

## Chương 1

# ỨNG DỤNG CỦA ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ

## Bài 1: TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ

### 1.1 TÓM TẮT LÝ THUYẾT

#### 1. Định nghĩa :

Giả sử  $K$  là một khoảng , một đoạn hoặc một nửa khoảng . Hàm số  $f$  xác định trên  $K$  được gọi là

- Đồng biến trên  $K$  nếu với mọi  $x_1, x_2 \in K, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ ;
- Nghịch biến trên  $K$  nếu với mọi  $x_1, x_2 \in K, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ .

#### 2. Điều kiện cần để hàm số đơn điệu :

Giả sử hàm số  $f$  có đạo hàm trên khoảng  $I$

- Nếu hàm số  $f$  đồng biến trên khoảng  $I$  thì  $f'(x) \geq 0$  với mọi  $x \in I$ ;
- Nếu hàm số  $f$  nghịch biến trên khoảng  $I$  thì  $f'(x) \leq 0$  với mọi  $x \in I$ .

#### 3. Điều kiện đủ để hàm số đơn điệu :

Giả sử  $I$  là một khoảng hoặc nửa khoảng hoặc một đoạn ,  $f$  là hàm số liên tục trên  $I$  và có đạo hàm tại mọi điểm trong của  $I$  ( tức là điểm thuộc  $I$  nhưng không phải đầu mút của  $I$  ) .Khi đó :

- Nếu  $f'(x) > 0$  với mọi  $x \in I$  thì hàm số  $f$  đồng biến trên khoảng  $I$  ;
- Nếu  $f'(x) < 0$  với mọi  $x \in I$  thì hàm số  $f$  nghịch biến trên khoảng  $I$  ;
- Nếu  $f'(x) = 0$  với mọi  $x \in I$  thì hàm số  $f$  không đổi trên khoảng  $I$  .

#### Chú ý :

• Nếu hàm số  $f$  liên tục trên  $[a; b]$  và có đạo hàm  $f'(x) > 0$  trên khoảng  $(a; b)$  thì hàm số  $f$  đồng biến trên  $[a; b]$  .

• Nếu hàm số  $f$  liên tục trên  $[a; b]$  và có đạo hàm  $f'(x) < 0$  trên khoảng  $(a; b)$  thì hàm số  $f$  nghịch biến trên  $[a; b]$  .

• Giả sử hàm số  $f$  liên tục trên đoạn  $[a; b]$  .

\* Nếu hàm số  $f$  đồng biến trên khoảng  $(a; b)$  thì nó đồng biến trên đoạn  $[a; b]$  .

## Nguyễn Phú Khánh – Đà Lạt .

\* Nếu hàm số  $f$  nghịch biến trên khoảng  $(a; b)$  thì nó nghịch biến trên đoạn  $[a; b]$ .

\* Nếu hàm số  $f$  không đổi trên khoảng  $(a; b)$  thì không đổi trên đoạn  $[a; b]$ .

### 4. Định lý mở rộng

Giả sử hàm số  $f$  có đạo hàm trên khoảng  $I$ .

• Nếu  $f'(x) \geq 0$  với  $\forall x \in I$  và  $f'(x) = 0$  chỉ tại một số hữu hạn điểm thuộc  $I$  thì hàm số  $f$  đồng biến trên khoảng  $I$ ;

• Nếu  $f'(x) \leq 0$  với  $\forall x \in I$  và  $f'(x) = 0$  chỉ tại một số hữu hạn điểm thuộc  $I$  thì hàm số  $f$  nghịch biến trên khoảng  $I$ .

## 1.2 DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

### Dạng 1 : Xét chiều biến thiên của hàm số .

Xét chiều biến thiên của hàm số  $y = f(x)$  ta thực hiện các bước sau:

- Tìm tập xác định  $D$  của hàm số .
- Tính đạo hàm  $y' = f'(x)$ .
- Tìm các giá trị của  $x$  thuộc  $D$  để  $f'(x) = 0$  hoặc  $f'(x)$  không xác định (ta gọi đó là điểm tới hạn hàm số).
- Xét dấu  $y' = f'(x)$  trên từng khoảng  $x$  thuộc  $D$ .
- Dựa vào bảng xét dấu và điều kiện đủ suy ra khoảng đơn điệu của hàm số.

**Ví dụ 1:** Xét chiều biến thiên của các hàm số sau:

$$1. y = \frac{x+2}{x-1}$$

$$2. y = \frac{-x^2 + 2x - 1}{x+2}$$

Giải:

$$1. y = \frac{x+2}{x-1}$$

\* Hàm số đã cho xác định trên khoảng  $(-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$ .

\* Ta có:  $y' = -\frac{3}{(x-1)^2} < 0, \forall x \neq 1$

\* Bảng biến thiên:

$x$	$-\infty$		$1$		$+\infty$
$y'$		-		-	
$y$	$1$		$+\infty$		$1$

Diagram showing the variation of the function  $y = \frac{x+2}{x-1}$ . The x-axis has points  $-\infty$ ,  $1$ , and  $+\infty$ . The y-axis has points  $1$  and  $+\infty$ . The derivative  $y'$  is negative on both intervals  $(-\infty, 1)$  and  $(1, +\infty)$ . The function  $y$  decreases from  $1$  at  $x = -\infty$  to  $-\infty$  at  $x = 1$ , and then increases from  $+\infty$  at  $x = 1$  to  $1$  at  $x = +\infty$ .

