x)}$ suy ra $\sqrt{f(x).g(x)}=\frac{t^2-k}{2}$

-Nếu bài toán có chứa $\sqrt{a^2-x^2}$ thì đặt $x=|a|\sin t$ với $-\frac{\pi}{2}\leq t\leq\frac{\pi}{2}$ hoặc $x=|a|\cos t$ với $0\leq t\leq\pi$

-Nếu bài toán có chứa $\sqrt{x^2-a^2}$ thì đặt $x=\frac{|a|}{\sin t}$ với $t\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]\backslash\ 0$ hoặc $x=\frac{|a|}{\cos t}$ với $t\in\ 0;\pi\ \backslash\left\{\frac{\pi}{2}\right\}$

-Nếu bài toán có chứa $\sqrt{x^2+a^2}$ ta có thể đặt $x=|a|.\tan t$ với $t\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$

Bài 1: Giải phương trình:

a) $x^2+\sqrt{x^2+2x+8}=12-2x$

b) $2x^2-5\sqrt{2x^2+3x+9}=-3x-3$

c) $x^2-4x+6=\sqrt{2x^2-8x+12}$

d) $3x^2+15x+2\sqrt{x^2+5x+1}=2$

e) $(x+4)(x+1)-3\sqrt{x^2+5x+2}=6$

f) $\sqrt{2x^2+5x+2}-2\sqrt{2x^2+5x-6}=1$

g) $\sqrt{x^2+3x+2}-2\sqrt{2x^2+6x+2}=-\sqrt{2}$

h) $x^2+\sqrt{x^2+11}=31$

i) $(x+5)(2-x)=3\sqrt{x^2+3x}$

Bài 2: Giải phương trình:

a) $x^3+\sqrt{\ 1-x^2\ {}^3}=x\sqrt{2\ 1-x^2}$

b) $\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}\left[\sqrt{\ 1-x\ {}^3}-\sqrt{\ 1+x\ {}^3}\right]=2+\sqrt{1-x^2}$

c) $\sqrt{1-x}-2x\sqrt{1-x^2}-2x^2+1=0$

d) $64x^6-112x^4+56x^2-7=2\sqrt{1-x^2}$

e) $x+\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}=\frac{35}{12}$

f) $(x-3)(x+1)+4(x-3)\sqrt{\frac{x+1}{x-3}}=-3$

Bài 3: Cho phương trình: $\frac{1}{x}+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=m$

-Giải phương trình với $m=2+\frac{2}{\sqrt{3}}$

-Tìm m để phương trình có nghiệm.

Bài 4: Cho phương trình: $2(x^2-2x)+\sqrt{x^2-2x-3}-m=0$

-Giải phương trình với m = 9

-Tìm m để phương trình có nghiệm.

2. Phương pháp đặt ẩn phụ không hoàn toàn

Là việc sử dụng một ẩn phụ chuyển phương trình ban đầu thành một phương trình với một ẩn phụ nhưng các hệ số vẫn còn chứa x.

-Từ những phương trình tích $(\sqrt{x+1}-1)(\sqrt{x+1}-x+2)=0$, $(\sqrt{2x+3}-x)(\sqrt{2x+3}-x+2)=0$

Khai triển và rút gọn ta sẽ được những phương trình vô tỉ không tầm thường chút nào, độ khó của phương trình dạng này phụ thuộc vào phương trình tích mà ta xuất phát.

Từ đó chúng ta mới đi tìm cách giải phương trình dạng này .Phương pháp giải được thể hiện qua các ví dụ sau .

Bài 1. Giải phương trình : $x^2+(3-\sqrt{x^2+2})x=1+2\sqrt{x^2+2}$

Giải: $t=\sqrt{x^2+2}$, ta có : $t^2-(2+x)t-3+3x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=3\\t=x-1\end{array}\right.$

Bài 2. Giải phương trình : $(x+1)\sqrt{x^2-2x+3}=x^2+1$

Giải:

Đặt : $t=\sqrt{x^2-2x+3},\quad t\ge\sqrt{2}$

Khi đó phương trình trở thnh : $(x+1)t=x^2+1\Leftrightarrow x^2+1-(x+1)t=0$

Bây giờ ta thêm bớt , để được phương trình bậc 2 theo t có Δ chẵn

$$x^2-2x+3-(x+1)t+2(x-1)=0\Leftrightarrow t^2-(x+1)t+2(x-1)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=2\\t=x-1\end{array}\right.$$

