CHƯƠNG VII
BÀI TOÁN LIÊN QUAN ĐẾN THAM SỐ

Khi giải các bài toán về phương trình, bất phương trình, hệ phương trình ta thường hay gặp các bài toán liên quan đến tham số. Có lẽ đây là dạng toán mà nhiều học sinh lúng túng nhất. Trong chương này chúng ta sẽ đi nghiên cứu một số dạng toán mà chúng ta thương hay gặp (như xác định tham số để phương trình có nghiệm, có k nghiệm, nghiệm đúng với mọi x thuộc tập D nào đó…) và phương pháp giải các dạng toán đó.

1. Phương pháp hàm số

Bài toán 1: Tìm điều kiện của tham số để phương trình f(x)=g(m) có nghiệm trên D

Phương pháp: Dựa vào tính chất phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow$ hai đồ thị của hai hàm số $y=f\left(x\right)$ và $y=g\left(m\right)$ cắt nhau. Do đó để giải bài toán này ta tiến hành theo các bước sau:

1) Lập bảng biến thiên của hàm số $y=f\left(x\right)$.
2) Dựa vào bảng biến thiên ta xác định m để đường thẳng $y=g\left(m\right)$ cắt đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$.

Chú ý : Nếu hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên D và $m=\min\limits_{x\in D} f(x)$, $M=\mathop{Max}\limits_{x\in D} f(x)$ thì phương trình : $f\left(x\right)=k$ có nghiệm khi và chỉ khi $m\le k\le M$.

Ví dụ 1: Tìm m để các phương trình sau có nghiệm

1) $\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1}=m$.

2) $\sqrt[4]{x^2+1}-\sqrt{x} = m$

Giải:

1)Xét hàm số $f(x)=\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1}$ có tập xác định là D=R.

Ta có: $f'(x)=\dfrac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}}-\dfrac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x+1}}$

$\Rightarrow f'\left(x\right)=0\Leftrightarrow (2x+1)\sqrt{x^2-x+1}=\left(2x-1\right)\sqrt{x^2+x+1}$ (1)

$\Rightarrow\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2[(x-\dfrac{1}{2})^2+\dfrac{3}{4}]=\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2[(x+\dfrac{1}{2})^2+\dfrac{3}{4}]\Leftrightarrow x=0$ thay vào (1) ta thấy không thỏa mãn. Vậy phương trình $f'(x)=0$ vô nghiệm $\Rightarrow f'(x)$ không đổi dấu trên R, mà $f'(0)=1>0\Rightarrow f(x)>0\quad\forall x\in R\Rightarrow f(x)$ đồng biến.

Mặt khác: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x}{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-x+1}}=1$ và $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-1$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	$+\infty$
f'(x)	+	
f(x)	-1 ↗	1

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy phương trình đã cho có nghiệm $\Leftrightarrow -1<m<1$.

2) ĐK: $x \ge 0$

Xét hàm số $f(x)=\sqrt[4]{x^2+1}-\sqrt{x}$ với $x \in D=[0;+\infty)$

Ta có: $f'(x)=\dfrac{x}{2\sqrt[4]{(x^2+1)^3}}-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

$\Rightarrow f'(x)=0 \Leftrightarrow x\sqrt{x}=\sqrt[4]{(x^2+1)^3} \Leftrightarrow x^6=(x^2+1)^3 \Leftrightarrow x^2=x^2+1$ vô nghiệm

$\Rightarrow f'(x)$ không đổi dấu trên D, mà $f'(1)=\dfrac{1}{2\sqrt[4]{8}}-\dfrac{1}{2}<0 \Rightarrow f'(x)<0\ \forall x\in D$

Mặt khác: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt[4]{(x^2+1)^3}+\sqrt[4]{x^2(x^2+1)^2}+\sqrt[4]{x^4(x^2+1)}+\sqrt[4]{x^6}}=0$

$\Rightarrow 0<f(x)\le f(0)=1 \quad \forall x\in D \Rightarrow$ phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow 0<m\le 1$.

Chú ý : Nếu phương trình chưa có dạng trên thì ta tìm cách cô lập m đưa về dạng trên.

Ví dụ 2: Tìm m để các phương trình sau có nghiệm:

1) $\sqrt[4]{x^4-13x+m}+x-1=0$.

2) $x\sqrt{x}+\sqrt{x+12}=m(\sqrt{5-x}+\sqrt{4-x})$.

Giải:

1) Phương trình $\Leftrightarrow \sqrt[4]{x^4-13x+m}=1-x \Leftrightarrow \begin{cases} x\le 1 \\ x^4-13x+m=(1-x)^2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x\le 1 \\ 4x^3-6x^2-9x=1-m \end{cases}$. Xét hàm số $f(x)=4x^3-6x^2-9x$ với $x\le 1$

Ta có: $f'(x)=12x^2-12x-9 \Rightarrow f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{3}{2} \\ x=-\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	$-1/2$	1
f'(x)	+	0	–
f(x)	$-\infty$ ↗	$\dfrac{5}{2}$	↘ -11

Dựa vào bảng biến thiên suy ra phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow 1-m\le\frac{5}{2}\Leftrightarrow m\ge-\frac{3}{2}$.

2) Điều kiện: $0\le x\le 4$.
Khi đó phương trình $\Leftrightarrow f(x)=(x\sqrt{x}+\sqrt{x+12})(\sqrt{5-x}-\sqrt{4-x})=m$
(Vì $\sqrt{5-x}-\sqrt{4-x}\neq 0$)
Xét hàm số $f(x)=(x\sqrt{x}+\sqrt{x+12})(\sqrt{5-x}-\sqrt{4-x})$ với $0\le x\le 4$.
Ta có: $f'(x)=(\frac{3}{2}\sqrt{x}+\frac{1}{2\sqrt{x+12}})(\frac{1}{2\sqrt{4-x}}-\frac{1}{2\sqrt{5-x}})$.
Do $0<\sqrt{4-x}<\sqrt{5-x}\Rightarrow\frac{1}{2\sqrt{4-x}}-\frac{1}{2\sqrt{5-x}}>0\Rightarrow f'(x)>0\quad\forall x\in[0;4)$.
Vậy f(x) là hàm đồng biến trên $[0;4]\Rightarrow 2\sqrt{3}(\sqrt{5}-2)=f(0)\le f(x)\le f(4)=12$
Suy ra phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow 2\sqrt{3}(\sqrt{5}-2)\le m\le 12$.

Chú ý : Khi gặp hệ phương trình trong đó một phương trình của hệ không chứa tham số thì ta sẽ đi giải quyết phương trình này trước. Từ phương trình này ta sẽ tìm được tập nghiệm $x\in D$ (đối với hệ một ẩn) hoặc sẽ rút được ẩn này qua ẩn kia. Khi đó nghiệm của hệ phụ thuộc vào nghiệm của phương trình thứ hai với kết quả ta tìm được ở trên.