**Nguyễn Phú Khánh – Đà Lạt .**

Vậy hàm số đồng biến trên mỗi khoảng  $(-\infty; 1)$  và  $(1; +\infty)$ .

2.  $y = \frac{-x^2 + 2x - 1}{x + 2}$

\* Hàm số đã cho xác định trên khoảng  $(-\infty; -2) \cup (-2; +\infty)$ .

\* Ta có:  $y' = \frac{-x^2 - 4x + 5}{(x + 2)^2}, \forall x \neq -2$

$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -5 \\ x = 1 \end{cases}$

\* Bảng biến thiên :

$x$	$-\infty$	$-5$	$-2$	$1$	$+\infty$	
$y'$	$-$	$0$	$+$	$+$	$0$	$-$
$y$	$+\infty$		$+\infty$		$-\infty$	$-\infty$

Vậy, hàm số đồng biến trên các khoảng  $(-5; -2)$  và  $(-2; 1)$ , nghịch biến trên các khoảng  $(-\infty; -5)$  và  $(1; +\infty)$ .

**Nhận xét:**

\* Đối với hàm số  $y = \frac{ax + b}{cx + d}$  ( $a, c \neq 0$ ) luôn đồng biến hoặc luôn nghịch biến trên từng khoảng xác định của nó.

\* Đối với hàm số  $y = \frac{ax^2 + bx + c}{a'x + b'}$  luôn có ít nhất hai khoảng đơn điệu.

\* Cả hai dạng hàm số trên không thể luôn đơn điệu trên  $\mathbb{R}$ .

**Bài tập tương tự :**

Xét chiều biến thiên của các hàm số sau:

1.  $y = \frac{2x - 1}{x + 1}$

4.  $y = \frac{3x}{x^2 + 1}$

2.  $y = \frac{x^2 + 4x + 3}{x + 2}$

5.  $y = \frac{x^2 - 4x + 3}{2x^2 - 2x - 4}$

3.  $y = \frac{x + 1}{3\sqrt{x}}$

6.  $y = \frac{x^2 + 2x + 2}{2x^2 + x + 1}$

**Ví dụ 2:** Xét chiều biến thiên của các hàm số sau:

1.  $y = -x^3 - 3x^2 + 24x + 26$

2.  $y = x^4 - 6x^2 + 8x + 1$

Giải:

1.  $y = -x^3 - 3x^2 + 24x + 26$

\* Hàm số đã cho xác định trên  $\mathbb{R}$ .

\* Ta có :  $y' = -3x^2 - 6x + 24$

$$y' = 0 \Leftrightarrow -3x^2 - 6x + 24 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ x = 2 \end{cases}$$

\* Bảng xét dấu của  $y'$ :

$x$	$-\infty$		$-4$		$2$		$+\infty$
$y'$		$-$	$0$	$+$	$0$	$-$	

+ Trên khoảng  $(-4; 2)$ :  $y' > 0 \Rightarrow y$  đồng biến trên khoảng  $(-4; 2)$ ,

+ Trên mỗi khoảng  $(-\infty; -4), (2; +\infty)$ :  $y' < 0 \Rightarrow y$  nghịch biến trên các khoảng  $(-\infty; -4), (2; +\infty)$ .

Hoặc ta có thể trình bày :

\* Hàm số đã cho xác định trên  $\mathbb{R}$ .

\* Ta có :  $y' = -3x^2 - 6x + 24$

$$y' = 0 \Leftrightarrow -3x^2 - 6x + 24 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ x = 2 \end{cases}$$

\* Bảng biến thiên :

$x$	$-\infty$		$-4$		$2$		$+\infty$	
$y'$		$-$	$0$	$+$	$0$	$-$		
$y$	$+\infty$	↘		↗		↘		$-\infty$

Vậy, hàm số đồng biến trên khoảng  $(-4; 2)$ , nghịch biến trên các khoảng  $(-\infty; -4)$  và  $(2; +\infty)$ .

2.  $y = x^4 - 6x^2 + 8x + 1$

\* Hàm số đã cho xác định trên  $\mathbb{R}$ .

\* Ta có:  $y' = 4x^3 - 12x + 8 = 4(x - 1)^2(x + 2)$

$$y' = 0 \Leftrightarrow 4(x - 1)^2(x + 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 1 \end{cases}$$

\* Bảng xét dấu:

$x$	$-\infty$		$-2$		$1$		$+\infty$
$y'$		$-$	$0$	$+$	$0$	$+$	

**Nguyễn Phú Khánh – Đà Lạt .**

Vậy, hàm số đồng biến trên khoảng  $(-2; +\infty)$  và nghịch biến trên khoảng  $(-\infty; -2)$ .