Từ một phương trình đơn giản : $(\sqrt{1-x}-2\sqrt{1+x})(\sqrt{1-x}-2+\sqrt{1+x})=0$, khai triển ra ta sẽ được pt sau

Bài 3. Giải phương trình sau : $4\sqrt{x+1}-1=3x+2\sqrt{1-x}+\sqrt{1-x^2}$

Giải:

Nhận xét : đặt $t=\sqrt{1-x}$, pttt: $4\sqrt{1+x}=3x+2t+t\sqrt{1+x}$ (1)

Ta rt $x=1-t^2$ thay vo thì được pt: $3t^2-(2+\sqrt{1+x})t+4(\sqrt{1+x}-1)=0$

Nhưng không có sự may mắn để giải được phương trình theo t $\Delta=(2+\sqrt{1+x})^2-48(\sqrt{x+1}-1)$ không có dạng bình phương .

Muốn đạt được mục đích trên thì ta phải tách 3x theo $(\sqrt{1-x})^2$, $(\sqrt{1+x})^2$

Cụ thể như sau : $3x=-(1-x)+2(1+x)$ thay vào pt (1) ta được:

Bài 4. Giải phương trình: $2\sqrt{2x+4}+4\sqrt{2-x}=\sqrt{9x^2+16}$

Giải .

Bình phương 2 vế phương trình: $4\left(2x+4\right)+16\sqrt{2\left(4-x^2\right)}+16\left(2-x\right)=9x^2+16$

Ta đặt : $t=\sqrt{2\left(4-x^2\right)}\geq 0$. Ta được: $9x^2-16t-32+8x=0$

Ta phải tách $9x^2=\alpha 2\left(4-x^2\right)+\left(9+2\alpha\right)x^2-8\alpha$ làm sao cho Δ_t có dạng chình phương .

Nhận xét : Thông thường ta chỉ cần nhóm sao cho hết hệ số tự do thì sẽ đạt được mục đích.

Bài tập: Giải các phương trình sau:

a) $(4x-1)\sqrt{x^3+1}=2x^3+2x+1$ b) $x^2-1=2x\sqrt{x^2-2x}$

c) $x^2-1=2x\sqrt{x^2+2x}$ d) $x^2+4x=(x+2)\sqrt{x^2-2x+4}$

3. Phương pháp đặt ẩn phụ chuyển về hệ.

a) Dạng thông thường: Đặt $u=\alpha\left(x\right), v=\beta\left(x\right)$ và tìm mối quan hệ giữa $\alpha\left(x\right)$ và $\beta\left(x\right)$ từ đó tìm được hệ theo u,v. Chẳng hạn đối với phương trình: $\sqrt[m]{a-f\left(x\right)}+\sqrt[m]{b+f\left(x\right)}=c$ ta có thể đặt: $\begin{cases} u=\sqrt[m]{a-f\left(x\right)} \\ v=\sqrt[m]{b+f\left(x\right)} \end{cases}$ từ đó suy ra $u^m+v^m=a+b$. Khi đó ta có hệ $\begin{cases} u^m+v^m=a+b \\ u+v=c \end{cases}$

Bài tập: Giải các phương trình sau:

a) $\sqrt[3]{2-x}=1-\sqrt{x-1}$ b) $\sqrt[3]{9-x}=2-\sqrt{x-1}$ c) $x-\sqrt{x-1}-(x-1)\sqrt{x}+\sqrt{x^2-x}=0$

b) Dạng phương trình chứa căn bậc hai và lũy thừa bậc hai:

$\sqrt{ax+b}=c(dx+e)^2+\alpha x+\beta$ với $\begin{cases} d=ac+\alpha \\ e=bc+\beta \end{cases}$

Cách giải: Đặt: $dy+e=\sqrt{ax+b}$ khi đó phương trình được chuyển thành hệ:

$$\begin{cases} dy+e=\sqrt{ax+b} \\ dy+e=c(dx+e)^2+\alpha x+\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(dy+e\right)^2=ax+b \\ c\left(dy+e\right)^2=-\alpha x+dy+e-\beta \end{cases}$$ ->giải

<u>Nhận xét</u>: Dể sử dụng được phương pháp trên cần phải khéo léo biến đổi phương trình ban đầu về dạng thỏa mãn điều kiện trên để đặt ẩn phụ.Việc chọn $\alpha;\beta$ thông thường chúng ta chỉ cần viết dưới dạng : $\left(\alpha x+\beta\right)^n=p\sqrt[n]{a'x+b'}+\gamma$ là chọn được.

c) Dạng phương trình chứa căn bậc ba và lũy thừa bậc ba.