Ví dụ 3: Tìm m để hệ sau có nghiệm: $\begin{cases}2^{x^2}\le\left(\frac{1}{2}\right)^{4-5x} & (1)\\ 3x^2-mx\sqrt{x}+16=0 & (2)\end{cases}$.

Giải:
Ta thấy (1) là bất phương trình một ẩn nên ta sẽ đi giải bất phương trình này
Ta có: $2^{x^2}\le 2^{5x-4}\Leftrightarrow x^2\le 5x-4\Leftrightarrow x^2-5x+4\le 0\Leftrightarrow 1\le x\le 4$.
Hệ có nghiệm $\Leftrightarrow$ (2) có nghiệm $x\in[1;4]$.
$(2)\Leftrightarrow\frac{3x^2+16}{x\sqrt{x}}=m$. Xét hàm số $f(x)=\frac{3x^2+16}{x\sqrt{x}}$ với $x\in[1;4]$
có $f'(x)=\frac{6x^2\sqrt{x}-\frac{3}{2}\sqrt{x}(3x^2+16)}{x^3}=\frac{3\sqrt{x}(x^2-16)}{2x^3}\le 0\quad\forall x\in[1;4]$.
$\Rightarrow 8=f(4)\le f(x)\le f(1)=19\quad\forall x\in[1;4]$.
Vậy hệ có nghiệm $\Leftrightarrow 8\le m\le 19$.

Ví dụ 4: Tìm m để hệ sau có nghiệm:
$$\begin{cases}7^{2x+\sqrt{x+1}}-7^{2+\sqrt{x+1}}+2007x\le 2007 & (1)\\ x^2-(m+2)x+2m+3=0 & (2)\end{cases}.$$
Giải:

Ta có: $(1) \Leftrightarrow 7^{2+\sqrt{x+1}}(7^{2(x-1)}-1) \le 2007(1-x) \quad (3)$.

- Nếu $x > 1 \Rightarrow VT(3) > 0 > VP(3) \Rightarrow (3)$ vô nghiệm.
- Nếu $x \le 1 \Rightarrow VT(3) \le 0 \le VP(3) \Rightarrow (3)$ đúng

$\Rightarrow (3)$ có nghiệm $x \le 1$.

Suy ra hệ có nghiệm $\Leftrightarrow (2)$ có nghiệm $x \le 1$.

Ta có: $(2) \Leftrightarrow m = \dfrac{x^2-2x+3}{x-2} = f(x)$. Xét hàm số f(x) với $x \le 1$, có:

$f'(x) = \dfrac{x^2-4x+1}{(x-2)^2} \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2-\sqrt{3}$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$2-\sqrt{3}$		1
f'(x)		+	0	–	
f(x)	$-\infty$	$\nearrow$	$2-2\sqrt{3}$	$\searrow$	-2

Dựa vào bảng biến thiên $\Rightarrow$ hệ có nghiệm $\Leftrightarrow m \le 2-2\sqrt{3}$.

Ví dụ 5: Tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm:

$$\begin{cases} 2x - y + m = 0 & (1) \\ y + \sqrt{xy} = 2 & (2) \end{cases}.$$

Giải:

Ta thấy (2) là phương trình không chứa tham số nên ta sẽ giải quyết (2) trước

Ta có: $(2) \Leftrightarrow \sqrt{xy} = 2 - y \Leftrightarrow \begin{cases} y \le 2 \\ x = \dfrac{y^2-4y+4}{y} \end{cases}$. Thay vào (1) ta được:

$\dfrac{y^2-4y+4}{y} - y + m = 0 \Leftrightarrow m = \dfrac{4y-4}{y} = f(y) \quad (3)$.

Hệ có nghiệm $\Leftrightarrow (3)$ có nghiệm $y \le 2$. Xét hàm số f(y) với $y \le 2$

$\Rightarrow f'(y) = \dfrac{4}{y^2} > 0 \Rightarrow f(y)$ đồng biến trên các khoảng $(-\infty;0) \cup (0;2]$

$\lim\limits_{y\to-\infty} f(y) = 4;\ \lim\limits_{y\to 0^+} f(y) = -\infty;\ \lim\limits_{y\to 0^-} f(y) = +\infty$. Ta có bảng biến thiên:

y	$-\infty$		0		2
f'(y)		+	||	+	
f(y)	4	$\nearrow$	$+\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	2

$\Rightarrow$ hệ có nghiệm $\Leftrightarrow m \in (-\infty;2] \cup (4;+\infty)$.

Chú ý : Khi bài toán yêu cầu xác định số nghiệm của phương trình thì ta phải lưu ý Số nghiệm của phương trình $f(x)=g(m)$ chính là số giao điểm của đồ thị hai hàm số $y=f(x)$ và $y=g(m)$. Do đó phương trình có k nghiệm $\Leftrightarrow$ hai đồ thị trên cắt nhau tại k giao điểm.

Ví dụ 6: Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình sau có đúng hai nghiệm phân biệt: $\sqrt{x^4-4x^3+16x+m}+\sqrt[4]{x^4-4x^3+16x+m}=6$.

Giải:

Đặt $t=\sqrt[4]{x^4-4x^3+16x+m},\ t\ge 0$. Ta có phương trình :

$t^2+t-6=0 \Leftrightarrow t=2 \Leftrightarrow \sqrt[4]{x^4-4x^3+16x+m}=2$

$\Leftrightarrow -m=x^4-4x^3+16x-16$. Xét hàm số $f(x)=x^4-4x^3+16x-16$

$\Rightarrow f'(x)=4(x^3-3x^2+4)=4(x-2)^2(x+1) \Rightarrow f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=2 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
f'(x)		–	0	+	0	+	
f(x)	$+\infty$	$\searrow$	-27	$\nearrow$		$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên $\Rightarrow$ phương trình có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow -m>-27 \Leftrightarrow m<27$.

Ví dụ 7: Tìm m để phương trình : $m\sqrt{x^2+2}=x+m$ có ba nghiệm phân biệt.

Giải:

Phương trình $\Leftrightarrow m(\sqrt{x^2+2}-1)=x \Leftrightarrow m=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+2}-1}$ (do $\sqrt{x^2+2}-1>0\ \forall x$)

Xét hàm số $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+2}-1} \Rightarrow f'(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+2}-1-\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+2}}}{\left(\sqrt{x^2+2}-1\right)^2}$

$f'(x)=\dfrac{2-\sqrt{x^2+2}}{\sqrt{x^2+2}\left(\sqrt{x^2+2}-1\right)^2} \Rightarrow f'(x)=0 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{2}$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$		$+\infty$
f'(x)		–	0	+	0	–	
f(x)	$+\infty$	$\searrow$	$-\sqrt{2}$	$\nearrow$	$\sqrt{2}$	$\searrow$	$-\infty$

Dựa vào bảng biến thiên $\Rightarrow -\sqrt{2} < m < \sqrt{2}$.