**Nhận xét:**

\* Ta thấy tại  $x = 1$  thì  $y = 0$ , nhưng qua đó  $y'$  không đổi dấu.

\* Đối với hàm bậc bốn  $y = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$  luôn có ít nhất một khoảng đồng biến và một khoảng nghịch biến. Do vậy với hàm bậc bốn không thể đơn điệu trên  $\mathbb{R}$ .

***Bài tập tương tự :***

Xét chiều biến thiên của các hàm số sau:

1.  $y = x^3 - 3x^2 + 2$

2.  $y = x^3 + 3x^2 + 3x + 2$

3.  $y = -\frac{1}{4}x^4 + 2x^2 - 1$

4.  $y = x^4 + 2x^2 - 3$

5.  $y = -\frac{4}{5}x^5 + x^3 + 8$

6.  $y = \frac{1}{5}x^5 - \frac{3}{4}2x^4 + \frac{3}{2}x^2 - 2x$

7.  $y = 9x^7 - 7x^6 + \frac{7}{5}x^5 + 12$

**Ví dụ 3 :** Xét chiều biến thiên của các hàm số sau:

1.  $y = \sqrt{x^2 - 2x}$

3.  $y = x\sqrt{1 - x^2}$

2.  $y = \sqrt{3x^2 - x^3}$

4.  $y = x + 1 - 2\sqrt{x^2 + 3x + 3}$

Giải:

1.  $y = \sqrt{x^2 - 2x}$ .

\* Hàm số đã cho xác định trên mỗi nửa khoảng  $(-\infty; 0] \cup [2; +\infty)$ .

\* Ta có:  $y' = \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x}}, \forall x \in (-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$ .

Hàm số không có đạo hàm tại các điểm  $x = 0, x = 2$ .

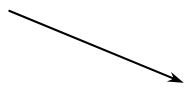


Cách 1 :

+ Trên khoảng  $(-\infty; 0)$ :  $y' < 0 \Rightarrow$  hàm số nghịch biến trên khoảng  $(-\infty; 0)$ ,

+ Trên khoảng  $(2; +\infty)$ :  $y' > 0 \Rightarrow$  hàm số đồng biến trên khoảng  $(2; +\infty)$ .

Cách 2 :

Bảng biến thiên :

$x$	$-\infty$	$0$	$2$	$+\infty$
$y'$	$-$	$\parallel$	$\parallel$	$+$
$y$				

**Nguyễn Phú Khánh – Đà Lạt .**

Vậy , hàm số nghịch biến trên khoảng  $(-\infty; 0)$  và đồng biến trên khoảng  $(2; +\infty)$

2.  $y = \sqrt{3x^2 - x^3}$

\* Hàm số đã cho xác định trên nửa khoảng  $(-\infty; 3]$ .

\* Ta có:  $y' = \frac{3(2x - x^2)}{2\sqrt{3x^2 - x^3}}, \forall x \in (-\infty; 0) \cup (0; 3)$ .

Hàm số không có đạo hàm tại các điểm  $x = 0, x = 3$ .

Suy ra, trên mỗi khoảng  $(-\infty; 0)$  và  $(0; 3)$ :  $y' = 0 \Leftrightarrow x = 2$

Bảng biến thiên:

$x$	$-\infty$		0		2		3		$+\infty$
$y'$		-		+	0	-			
$y$	↘		↗		↘		■		

Hàm số đồng biến trên khoảng  $(0; 2)$ , nghịch biến trên các khoảng  $(-\infty; 0)$  và  $(2; 3)$ .

3.  $y = x\sqrt{1 - x^2}$

\* Hàm số đã cho xác định trên đoạn  $[-1; 1]$ .

\* Ta có:  $y' = \frac{1 - 2x^2}{\sqrt{1 - x^2}}, \forall x \in (-1; 1)$

Hàm số không có đạo hàm tại các điểm  $x = -1, x = 1$ .

Trên khoảng  $(-1; 1)$ :  $y' = 0 \Leftrightarrow x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$

Bảng biến thiên:

$x$	$-\infty$		-1		$-\frac{\sqrt{2}}{2}$		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		1		$+\infty$
$y'$				-	0	+	0	-			
$y$	■		↘		↗		↘		■		

Hàm số đồng biến trên khoảng  $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ , nghịch biến trên mỗi khoảng

$\left(-1; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$  và  $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; 1\right)$ .

**Nguyễn Phú Khánh – Đà Lạt .**

4.  $y = x + 1 - 2\sqrt{x^2 + 3x + 3}$

\* Hàm số đã cho xác định trên  $\mathbb{R}$ .

\* Ta có:  $y' = 1 - \frac{2x + 3}{\sqrt{x^2 + 3x + 3}}$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 3x + 3} = 2x + 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{3}{2} \\ x^2 + 3x + 3 = (2x + 3)^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = -1$$

Bảng biến thiên :

$x$	$-\infty$		$-1$		$+\infty$
$y'$	+		0	-	
$y$					

Hàm số đồng biến trên khoảng  $(-\infty; -1)$ , nghịch biến trên khoảng  $(-1; +\infty)$ .