$\sqrt[3]{ax+b}=c\left(dx+e\right)^3+\alpha x+\beta$ với $\begin{cases} d=ac+\alpha \\ e=bc+\beta \end{cases}$

Cách giải: Đặt $dy+e=\sqrt[3]{ax+b}$ khi đó phương trình được chuyển thành hệ:

$$\begin{cases} dy+e=\sqrt[3]{ax+b} \\ dy+e=c\left(dx+e\right)^3+\alpha x+\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(dy+e\right)^3=ax+b \\ c\left(dx+e\right)^3=-\alpha x+dy+e-\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c\left(dy+e\right)^3=acx+bc \\ c(dx+e)^3=(ac-d)x+dy+bc \end{cases}$$

Bài tập: Giải các phương trình sau:

1) $\sqrt{x+1}=x^2+4x+5$

2) $\sqrt{3x+1}=-4x^2+13x-5$

3) $x^3+2=3\sqrt[3]{3x-2}$

7) $4x^2-13x+5+\sqrt{3x+1}=0$

8) $4x^2-13x+5+\sqrt{3x+1}=0$

9) $\sqrt[3]{81x-8}=x^3-2x^2+\frac{4}{3}x-2$

4) $\sqrt{\frac{4x+9}{28}}=7x^2+7x \quad x>0$

5) $x^3+1=2\sqrt[3]{2x-1}$

6) $x\sqrt[3]{35-x^3}\left(x+\sqrt[3]{35-x^3}\right)=30$

10) $\sqrt[3]{6x+1}=8x^3-4x-1$

11) $\frac{15}{2}\left(30x^2-4x\right)=2004\left(\sqrt{30060x+1}+1\right)$

12) $\sqrt[3]{3x-5}=8x^3-36x^2+53-25$

II. PHƯƠNG PHÁP HÀM SỐ

Sử dụng các tính chất của hàm số để giải phương trình là dạng toán khá quen thuộc. Ta có 3 hướng áp dụng sau đây:

Hướng 1: Thực hiện theo các bước:

Bước 1: Chuyển phương trình về dạng: $f(x)=k$

Bước 2: Xét hàm số $y=f(x)$

Bước 3: Nhận xét:

- Với $x=x_0 \Leftrightarrow f(x)=f(x_0)=k$ do đó x_0 là nghiệm
- Với $x>x_0 \Leftrightarrow f(x)>f(x_0)=k$ do đó phương trình vô nghiệm
- Với $x<x_0 \Leftrightarrow f(x)<f(x_0)=k$ do đó phương trình vô nghiệm
- Vậy x_0 là nghiệm duy nhất của phương trình

Hướng 2: thực hiện theo các bước

Bước 1: Chuyển phương trình về dạng: $f(x)=g(x)$

Bước 2: Dùng lập luận khẳng định rằng $f(x)$ và g(x) có những tính chất trái ngược nhau và xác định x_0 sao cho $f(x_0)=g(x_0)$

Bước 3: Vậy x_0 là nghiệm duy nhất của phương trình.

Hướng 3: Thực hiện theo các bước:

Bước 1: Chuyển phương trình về dạng $f(u)=f(v)$

Bước 2: Xét hàm số $y=f(x)$, dùng lập luận khẳng định hàm số đơn điệu

Bước 3: Khi đó $f(u)=f(v) \Leftrightarrow u=v$

Ví dụ: Giải phương trình : $(2x+1)\left(2+\sqrt{4x^2+4x+4}\right)+3x\left(2+\sqrt{9x^2+3}\right)=0$

pt $\Leftrightarrow (2x+1)\left(2+\sqrt{(2x+1)^2+3}\right)=(-3x)\left(2+\sqrt{(-3x)^2+3}\right) \Leftrightarrow f(2x+1)=f(-3x)$

Xét hàm số $f(t)=t\left(2+\sqrt{t^2+3}\right)$, là hàm đồng biến trên R, ta có $x=-\frac{1}{5}$

Bài tập: Giải phương trình:

$\sqrt{4x-1}+\sqrt{4x^2-1}=1, \sqrt{x-1}=-x^3-4x+5, \sqrt{x-1}=3+x-x^2, \sqrt{x}=1-2x+2x^2-x^3,$

$\sqrt{x-1}+\sqrt{x+2}=3, \sqrt{2x-1}+\sqrt{x^2+3}=4-x$