Ví dụ 8: Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình : $mx^2 + 1 = \cos x$ có đúng một nghiệm $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Giải:

Ta thấy để pt có nghiệm thì $m \le 0$. Khi đó:

Phương trình $\Leftrightarrow \frac{\cos x - 1}{x^2} = m \Leftrightarrow \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2} = -2m$.

Xét hàm số : $f(t) = \frac{\sin t}{t}$ với $t \in \left(0; \frac{\pi}{4}\right)$

Ta có: $f'(t) = \frac{t.\cos t - \sin t}{t^2} = \frac{\cos t\left(t - tgt\right)}{t^2} < 0$ với $\forall t \in \left(0; \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow$ f(t) nghịch biến.

Mà: $f(\frac{\pi}{4}) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}$ và $\lim\limits_{t \to 0} f(t) = 1 \Rightarrow \frac{2\sqrt{2}}{\pi} < f(t) < 1 \Rightarrow \frac{8}{\pi^2} < \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2} < 1 \ \forall x \in (0; \frac{\pi}{2})$.

Vậy phương trình có đúng một nghiệm $x \in (0; \frac{\pi}{2}) \Leftrightarrow \frac{8}{\pi^2} < -2m < 1$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{2} < m < -\frac{4}{\pi^2}$.

Ví dụ 9: Tìm m để hệ phương trình : $\begin{cases} 3(x+1)^2 + y - m = 0 \\ x + \sqrt{xy} = 1 \end{cases}$ có ba cặp nghiệm phân biệt .

Giải:

Ta có : $x + \sqrt{xy} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{xy} = 1 - x \Leftrightarrow \begin{cases} x \le 1 \\ y = \frac{x^2 - 2x + 1}{x} \end{cases}$ (do $x = 0$ không là nghiệm phương trình).

Thay vào phương trình thứ nhất ta được: $3x^2 + 6x + \frac{x^2 - 2x + 1}{x} = m - 3$ (a) .

Hệ có ba cặp nghiệm $\Leftrightarrow$ (a) có ba nghiệm phân biệt thỏa mãn $x \le 1$.

Xét hàm số $f(x) = 3x^2 + 6x + \frac{x^2 - 2x + 1}{x} = 3x^2 + 7x - 2 + \frac{1}{x}$ với $x \le 1$.

$\Rightarrow f'(x) = 6x + 7 - \frac{1}{x^2} = \frac{6x^3 + 7x^2 - 1}{x^2} \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1; x = -\frac{1}{2}; x = \frac{1}{3}$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{2}$		0		$\frac{1}{3}$		1
f'(x)		$-$	0	$+$	0	$-$	||	$-$	0	$+$	
f(x)	$+\infty$	$\searrow$	-7	$\nearrow$	$-\frac{27}{4}$	$\searrow$	$-\infty$ || $-\infty$	$\searrow$	$\frac{11}{3}$	$\nearrow$	9

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy (a) có ba nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{11}{3} \le m-3 \le 9 \\ -7 \le m-3 \le -\frac{27}{4} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{20}{3} \le m \le 12 \\ -4 \le m \le \frac{-15}{4} \end{array}\right..$$

Vậy $\frac{20}{3} \le m \le 12 \ \cup\ -4 \le m \le \frac{-15}{4}$ là những giá trị cần tìm.

Ví dụ 10: Biện luận số nghiệm của phương trình sau:

$$m\sqrt{x^2+1} = x+2-m.$$

Giải:

PT $\Leftrightarrow m(\sqrt{x^2+1}+1) = x+2 \Leftrightarrow m = \frac{x+2}{\sqrt{x^2+1}+1} = f(x)$ (do $\sqrt{x^2+1}+1>0$)

Số nghiệm của phương trình chính là số giao điểm của đồ thị hai hàm số $y=m$ và $y=f(x)$.

Xét hàm số $y=f(x)$, ta có: $f'(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}+1-\frac{x(x+2)}{\sqrt{x^2+1}}}{(\sqrt{x^2+1}+1)^2} = \frac{\sqrt{x^2+1}-2x+1}{\sqrt{x^2+1}(\sqrt{x^2+1}+1)^2}$

$$\Rightarrow f'(x)=0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1} = 2x-1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge \frac{1}{2} \\ x^2+1 = 4x^2-4x+1 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{4}{3}.$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x(1+\frac{2}{x})}{-x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-\frac{1}{x}\right)} = -1 \text{ và } \lim_{x\to+\infty} f(x) = 1.$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$\frac{4}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	-1	$\nearrow$	$\frac{5}{4}$	$\searrow$	1

Dựa vào bảng biến thiên suy ra:

- Nếu $\left[\begin{array}{l} m > \frac{5}{4} \\ m \le -1 \end{array}\right. \Rightarrow$ phương trình vô nghiệm.
- Nếu $\left[\begin{array}{l} m = \frac{5}{4} \\ -1 < m \le 1 \end{array}\right. \Rightarrow$ phương trình có một nghiệm.
- Nếu $1 < m < \frac{5}{4} \Rightarrow$ phương trình có hai nghiệm phân biệt.

Chú ý : Khi đặt ẩn phụ ta phải tìm miền xác định của ẩn phụ và giải quyết bài toán ẩn phụ trên miền xác định vừa tìm. Cụ thể:

* Khi đặt $t = u(x), x \in D$, ta tìm được $t \in Y$ và phương trình $f(x,m) = 0\,(1)$ trở thành $g(t,m) = 0$ (2). Khi đó (1) có nghiệm $x \in D \Leftrightarrow$ (2) có nghiệm $t \in Y$.

* Để tìm miền xác định của t ta có thể sử dụng các phương trình tìm miền giá trị (vì miền xác định của t chính là miền giá trị của hàm u(x)).

* Nếu bài toán yêu cầu xác định số nghiệm thì ta phải tìm sự tương ứng giữa x và t, tức là mỗi giá trị $t \in Y$ thì phương trình $u(x) = t$ có bao nhiêu nghiệm $x \in D$?.

Ví dụ 11: Tìm m để các phương trình sau có nghiệm.

1) $\sqrt{x} + \sqrt{9-x} = \sqrt{-x^2 + 9x + m}$.

2) $\sqrt{3+x} + \sqrt{6-x} - \sqrt{(3+x)(6-x)} = m$.

3) $m(\sqrt{x-2} + 2\sqrt[4]{x^2-4}) - \sqrt{x+2} = 2\sqrt[4]{x^2-4}$.

Giải:

1) Điều kiện: $0 \le x \le 9$.

Phương trình $\Leftrightarrow 9 + 2\sqrt{x(9-x)} = -x^2 + 9x + m \Leftrightarrow 2 - m = x(9-x) - 2\sqrt{x(9-x)}$

Đặt $t = \sqrt{x(9-x)} \Rightarrow 0 \le t \le \frac{x+9-x}{2} = \frac{9}{2}$.

Ta có phương trình : $2 - m = t^2 - 2t = f(t)$ (1).