**Bài tập tương tự :**

Xét chiều biến thiên của các hàm số sau:

1.  $y = \sqrt{2x - x^2}$

5.  $y = (4 - 3x)\sqrt{6x^2 + 1}$

2.  $y = x + 1 - \sqrt{x^2 - 4x + 3}$

6.  $y = \frac{\sqrt{2x^2 - x + 3}}{3x + 2}$

3.  $y = \sqrt[3]{3x - 5}$

7.  $y = \frac{x + 2}{\sqrt{x^2 - x + 3}}$

4.  $y = \sqrt[3]{x^2 - 2x}$

**Ví dụ 4 :** Xét chiều biến thiên của các hàm số sau:  $y = |x^2 - 2x - 3|$

**Giải:**

$$y = |x^2 - 2x - 3| = \begin{cases} x^2 - 2x - 3 & \text{khi } x \leq -1 \vee x \geq 3 \\ -x^2 + 2x + 3 & \text{khi } -1 < x < 3 \end{cases}$$

\* Hàm số đã cho xác định trên  $\mathbb{R}$ .

\* Ta có:  $y' = \begin{cases} 2x - 2 & \text{khi } x < -1 \vee x > 3 \\ -2x + 2 & \text{khi } -1 < x < 3 \end{cases}$

Hàm số không có đạo hàm tại  $x = -1$  và  $x = 3$ .

+ Trên khoảng  $(-1; 3)$ :  $y' = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ;

+ Trên khoảng  $(-\infty; -1)$ :  $y' < 0$ ;

+ Trên khoảng  $(3; +\infty)$ :  $y' > 0$ .

**Nguyễn Phú Khánh – Đà Lạt .**

Bảng biến thiên:

$x$	$-\infty$	$-1$	$1$	$3$	$+\infty$			
$y'$		-		+	0	-		+
$y$		↖ ↗		↖ ↗		↖ ↗		

Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng  $(-1;1)$  và  $(3;+\infty)$ , nghịch biến trên mỗi khoảng  $(-\infty;-1)$  và  $(1;3)$ .

**Bài tập tương tự :**

Xét chiều biến thiên của các hàm số sau:

1.  $y = |x^2 - 5x + 4|$
2.  $y = -3x + 7 + \sqrt{x^2 - 6x + 9}$
3.  $y = -x + 1 - |2x^2 + 5x - 7|$
4.  $y = x^2 + |x^2 - 7x + 10|$

**Ví dụ 5 :**

Xét chiều biến thiên của hàm số sau:  $y = 2 \sin x + \cos 2x$  trên đoạn  $[0; \pi]$ .

Giải :

- \* Hàm số đã cho xác định trên đoạn  $[0; \pi]$
- \* Ta có:  $y' = 2 \cos x (1 - 2 \sin x), x \in [0; \pi]$ .

Trên đoạn  $[0; \pi]$ :  $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [0; \pi] \\ \cos x = 0 \\ \sin x = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} \vee x = \frac{\pi}{6} \vee x = \frac{5\pi}{6}$ .

Bảng biến thiên:

$x$		$0$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\pi$			
$y'$			+	0	-	0	+	0	-
$y$		↖ ↗		↖ ↗		↖ ↗		↖ ↗	

Dựa vào bảng biến thiên suy ra : hàm số đồng biến trên các khoảng  $(0; \frac{\pi}{6})$  và

$(\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6})$ , nghịch biến trên các khoảng  $(\frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{6})$  và  $(\frac{5\pi}{6}; \pi)$ .

**Bài tập tương tự :**

Xét chiều biến thiên của các hàm số sau:

**Nguyễn Phú Khánh – Đà Lạt .**

1.  $y = \sin 3x$  trên khoảng  $\left(0; \frac{\pi}{3}\right)$ .

2.  $y = \frac{\cot x}{x}$  trên khoảng  $(0; \pi)$ .

3.  $y = \frac{1}{8} \sin 4x - \frac{1}{4}(\sqrt{2} - \sqrt{3}) \cos 2x$  trên khoảng  $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ .

4.  $y = 3 \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + \sqrt{3} \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$  trên đoạn  $[0; \pi]$ .

**Ví dụ 6:** Chứng minh rằng hàm số  $y = \sin^2 x + \cos x$  đồng biến trên đoạn  $\left[0; \frac{\pi}{3}\right]$  và nghịch biến trên đoạn  $\left[\frac{\pi}{3}; \pi\right]$ .

Giải :

\* Hàm số đã cho xác định trên đoạn  $[0; \pi]$

\* Ta có:  $y' = \sin x (2 \cos x - 1), x \in (0; \pi)$

Vì  $x \in (0; \pi) \Rightarrow \sin x > 0$  nên trên  $(0; \pi)$ :  $y' = 0 \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3}$ .

+ Trên khoảng  $\left(0; \frac{\pi}{3}\right)$ :  $y' > 0$  nên hàm số đồng biến trên đoạn  $\left[0; \frac{\pi}{3}\right]$ ;

+ Trên khoảng  $\left(\frac{\pi}{3}; \pi\right)$ :  $y' < 0$  nên hàm số nghịch biến trên đoạn  $\left[\frac{\pi}{3}; \pi\right]$ .