Phương trình đã cho có nghiệm $\Leftrightarrow$ (1) có nghiệm $t \in [0;\frac{9}{2}]$

Xét hàm số f(t) với $t\in[0;\frac{9}{2}]$, có $f'(t)=2t-2>0\Rightarrow f'(t)=0\Leftrightarrow t=1$.

Bảng biến thiên:

t	0		1		$\frac{9}{2}$
f’(t)		$-$	0	$+$	
f(t)	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$\frac{45}{4}$

Vậy phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow -1\le 2-m\le\frac{45}{4}\Leftrightarrow -\frac{37}{4}\le m\le 3$.

2) Điều kiện: $-3\le x\le 6$.

Đặt $t=\sqrt{3+x}+\sqrt{6-x}\Rightarrow t^2=9+2\sqrt{(3+x)(6-x)}\Rightarrow\sqrt{(3+x)(6-x)}=\frac{t^2-9}{2}$

Phương trình đã cho trở thành: $t-\frac{t^2-9}{2}=m\Leftrightarrow t^2-2t=9-2m$ (2).

Xét hàm số $t(x)=\sqrt{3+x}+\sqrt{6-x}\Rightarrow t'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x+3}}-\frac{1}{2\sqrt{6-x}}$

$\Rightarrow t'(x)=0\Leftrightarrow\sqrt{6-x}=\sqrt{x+3}\Leftrightarrow x=\frac{3}{2}$. Ta có bảng biến thiên của t(x)

x	-3		$\frac{3}{2}$		6
t’(x)		$+$	0	$-$	
t(x)	3	$\nearrow$	$3\sqrt{2}$	$\searrow$	3

Dựa vào bảng biến thiên $\Rightarrow t\in[3;3\sqrt{2}]$.

$\Rightarrow$ (1) có nghiệm $\Leftrightarrow$ (2) có nghiệm $t\in[3;3\sqrt{2}]$.

Xét hàm số $f(t)=t^2-2t$ với $3\le t\le 3\sqrt{2}$, có $f'(t)=2t-2>0\ \ \forall t\in[3;3\sqrt{2}]$

$\Rightarrow$ f(t) là hàm đồng biến trên $[3;3\sqrt{2}]$

$\Rightarrow 3=f(3)\le f(t)\le f(3\sqrt{2})=18-6\sqrt{2}\quad\forall t\in[3;3\sqrt{2}]$.

Vậy phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow 3\le 9-2m\le 18-6\sqrt{2}\Leftrightarrow\frac{6\sqrt{2}-9}{2}\le m\le 3$.

3) Điều kiện : $x\ge 2$.

Ta thấy $x=2$ không là nghiệm của phương trình nên ta chia hai vế phương trình cho $\sqrt[4]{x^2-4}$, ta được: $m\left(\sqrt[4]{\frac{x-2}{x+2}}+2\right)-\sqrt[4]{\frac{x+2}{x-2}}=2$ (*).

Đặt $t=\sqrt[4]{\dfrac{x+2}{x-2}}>0\Rightarrow t^4(x-2)=x+2\Rightarrow x=\dfrac{2(t^4+1)}{t^4-1}>2 \Leftrightarrow \dfrac{4}{t^4-1}>0\Leftrightarrow t>1$

Khi đó (*) trở thành: $m\left(\dfrac{1}{t}+2\right)-t=2\Leftrightarrow m=\dfrac{t^2+2t}{2t+1}=f(t)$ (3).

Phương trình đã cho có nghiệm $\Leftrightarrow$ (3) có nghiệm $t>1$.

Xét hàm số f(t) với $t>1$, có: $f'(t)=\dfrac{2t^2+2t+2}{(2t+1)^2}>0\ \forall t>1$.

$\Rightarrow f(t)>f(1)=1\quad \forall t>1$.

Vậy phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow m>1$.

Chú ý : Trong các bài toán trên sau khi đặt ẩn phụ ta thường gặp khó khăn khi xác định miền xác định của t .Ở trên chúng ta đã làm quen với ba cách tìm miền xác định của t. Tuy nhiên ngoài những cách trên ta còn có những cách khác để tìm miền xác định của t. Chẳng hạn:

Ở câu 2) ta có thể áp dụng BĐT Côsi để tìm xác định của t :

$$2\sqrt{(3+x)(6-x)}\le 9\Rightarrow 9\le t^2\le 18\Rightarrow 3\le t\le 3\sqrt{2}.$$

Ở câu 3 để tìm miền xác định ta có thể làm như sau:

$$t=\sqrt[4]{1+\frac{1}{x-2}} \text{ vì } \frac{1}{x-2}>0\ \ \forall x>2\Rightarrow t>1.$$

Ví dụ 12: Tìm m để các phương trình

1) $\tan^2 x+\cot^2 x+m(\tan x+\cot x)+3=0$ có nghiệm .

2) $\log_3^2 x+\sqrt{\log_3^2 x+1}-2m-1=0$ có nghiệm trên $[1;3^{\sqrt{3}}]$.

3) $m.9^{2x^2-x}-(2m+1)6^{2x^2-x}+m.4^{2x^2-x}=0$ có nghiệm x thỏa mãn $|x|\ge\dfrac{1}{2}$.

Giải:

1) Đặt $t=\tan x+\cot x\Rightarrow \tan^2 x+\cot^2 x=t^2-2$ và $|t|\ge 2$.

Phương trình đã cho trở thành: $t^2+mt+1=0\Leftrightarrow \dfrac{t^2+1}{t}=-m$ (3) (vì $t\ne 0$).

Phương trình đã cho có nghiệm $\Leftrightarrow$ (3) có nghiệm t thỏa mãn $|t|\ge 2$.

Xét hàm số $f(t)=\dfrac{t^2+1}{t}$ với $|t|\ge 2$, ta có: $f'(t)=\dfrac{t^2-1}{t^2}>0\ \forall t:\ |t|\ge 2$

Bảng biến thiên

t	$-\infty$	-2		2	$+\infty$
f'(t)	+			+	
f(t)	$-\infty$ ↗	-5/2		5/2 ↗	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow |m| \geq \frac{5}{2}$.

2) Đặt $t=\sqrt{\log_3^2 x+1} \Rightarrow \log_3^2 x = t^2-1$. Với $1\leq x\leq 3^{\sqrt{3}} \Rightarrow 1\leq t\leq 2$.

Phương trình đã cho trở thành: $t^2+t=2m+2$ (2)

Phương trình đã cho có nghiệm trên $[1;3^{\sqrt{3}}] \Leftrightarrow$ (2) có nghiệm $1\leq t\leq 2$.

Xét hàm số $f(t)=t^2+t$ với $1\leq t\leq 2$, ta thấy f(t) là hàm đồng biến trên [1;2]

Suy ra $2=f(1)\leq f(t)\leq f(2)=5 \quad \forall t\in[1;2]$.