**Bài tập tương tự :**

1. Chứng minh rằng hàm số  $f(x) = (x - \sin x)(\pi - x - \sin x)$  đồng biến trên đoạn  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ .

2. Chứng minh rằng hàm số  $y = \cos 2x - 2x + 3$  nghịch biến trên  $\mathbb{R}$ .

3. Chứng minh rằng hàm số  $y = \tan \frac{x}{2}$  đồng biến trên các khoảng  $(0; \pi)$  và  $(\pi; 2\pi)$ .

4. Chứng minh rằng hàm số  $y = \cos 3x + \frac{3x}{2}$  đồng biến trên khoảng  $\left(0; \frac{\pi}{18}\right)$  và nghịch biến trên khoảng  $\left(\frac{\pi}{18}; \frac{\pi}{2}\right)$ .

**Dạng 2 : Tùy theo tham số  $m$  khảo sát tính đơn điệu của hàm số .**

**Ví dụ :** Tùy theo  $m$  khảo sát tính đơn điệu của hàm số:

$$y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}m(m+1)x^2 + m^3x + m^2 + 1$$

Giải:

\* Hàm số đã cho xác định trên  $\mathbb{R}$  .

\* Ta có  $y' = x^2 - m(m+1)x + m^3$  và  $\Delta = m^2(m-1)^2$

+  $m = 0$  thì  $y' = x^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$  và  $y' = 0$  chỉ tại điểm  $x = 0$  . Hàm số đồng biến trên mỗi nửa khoảng  $(-\infty; 0]$  và  $[0; +\infty)$  . Do đó hàm số đồng biến trên  $\mathbb{R}$  .

+  $m = 1$  thì  $y' = (x-1)^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$  và  $y' = 0$  chỉ tại điểm  $x = 1$  . Hàm số đồng biến trên mỗi nửa khoảng  $(-\infty; 1]$  và  $[1; +\infty)$  . Do đó hàm số đồng biến trên  $\mathbb{R}$  .

+  $m \neq 0, m \neq 1$  khi đó  $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = m \\ x = m^2 \end{cases}$  .

· Nếu  $m < 0$  hoặc  $m > 1$  thì  $m < m^2$

Bảng xét dấu  $y'$ :

$x$	$-\infty$		$m$		$m^2$		$+\infty$
$y'$		+	0	-	0	+	

Dựa vào bảng xét dấu, suy ra hàm số đồng biến trên các khoảng  $(-\infty; m)$  và  $(m^2; +\infty)$ , giảm trên khoảng  $(m; m^2)$  .

· Nếu  $0 < m < 1$  thì  $m > m^2$

Bảng xét dấu  $y'$ :

$x$	$-\infty$		$m^2$		$m$		$+\infty$
$y'$		+	0	-	0	+	

Dựa vào bảng xét dấu, suy ra hàm số đồng biến trên các khoảng  $(-\infty; m^2)$  và  $(m; +\infty)$ , giảm trên khoảng  $(m^2; m)$  .

**Bài tập tự luyện:**

Tùy theo  $m$  khảo sát tính đơn điệu của hàm số:

1.  $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}mx^2 + m^3x + m - 3$

2.  $y = \frac{1}{3}(m-1)x^3 - \frac{1}{2}(m-1)x^2 + x + 2m + 3$

**Dạng 3 : Hàm số đơn điệu trên  $\mathbb{R}$  .**

Sử dụng định lý về điều kiện cần

- Nếu hàm số  $f(x)$  đơn điệu tăng trên  $\mathbb{R}$  thì  $f'(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$  .
- Nếu hàm số  $f(x)$  đơn điệu giảm trên  $\mathbb{R}$  thì  $f'(x) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$  .

**Ví dụ 1 :** Tìm  $m$  để các hàm số sau luôn nghịch biến trên mỗi khoảng xác định .

$$1. y = \frac{mx + 3 - 2m}{x + m}$$

$$2. y = \frac{-2x^2 + (m + 2)x - 3m + 1}{x - 1}$$

Giải :

$$1. y = \frac{mx + 3 - 2m}{x + m}$$

\* Hàm số đã cho xác định trên khoảng  $(-\infty; -m) \cup (-m; +\infty)$

\* Ta có :  $y' = \frac{m^2 + 2m - 3}{(x + m)^2}, x \neq -m$  .

**Cách 1 :**

\* Bảng xét dấu  $y'$

$m$	$-\infty$	$-3$	$1$	$+\infty$
$y'$	+	0	-	0

Dựa vào bảng xét dấu ta thấy

Nếu  $-3 < m < 1$  thì  $y' < 0 \Rightarrow$  hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng  $(-\infty; -m)$ ,  $(-m; +\infty)$ .

**Cách 2 :**

Hàm số nghịch biến trên tập xác định khi :

$$y' < 0, \forall x \in (-\infty; -m) \cup (-m; +\infty) \Leftrightarrow m^2 + 2m - 3 < 0 \Leftrightarrow -3 < m < 1$$

$$2. y = \frac{-2x^2 + (m + 2)x - 3m + 1}{x - 1} = -2x + m + \frac{1 - 2m}{x - 1}$$

\* Hàm số đã cho xác định trên khoảng  $(-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$ .