Vậy phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow 2\leq 2m+2\leq 5 \Leftrightarrow 0\leq m\leq \frac{3}{2}$.

3) Đặt $u=2x^2-x \Rightarrow u'(x)=4x-1$.

Lập bảng biến thiên của u(x) ta $\Rightarrow u\geq 0 \quad \forall x: |x|\geq \frac{1}{2}$.

Bất phương trình trở thành: $m9^u-(2m+1)6^u+m4^u=0$

$$\Leftrightarrow m\left(\frac{3}{2}\right)^{2u}-(2m+1)\left(\frac{3}{2}\right)^{u}+m=0 \Leftrightarrow mt^2-(2m+1)t+m=0$$

(trong đó ta đặt $t=\left(\frac{3}{2}\right)^u \Rightarrow t\geq 1 \ \forall u\geq 0$)

$\Leftrightarrow m(t^2-2t+1)=t \Leftrightarrow m=\dfrac{t}{t^2-2t+1}=f(t)$ (3) (do t=1 không là nghiệm PT)

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ (3) có nghiệm $t>1$.

Xét hàm số $f(t)$ với $t>1$, có $f'(t)=\dfrac{1-t^2}{(t^2-2t+1)^2}<0 \quad \forall t>1$ và $\lim\limits_{x\to+\infty} f(t)=0$

Bảng biến thiên

t	1 $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
f'(t)	+
f(t)	$+\infty$ $\searrow$ 0

Vậy $m>0$ là những giá trị cần tìm.

Ví dụ 13: Tìm m để phương trình sau có nghiệm

$$(4m-3)\sqrt{x+3}+(3m-4)\sqrt{1-x}+m-1=0 \quad (1).$$

Giải: Điều kiện : $-3\leq x\leq 1$.

Phương trình $\Leftrightarrow m(4\sqrt{x+3}+3\sqrt{1-x}+1)=3\sqrt{x+3}+4\sqrt{x-1}+1$

$$\Leftrightarrow \frac{3\sqrt{x+3}+4\sqrt{1-x}+1}{4\sqrt{x+3}+3\sqrt{1-x}+1}=m \quad (2).$$

Vì $\left(\sqrt{x+3}\right)^2+\left(\sqrt{1-x}\right)^2=4$ nên ta có thể đặt: $\begin{cases}\sqrt{x+3}=2\dfrac{2t}{1+t^2}\\ \sqrt{1-x}=2\dfrac{1-t^2}{1+t^2}\end{cases}$ với $0\le t\le 1$.

Khi đó (2) trở thành: $m=\dfrac{12t+8(1-t^2)+1+t^2}{16t+6(1-t^2)+t^2+1}=\dfrac{7t^2-12t-9}{5t^2-16t-7}=f(t)$ (3).

(1) có nghiệm $\Leftrightarrow$ (3) có nghiệm $t\in[-1;1]$.

Xét hàm số f(t) với $t\in[0;1]$, có $f'(t)=-\dfrac{52t^2+8t+60}{(5t^2-16t-7)^2}<0\ \ \forall t\in[0;1]$

$\Rightarrow \dfrac{7}{9}=f(1)\le f(t)\le f(0)=\dfrac{9}{7}\ \ \forall t\in[0;1]$

Vậy phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow \dfrac{7}{9}\le m\le\dfrac{9}{7}$.

Chú ý : Chắc có lẽ các bạn sẽ thắc mắc vì sao lại nghĩ ra các đặt như vậy ? Mới nhìn vào có vẻ thấy các đặt t ở trên thiếu tự nhiên. Thực chất ra các đặt ở trên ta đã bỏ qua một bước đặt trung gian. Cụ thể:

Từ đẳng thức $\left(\sqrt{x+3}\right)^2+\left(\sqrt{1-x}\right)^2=4$ ta đặt $\begin{cases}\sqrt{x+3}=2\sin\alpha\\ \sqrt{1-x}=2\cos\alpha\end{cases}$ với $\alpha\in[0;\frac{\pi}{2}]$,

sau đó ta lại tiếp tục đặt $t=\tan\dfrac{\alpha}{2}$ nên ta mới có: $\begin{cases}\sqrt{x+3}=2\dfrac{2t}{1+t^2}\\ \sqrt{1-x}=2\dfrac{1-t^2}{1+t^2}\end{cases}$. Đến đây chắc các bạn thấy cách đặt ở trên hoàn toàn rất tự nhiên phải không?!.

Ví dụ 14: Xác định mọi giá trị của tham số m để hệ sau có 2 nghiệm phân biệt

$$\begin{cases}\log_{\sqrt3}(x+1)-\log_{\sqrt3}(x-1)>\log_3 4 & (1)\\ \log_2(x^2-2x+5)-m\log_{x^2-2x+5}2=5 & (2)\end{cases}.$$

Giải: Điều kiện : $x>1$.

(1) $\Leftrightarrow \log_{\sqrt3}\dfrac{x+1}{x-1}>\log_{\sqrt3}2\Leftrightarrow\dfrac{x+1}{x-1}>2\Leftrightarrow 1<x<3$ (Do $x>1$).

Vậy hệ đã cho có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ (2) có hai nghiệm phân biệt $1<x<3$.

Đặt $t=\log_2(x^2-2x+5)\Rightarrow 2<t<3\ \forall x\in(1;3)$ và (2) trở thành

$$t+\frac{m}{t}=5\Leftrightarrow t^2-5t=-m \qquad (3)$$

Từ cách đặt t ta có: $(x-1)^2 = 2^t - 4 \Rightarrow$ Với mỗi giá trị $t \in (2;3)$ thì cho ta đúng một giá trị $x \in (1;3)$. Suy ra (2) có 2 nghiệm phân biệt $x \in (1;3) \Leftrightarrow (3)$ có 2 nghiệm phân biệt $t \in (2;3)$.

Xét hàm số $f(t) = t^2 - 5t$ với $t \in (2;3) \Rightarrow f'(t) = 2t - 5 \Rightarrow f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{5}{2}$

Bảng biến thiên

t	2		$\frac{5}{2}$		3
f'(t)		–	0	+	
f(t)	-6	↘	$-\frac{25}{4}$	↗	-6

$\Rightarrow$ (3) có 2 nghiệm phân biệt $t \in (2;3) \Leftrightarrow -\frac{25}{4} < -m < -6 \Leftrightarrow 6 < m < \frac{25}{4}$.

Ví dụ 14: Cho phương trình $x^6 + 3x^5 - 6x^4 - ax^3 - 6x^2 + 3x + 1 = 0$ (1). Tìm tất cả các giá trị của tham số a, để phương trình có đúng 2 nghiệm phân biệt.

Giải: Vì $x = 0$ không phải là nghiệm phương trình . Chia hai vế pt cho x^3 ta được $(x^3 + \frac{1}{x^3}) + 3(x^2 + \frac{1}{x^2}) - 6(x + \frac{1}{x}) - a = 0$.Đặt $t = x + \frac{1}{x}$ ta có được phương trình:

$t(t^2 - 3) + 3(t^2 - 2) - 6t = a \Leftrightarrow t^3 + 3t^2 - 9t = a + 6$ (2)

Từ cách đặt t, ta có: $x^2 - tx + 1 = 0$ (3) $\Rightarrow \Delta = t^2 - 4 \geq 0 \Leftrightarrow |t| \geq 2$. Từ đây ta có:

* Nếu $t = \pm 2$ thì phương trình (3) có một nghiệm.

*Nếu $|t| > 2$ thì với mỗi giá trị của t cho tương ứng hai giá trị của x.

Nên (1) có đúng hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ (2) hoặc có đúng hai nghiệm t=2 và t=-2 hoặc (2) có đúng một nghiệm thỏa mãn |t|>2.

TH 1: Nếu (2) có đúng hai ngiệm $t = \pm 2 \Rightarrow \begin{cases} 2 = a + 6 \\ 22 = a + 6 \end{cases}$ hệ vô nghiệm.

TH 2: (2) có đúng một nghiệm thỏa mãn |t|>2.

Xét hàm số $f(t) = t^3 + 3t^2 - 9t$ với $|t| > 2$, có: $f'(t) = 3t^2 + 6t - 9 = 3(t-1)(t+3)$.

Ta có bảng biến thiên:

t	$-\infty$		-3		-2		2		$+\infty$
f'(t)		+	0	-				+	
f(t)	$-\infty$	↗	27	↘	22		2	↗	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy phương trình (2) có đúng một nghiệm $|t| > 2$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a+6<2 \\ a+6>27 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a<-4 \\ a>21 \end{array}\right.$.

Ví dụ 15: Tìm m để phương trình sau có bốn nghiệm phân biệt.

$$m(\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}+2)=2\sqrt{1-x^4}+\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}-1 \quad (1).$$

Giải: Điều kiện : $|x|\le 1$.

Đặt $t=\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}\ge 0 \Rightarrow t^2=2-2\sqrt{1-x^4} \Leftrightarrow \begin{cases} 0\le t\le 1 \\ 2\sqrt{1-x^4}=2-t^2 \end{cases}$.

(1) trở thành: $m(t+2)=1-t^2+t \Leftrightarrow m=\dfrac{-t^2+t+1}{t+2}=f(t) \quad (2).$

Từ cách đặt $t \Rightarrow 1-x^4=\left(\dfrac{2-t^2}{2}\right)^2 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt[4]{1-\left(\dfrac{2-t^2}{2}\right)^2} \quad \forall t\in[0;1]$

$\Rightarrow$ với mỗi giá trị $t\in(0;1]$ ta có hai giá trị x, còn $t=0\Rightarrow x=0$.

Mặt khác: $1-\left(\dfrac{2-t_1^2}{2}\right)^2=1-\left(\dfrac{2-t_2^2}{2}\right)^2 \Leftrightarrow t_1^2=t_2^2 \Leftrightarrow t_1=t_2$

$\Rightarrow$ (1) có bốn nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ (2) có đúng hai nghiệm $t\in(0;1]$

Xét hàm số f(t) với $t\in[0;1]$, có: $f'(t)=\dfrac{-t^2-4t+1}{(t+2)^2} \Rightarrow f'(t)=0 \Leftrightarrow t=\sqrt{5}-2$.

Bảng biến thiên

t	0		$\sqrt{5}-2$		1
f'(t)		+	0	−	
f(t)	$\frac{1}{2}$	↘	$-2\sqrt{5}$	↗	$\frac{1}{3}$

$\Rightarrow$(2) có hai nghiệm phân biệt $t\in(0;1] \Leftrightarrow -2\sqrt{5}<m\le\dfrac{1}{3}$.

Vậy $-2\sqrt{5}<m\le\dfrac{1}{3}$ là những giá trị cần tìm.

Ví dụ 16: Biện luận số nghiệm của phương trình :

$$m.2^{\sqrt[3]{x^2}+1}+(2m+1)(3-\sqrt{5})^{\sqrt[3]{x^2}}+(3+\sqrt{5})^{\sqrt[3]{x^2}}=0 \quad (1).$$

Giải:

(1) $\Leftrightarrow 2m+(2m-1)\left(\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^{\sqrt[3]{x^2}}+\left(\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^{\sqrt[3]{x^2}}=0 \quad (2).$

Đặt $t=\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^{\sqrt[3]{x^2}}$ $\Rightarrow t\ge 1$. Khi đó (2) trở thành:

$$2m+(2m-1)\frac{1}{t}+t=0\Leftrightarrow -2m(t+2)=t^2-1\Leftrightarrow -2m=\frac{t^2-1}{t+2}=f(t)\quad (3).$$

Với $\forall t\ge 1\Rightarrow t=\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^{\sqrt[3]{x^2}}$ $\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{\log^3_{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} t}$ $(*)$.

- Nếu $t=1\Rightarrow (*)$ có một giá trị $x=0$
- Nếu $t>1\Rightarrow (*)$ có hai giá trị x.

$\Rightarrow$ Số nghiệm của (1) phụ thuộc vào số nghiệm $t\ge 1$ của (3)

Xét hàm số f(t) với $t\ge 1$, có: $f'(t)=\frac{t^2+4t+1}{(t+2)^2}>0\ \ \forall t\ge 1$.

Bảng biến thiên:

t	1	$+\infty$
f'(t)	+	
f(t)	0 ↗	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, ta có:

* Nếu $-2m<0\Leftrightarrow m>0\Rightarrow (3)$ vô nghiệm $\Rightarrow (1)$ vô nghiệm.

* Nếu $m=0\Rightarrow (3)$ có một nghiệm $t=1\Rightarrow (1)$ có một nghiệm $x=0$

* Nếu $m<0\Rightarrow (3)$ có một nghiệm $t>1\Rightarrow (1)$ có hai nghiệm phân biệt.

Ví dụ 17: Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình :

$$(m-1)\log^2_{\frac{1}{2}}(x-2)-(m-5)\log_{\frac{1}{2}}(x-2)+m-1=0\ \ (1)$$

có hai nghiệm thoả mãn điều kiện : $2<x_1\le x_2<4$.

Giải:

Đặt $t=\log_{\frac{1}{2}}(x-2)\Rightarrow t\in(-2;0)\ \forall x\in(2;4)$ và mỗi $t\in(-2;0)$ cho một giá trị $x\in(2;4)$. Khi đó (1) trở thành:

$$(m-1)t^2-(m-5)t+m-1=0\Leftrightarrow m=\frac{t^2-5t+1}{t^2-t+1}=f(t)\quad (2).$$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ (2) có hai nghiệm $-2<t_1\le t_2<0$.

Xét hàm số f(t) với $t\in(-2;0)$, có $f'(t)=-\frac{t^2+4}{(t^2-t+1)^2}<0\ \ \forall t\in(-2;0)$.