\* Ta có :  $y' = -2 + \frac{2m - 1}{(x - 1)^2}, x \neq 1$

**Nguyễn Phú Khánh – Đà Lạt .**

+  $m \leq \frac{1}{2} \Rightarrow y' < 0, x \neq 1$ , do đó hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng  $(-\infty; 1)$ ,  $(1; +\infty)$ .

+  $m > \frac{1}{2}$  khi đó phương trình  $y' = 0$  có hai nghiệm  $x_1 < 1 < x_2 \Rightarrow$  hàm số đồng biến trên mỗi khoảng  $(x_1; 1)$  và  $(1; x_2)$ , trường hợp này không thỏa .

Vậy  $m \leq \frac{1}{2}$  thỏa mãn yêu cầu của bài toán.

**Bài tập tương tự :**

Tìm  $m$  để các hàm số sau luôn nghịch biến trên mỗi khoảng xác định .

1.  $y = \frac{x - m^2 + 7m - 11}{x - 1}$

3.  $y = \frac{(m - 1)x^2 + 2x + 1}{x + 1}$

2.  $y = \frac{(m - 1)x + m^2 + 2m - 3}{x + 3m}$

4.  $y = \frac{x^2 - 2(m + 2)x + m - 1}{x - 3}$

**Ví dụ 2 :** Tìm  $m$  để các hàm số sau luôn nghịch biến trên  $\mathbb{R}$  .

1.  $y = -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + (2m + 1)x - 3m + 2$

2.  $y = (m + 2)\frac{x^3}{3} - (m + 2)x^2 + (m - 8)x + m^2 - 1$

Giải:

1.  $y = -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + (2m + 1)x - 3m + 2$

\* Hàm số đã cho xác định trên  $\mathbb{R}$  .

\* Ta có :  $y' = -x^2 + 4x + 2m + 1$  và có  $\Delta' = 2m + 5$

\* Bảng xét dấu  $\Delta'$

$m$	$-\infty$	$-\frac{5}{2}$	$+\infty$
$\Delta'$	$-$	$0$	$+$

+  $m = -\frac{5}{2}$  thì  $y' = -(x - 2)^2 \leq 0$  với mọi  $x \in \mathbb{R}$  và  $y' = 0$  chỉ tại điểm  $x = 2$

Do đó hàm số nghịch biến trên  $\mathbb{R}$  .

+  $m < -\frac{5}{2}$  thì  $y' < 0, \forall x \in \mathbb{R}$  . Do đó hàm số nghịch biến trên  $\mathbb{R}$  .

**Nguyễn Phú Khánh – Đà Lạt .**

+  $m > -\frac{5}{2}$  thì  $y' = 0$  có hai nghiệm  $x_1, x_2$  ( $x_1 < x_2$ ). Hàm số đồng biến trên khoảng  $(x_1; x_2)$ . Trường hợp này không thỏa mãn .

$$2. y = (m + 2) \frac{x^3}{3} - (m + 2)x^2 + (m - 8)x + m^2 - 1$$

\* Hàm số đã cho xác định trên  $\mathbb{R}$  .

\* Ta có  $y' = (m + 2)x^2 - 2(m + 2)x + m - 8$  .

+  $m = -2$ , khi đó  $y' = -10 \leq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$  hàm số luôn nghịch biến trên  $\mathbb{R}$  .

+  $m \neq -2$  tam thức  $y' = (m + 2)x^2 - 2(m + 2)x + m - 8$  có  $\Delta' = 10(m + 2)$

\* Bảng xét dấu  $\Delta'$

$m$	$-\infty$	$-2$	$+\infty$
$\Delta'$	$-$	$0$	$+$

+  $m < -2$  thì  $y' < 0$  với mọi  $x \in \mathbb{R}$  . Do đó hàm số nghịch biến trên  $\mathbb{R}$  .

+  $m > -2$  thì  $y' = 0$  có hai nghiệm  $x_1, x_2$  ( $x_1 < x_2$ ). Hàm số đồng biến trên khoảng  $(x_1; x_2)$ . Trường hợp này không thỏa mãn .

Vậy  $m \leq -2$  là những giá trị cần tìm.

**Bài tập tương tự :**

Tìm  $m$  để các hàm số sau luôn nghịch biến trên mỗi khoảng xác định .

$$1. y = x + 2 + \frac{m}{x - 1}$$

$$3. y = \frac{1}{3}x^3 - m^2x + 1$$

$$2. y = (m - 1)x - 3 - \frac{m + 4}{x + 2}$$

$$4. y = \frac{1}{4}mx^4 - m^2x^2 + m - 1$$

**Ví dụ 3 :** Tìm  $a$  để các hàm số sau luôn đồng biến trên  $\mathbb{R}$  .

$$1. y = \frac{1}{3}x^3 + ax^2 + 4x + 3$$

$$2. y = \frac{1}{3}(a^2 - 1)x^3 + (a + 1)x^2 + 3x + 5$$

Giải :

$$1. y = \frac{1}{3}x^3 + ax^2 + 4x + 3$$

\* Hàm số đã cho xác định trên  $\mathbb{R}$  .