$\Rightarrow 1=f(0)<m<f(-2)=\frac{15}{7}$ là những giá trị cần tìm.

Bài toán 2: Tìm m để bất phương trình $f(x) > g(m)$ có nghiệm trên D.

Phương pháp: Với dạng toán này trước hết ta đi khảo sát và lập bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ trên D, rồi dựa vào các tính chất sau để chúng ta định giá trị của tham số:

1) Bất phương trình $f(x) \ge g(m)$ có nghiệm trên D $\Leftrightarrow \max\limits_{x\in D} f(x) \ge g(m)$

2) Bất phương trình $f(x) \le g(m)$ có nghiệm trên D $\Leftrightarrow \min\limits_{x\in D} f(x) \le g(m)$

Ví dụ 1: Tìm m để bất phương trình sau có nghiệm

1) $\sqrt{4-x} + \sqrt{x+5} \ge m$ 2) $mx - \sqrt{x-3} \le m+1$.

Giải:

1) Điều kiện : $-5 \le x \le 4$.

Xét hàm số $f(x) = \sqrt{4-x} + \sqrt{x+5}$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{-1}{2\sqrt{4-x}} + \frac{1}{2\sqrt{x+5}} = \frac{\sqrt{4-x} - \sqrt{x+5}}{2\sqrt{(4-x)(x+5)}}.$$

$$\Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{4-x} - \sqrt{x+5} = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}.$$

Suy ra $\max\limits_{[-5;4]} f(x) = \max\left\{ f(4), f(\frac{-1}{2}), f(-5) \right\} = 3\sqrt{2}$.

Vậy bất phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow m \le \max\limits_{[-5;4]} f(x) = 3\sqrt{2}$.

2) Điều kiện : $x \ge 3$.

Bất phương trình $\Leftrightarrow m \le \dfrac{\sqrt{x-3}+1}{x-1}$. Xét hàm số $f(x) = \dfrac{\sqrt{x-3}+1}{x-1}$ với $x \ge 3$.

Ta có: $f'(x) = \dfrac{5-x-\sqrt{x-3}}{2\sqrt{x-3}(x-1)^2} \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 4$ và $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

Bảng biến thiên:

x	3		4		$+\infty$
f’		+	0	-	
f			$\frac{2}{3}$		
	$\frac{1}{2}$	↗		↘	0

Vậy bất phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow m \le \max\limits_{x\ge 3} f(x) = \dfrac{2}{3}$.

Ví dụ 2: Tìm m để các bất phương trình sau có nghiệm

1) $4^x - m.2^{x+1} + 3 - 2m \le 0$ (1) 2) $\begin{cases} \lg^2 x - m\lg x + m + 3 \le 0 \\ x > 1 \end{cases}$ (2).

Giải:

1) Đặt $t = 2^x$, $t > 0$. Khi đó bất phương trình trở thành:

$$t^2 - 2mt + 3 - 2m \le 0 \Leftrightarrow f(t) = \frac{t^2+3}{t+1} \le 2m \qquad (3).$$

(1) có nghiệm $\Leftrightarrow$ (3) có nghiệm $t > 0$. Xét hàm số f(t) với $t > 0$, ta có:

$$f'(t) = \frac{t^2 + 2t - 3}{(t+1)^2} \Rightarrow f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 1 \quad (\text{do } t > 0).$$

Bảng biến thiên:

t	0		1		$+\infty$
f'(t)		–	0	+	
f(t)	3	↘	2	↗	$+\infty$

$\Rightarrow$ (3) có nghiệm $t > 0 \Leftrightarrow 2m \ge 2 \Leftrightarrow m \ge 1$.

Vậy $m \ge 1$ là những giá trị cần tìm.

2) Đặt $t = \lg x \Rightarrow t > 0\ \forall x > 1$. Khi đó bất phương trình đã cho trở thành:

$$t^2 - mt + m + 3 \ge 0 \Leftrightarrow t^2 + 3 \le m(t-1) \ \ (1).$$

* $t < 1 \Rightarrow (1) \Leftrightarrow \dfrac{t^2+3}{t-1} \ge m$ (2).

Xét hàm số $f(t) = \dfrac{t^2+3}{t-1}$ với $t \in (0;1)$, có $f'(t) = \dfrac{t^2 - 2t - 3}{(t-1)^2} < 0\ \ \forall t \in (0;1)$

$\Rightarrow$ (2) có nghiệm $t \in (0;1) \Leftrightarrow m < f(0) = -3$.

* $t > 1 \Rightarrow (1) \Leftrightarrow m \ge \dfrac{t^2+3}{t-1} = f(t)$ (3).

Ta có bảng biến thiên f(t)

t	1		3		$+\infty$
f'(t)		–	0	+	
f(t)	$+\infty$	↘	6	↗	$+\infty$

(3) có nghiệm $t > 1 \Leftrightarrow m \ge 6$.

Vậy $\left[\begin{array}{l} m < -3 \\ m \ge 6 \end{array}\right.$ là những giá trị cần tìm.

Ví dụ 3: Tìm m để bất phương trình : $m(\sqrt{x^2-2x+2}+1)+x(2-x)\le 0$ (1) có nghiệm $x\in[0;1+\sqrt{3}]$.

Giải:

Đặt $t=\sqrt{x^2-2x+2}=\sqrt{(x-1)^2+1}\Rightarrow t\in[1;2]\ \ \forall x\in[0;1+\sqrt{3}]$

Khi đó (1) trở thành: $m(t+1)\le t^2-2\Leftrightarrow m\le\dfrac{t^2-2}{t+1}=f(t)$ (2).

Xét hàm số f(t) trên $[1;2]$, ta có: $f'(t)=\dfrac{t^2+2t+2}{(t+1)^2}>0\ \ \forall t\in[1;2]$

(1) có nghiệm $x\in[0;1+\sqrt{3}]\Leftrightarrow$ (2) có nghiệm $t\in[1;2]$

$\Leftrightarrow m\le\max\limits_{[1;2]}f(t)=f(2)=\dfrac{2}{3}$.

Ví dụ 4: Tìm m để bất phương trình sau có nghiệm:

$$2^{\sin^2x}+3^{\cos^2x}\ge m.3^{\sin^2x}.$$

Giải:

Bất phương trình $\Leftrightarrow(\frac{2}{3})^{\sin^2x}+3(\frac{1}{9})^{\sin^2x}\ge m\Leftrightarrow\left(\dfrac{2}{3}\right)^t+3\left(\dfrac{1}{9}\right)^t\ge m$

với $t=\sin^2x\Rightarrow t\in[0;1]$. Xét hàm số $f(t)=\left(\dfrac{2}{3}\right)^t+3\left(\dfrac{1}{9}\right)^t$, ta thấy f(t) là hàm nghịch biến.

$\Rightarrow\max\limits_{[0;1]}f(t)=f(0)=4$. Vậy bất phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow m\le 4$.