\* Ta có  $y' = x^2 + 2ax + 4$  và có  $\Delta' = a^2 - 4$

\* Bảng xét dấu  $\Delta'$

**Nguyễn Phú Khánh – Đà Lạt .**

$a$	$-\infty$	$-2$	$2$	$+\infty$
$\Delta'$	$+$	$0$	$-$	$0$
	$+$	$0$	$-$	$+$

- + Nếu  $-2 < a < 2$  thì  $y' > 0$  với mọi  $x \in \mathbb{R}$ . Hàm số  $y$  đồng biến trên  $\mathbb{R}$ .
  - + Nếu  $a = 2$  thì  $y' = (x + 2)^2$ , ta có:  $y' = 0 \Leftrightarrow x = -2, y' > 0, x \neq -2$ . Hàm số  $y$  đồng biến trên mỗi nửa khoảng  $(-\infty; -2]$  và  $[-2; +\infty)$  nên hàm số  $y$  đồng biến trên  $\mathbb{R}$ .
  - + Tương tự nếu  $a = -2$ . Hàm số  $y$  đồng biến trên  $\mathbb{R}$ .
  - + Nếu  $a < -2$  hoặc  $a > 2$  thì  $y' = 0$  có hai nghiệm phân biệt  $x_1, x_2$ . Giả sử  $x_1 < x_2$ . Khi đó hàm số nghịch biến trên khoảng  $(x_1; x_2)$ , đồng biến trên mỗi khoảng  $(-\infty; x_1)$  và  $(x_2; +\infty)$ . Do đó  $a < -2$  hoặc  $a > 2$  không thoả mãn yêu cầu bài toán.
- Vậy hàm số  $y$  đồng biến trên  $\mathbb{R}$  khi và chỉ khi  $-2 \leq a \leq 2$ .

2.  $y = \frac{1}{3}(a^2 - 1)x^3 + (a + 1)x^2 + 3x + 5$

\* Hàm số đã cho xác định trên  $\mathbb{R}$ .

\* Ta có:  $y' = (a^2 - 1)x^2 + 2(a + 1)x + 3$  và có  $\Delta' = 2(-a^2 + a + 2)$

Hàm số  $y$  đồng biến trên  $\mathbb{R}$  khi và chỉ khi  $\Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$  (1)

+ Xét  $a^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow a = \pm 1$

•  $a = 1 \Rightarrow y' = 4x + 3 \Rightarrow y' \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -\frac{3}{4} \Rightarrow a = 1$  không thoả yêu cầu bài toán.

•  $a = -1 \Rightarrow y' = 3 > 0 \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow a = -1$  thoả mãn yêu cầu bài toán.

+ Xét  $a^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow a \neq \pm 1$

\* Bảng xét dấu  $\Delta'$

$a$	$-\infty$	$-1$	$1$	$2$	$+\infty$
$\Delta'$	$-$	$0$	$+$	$0$	$-$

+ Nếu  $a < -1 \vee a > 2$  thì  $y' > 0$  với mọi  $x \in \mathbb{R}$ . Hàm số  $y$  đồng biến trên  $\mathbb{R}$ .

+ Nếu  $a = 2$  thì  $y' = 3(x + 1)^2$ , ta có:  $y' = 0 \Leftrightarrow x = -1, y' > 0, x \neq -1$ . Hàm số  $y$  đồng biến trên mỗi nửa khoảng  $(-\infty; -1]$  và  $[-1; +\infty)$  nên hàm số  $y$  đồng biến trên  $\mathbb{R}$ .

**Nguyễn Phú Khánh – Đà Lạt .**

+ Nếu  $-1 < a < 2, a \neq 1$  thì  $y' = 0$  có hai nghiệm phân biệt  $x_1, x_2$ . Giả sử  $x_1 < x_2$ . Khi đó hàm số nghịch biến trên khoảng  $(x_1; x_2)$ , đồng biến trên mỗi khoảng  $(-\infty; x_1)$  và  $(x_2; +\infty)$ . Do đó  $-1 < a < 2, a \neq 1$  không thoả mãn yêu cầu bài toán.

Do đó hàm số  $y$  đồng biến trên  $\mathbb{R}$  khi và chỉ khi  $a < -1 \vee a \geq 2$ .

Vậy với  $1 \leq a \leq 2$  thì hàm số  $y$  đồng biến trên  $\mathbb{R}$ .

**Bài tập tương tự :**

Tìm  $m$  để các hàm số sau luôn đồng biến trên mỗi khoảng xác định .