Ví dụ 5: Tìm m để hệ bất phương trình sau có nghiệm:

$$\begin{cases}\sqrt{2x+1}-1\ge\sqrt{2x-1} & (1)\\ |8x-5|+x^3+2x+1-2m\ge 0 & (2)\end{cases}.$$

Giải: Điều kiện: $x\ge\dfrac{1}{2}$.

Ta có: (1) $\Leftrightarrow\sqrt{2x+1}\ge\sqrt{2x-1}+1\Leftrightarrow 1\ge 2\sqrt{2x-1}\Leftrightarrow\dfrac{1}{2}\le x\le\dfrac{5}{8}$.

Khi đó: (2) $\Leftrightarrow -8x+5+x^3+2x+1-2m\ge 0\Leftrightarrow f(x)=x^3-6x+6\ge 2m$ (3).

Xét hàm số $f(x)$ trên $\left[\dfrac{1}{2};\dfrac{5}{8}\right]$, ta có: $f'(x)=3x^2-6\le 0\ \ \forall x\in\left[\dfrac{1}{2};\dfrac{5}{8}\right]$.

$\Rightarrow\max\limits_{\left[\frac{1}{2};\frac{5}{8}\right]}f(x)=f(\frac{1}{2})=\dfrac{25}{8}$.

Hệ có nghiệm $\Leftrightarrow$ (3) có nghiệm $x \in \left[\frac{1}{2};\frac{5}{8}\right] \Leftrightarrow 2m \le \max\limits_{\left[\frac{1}{2};\frac{5}{8}\right]} f(x) = \frac{25}{8} \Leftrightarrow m \le \frac{25}{16}$.

Ví dụ 5: Tìm tất cả giá trị của tham số a để hệ sau có nghiệm (x,y) thoả mãn điều kiện $x \ge 4$.

$$\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 3 & (1) \\ \sqrt{x+5} + \sqrt{y+3} \le a & (2) \end{cases}.$$

Giải: Điều kiện : $x, y \ge 0$

Đặt $t = \sqrt{x} \Rightarrow \sqrt{y} = 3 - t$, do $\begin{cases} x \ge 4 \\ y \ge 0 \end{cases} \Rightarrow 2 \le t \le 3$. Khi đó (2) trở thành:

$$a \ge \sqrt{t^2 + 5} + \sqrt{t^2 - 6t + 12} = f(t) \quad (3).$$

Xét hàm số f(t) với $t \in [2;3]$, có $f'(t) = \frac{t}{\sqrt{t^2+5}} + \frac{t-3}{\sqrt{t^2 - 6t + 12}}$

$\Rightarrow f'(t) = 0 \Leftrightarrow t\sqrt{(t-3)^2 + 3} = (3-t)\sqrt{t^2+5} \quad (*)$

$\Rightarrow t^2(t-3)^2 + 3t^2 = (3-t)^2 t^2 + 5(3-t)^2 \Leftrightarrow 2t^2 - 30t + 45 = 0$ phương trình vô nghiệm vì $t \in [2;3]$

BBT:

t	2	3
$f'(t)$	+	
$f(t)$	5 ↗	$\sqrt{14} + \sqrt{3}$

Hệ có nghiệm $\Leftrightarrow$ (3) có nghiệm $t \in [1;2] \Leftrightarrow a \ge \min\limits_{[1;2]} f(t) = f(2) = 5$.

Vậy $a \ge 5$ là những giá trị cần tìm.

Chú ý : Để bất phương trình :
$f(x) \ge k \quad (f(x) \le k) \quad \forall x \in D \Leftrightarrow k \le \min\limits_{D} f(x) \quad (k \ge \max\limits_{D} f(x))$.

Ví dụ 6: Tìm m để bất phương trình : $(x+3)(x+1)(x^2 + 4x + 6) \ge m$ nghiệm đúng $\forall x \in R$.

Giải:

Bất phương trình $\Leftrightarrow (x^2 + 4x + 3)(x^2 + 4x + 6) \ge m$.

Đặt $t = x^2 + 4x + 3 = (x+2)^2 - 1 \Rightarrow t \ge -1$ và bất phương trình trở thành:

$$t^2 + 3t \ge m \quad \forall t \ge -1 \ (*)$$

Xét hàm số $f(t) = t^2 + 3t \Rightarrow f'(t) = 2t + 3 > 0 \ \forall t \ge -1 \Rightarrow \min\limits_{t \ge -1} f(t) = -2$.

Bất phương trình đã cho nghiệm đúng với $\forall x \in R \Leftrightarrow$ (*) nghiệm đúng với $\forall t \ge -1$

$\Leftrightarrow m \le \min\limits_{t\ge -1} f(t) = -2$ là những giá trị cần tìm.

Ví dụ 7: Tìm m để bất phương trình : $\sqrt{(4+x)(6-x)} \le x^2 - 2x + m$ nghiệm đúng $\forall x \in [-4;6]$.

Giải:

Đặt $t = \sqrt{(4+x)(6-x)} \Rightarrow 0 \le t \le \dfrac{4+x+6-x}{2} = 5.$

Khi đó bất phương trình trở thành: $t \le 24 - t^2 + m \Leftrightarrow t^2 + t \le m + 24$ (*).

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ (*) nghiệm đúng $\forall t \in [0;5]$.

Xét hàm số $f(t) = t^2 + t$ với $t \in [0;5]$, ta thấy f(t) là hàm đồng biến trên [0;5]

Suy ra $\max\limits_{[0;5]} f(t) = f(5) = 30$.

Vậy $(*)$ nghiệm đúng $\forall t \in [0;5] \Leftrightarrow m + 24 \ge 30 \Leftrightarrow m \ge -6$.

Ví dụ 8: Tìm m để bất phương trình sau nghiệm đúng với mọi $|x| \ge \dfrac{1}{2}$.

$$9^{2x^2-x} - 2(m-1)6^{2x^2-x} + (m+1)4^{2x^2-x} \ge 0.$$

Giải:

Chia hai vế bất phương trình cho 4^{2x^2-x} và đặt $t = \left(\dfrac{3}{2}\right)^{2x^2-x}$, ta được:

$$t^2 - 2(m-1)t + m + 1 \ge 0 \quad (1).$$

Với $|x| \ge \dfrac{1}{2} \Rightarrow 2x^2 - x \ge 0 \Rightarrow t \ge 1 \Rightarrow (1) \Leftrightarrow m \le \dfrac{t^2+2t+1}{2t-1} = f(t)$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow m \le \min\limits_{t\ge 1} f(t)$.

Ta có $f'(t) = \dfrac{2t^2 - 2t - 4}{(2t-1)^2} \Rightarrow f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 2$.

Bảng biến thiên

t	1		2		$+\infty$
f'(t)		$-$	0	$+$	
f(t)	4		3		$+\infty$

Vậy $m \le \min\limits_{t\ge 1} f(t) \Leftrightarrow m \le 3$.