1.  $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{m}{2}x^2 + (m^2 - 3)x - 1$

2.  $y = \frac{x^3}{3} - mx^2 + (m + 2)x + 3$

3.  $y = (m + 2)\frac{x^3}{3} - (m - 1)x^2 + 4x - 1$

4.  $y = (m - 2)\frac{x^3}{3} - (2m - 3)x^2 + (5m - 6)x + 2$

**Chú ý :**

**Phương pháp:**

\* Hàm số  $y = f(x, m)$  tăng trên  $\mathbb{R} \Leftrightarrow y' \geq 0 \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \min_{x \in \mathbb{R}} y' \geq 0$ .

\* Hàm số  $y = f(x, m)$  giảm trên  $\mathbb{R} \Leftrightarrow y' \leq 0 \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \max_{x \in \mathbb{R}} y' \leq 0$ .

**Chú ý:**

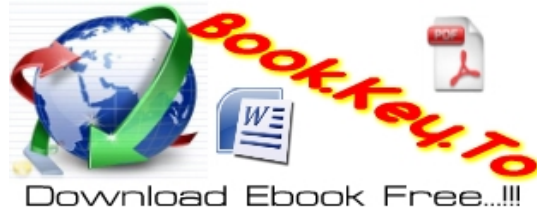
1) Nếu  $y' = ax^2 + bx + c$  thì

$$* y' \geq 0 \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b = 0 \\ c \geq 0 \\ a > 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}$$

$$* y' \leq 0 \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b = 0 \\ c \leq 0 \\ a < 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}$$

**Nguyễn Phú Khánh – Đà Lạt .**

2) Hàm đồng biến trên  $\mathbb{R}$  thì nó phải xác định trên  $\mathbb{R}$  .



**Dạng 4 : Hàm số đơn điệu trên tập con của  $\mathbb{R}$  .**

**Phương pháp:**

\* Hàm số  $y = f(x, m)$  tăng  $\forall x \in I \Leftrightarrow y' \geq 0 \forall x \in I \Leftrightarrow \min_{x \in I} y' \geq 0$ .

\* Hàm số  $y = f(x, m)$  giảm  $\forall x \in I \Leftrightarrow y' \leq 0 \forall x \in I \Leftrightarrow \max_{x \in I} y' \leq 0$ .

**Ví dụ 1 : Tìm  $m$  để các hàm số sau**

1.  $y = \frac{mx + 4}{x + m}$  luôn nghịch biến khoảng  $(-\infty; 1)$ .

2.  $y = x^3 + 3x^2 + (m + 1)x + 4m$  nghịch biến trên khoảng  $(-1; 1)$ .

Giải :

1.  $y = \frac{mx + 4}{x + m}$  luôn nghịch biến khoảng  $(-\infty; 1)$ .

\* Hàm số đã cho xác định trên khoảng  $(-\infty; 1)$ .

\* Ta có  $y' = \frac{m^2 - 4}{(x + m)^2}, x \neq -m$

Hàm số nghịch biến trên khoảng  $(-\infty; 1)$  khi và chỉ khi  $\begin{cases} y' < 0, \forall x \in (-\infty; 1) \\ -m \notin (-\infty; 1) \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 4 < 0 \\ -m \notin (-\infty; 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < m < 2 \\ -m \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < m < 2 \\ m \leq -1 \end{cases} \Leftrightarrow -2 < m \leq -1$$

Vậy : với  $-2 < m \leq -1$  thì thỏa yêu cầu bài toán .

2.  $y = x^3 + 3x^2 + (m + 1)x + 4m$  nghịch biến trên khoảng  $(-1; 1)$ .

\* Hàm số đã cho xác định trên khoảng  $(-1; 1)$  .

\* Ta có :  $y' = 3x^2 + 6x + m + 1$

**Cách 1 :**

Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng  $(-1; 1)$  khi và chỉ khi

$$y' \leq 0, \forall x \in (-1; 1) \text{ hay.}$$

$$\text{Xét hàm số } g(x) = -(3x^2 + 6x + 1), \forall x \in (-1; 1)$$

$$\Rightarrow g'(x) = -6x - 6 < 0, \forall x \in (-1; 1) \Rightarrow g(x) \text{ nghịch biến trên khoảng } (-1; 1)$$

$$\text{và } \lim_{x \rightarrow -1^+} g(x) = -2, \lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = -10$$

\* Bảng biến thiên.

$x$		-1		1	
$g'(x)$			-		
$g(x)$		-2			
					-10

Vậy  $m \leq -10$  thoả yêu cầu bài toán .

**Cách 2 :**

$$f''(x) = 6x + 6$$

Nghiệm của phương trình  $f''(x) = 0$  là  $x = -1 < 1$ . Do đó, hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng  $(-1; 1)$  khi và chỉ khi  $m \leq \lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = -10$ .

Vậy  $m \leq -10$  thoả yêu cầu bài toán .

**Bài tập tự luyện:**

Tìm  $m$  để các hàm số sau:

1.  $y = \frac{mx - 1}{x - m}$  luôn nghịch biến khoảng  $(2; +\infty)$ .
2.  $y = \frac{x - 2m}{(2m + 3)x - m}$  luôn nghịch biến khoảng  $(1; 2)$ .
3.  $y = \frac{x^2 - 2m}{x - m}$  luôn nghịch biến khoảng  $(-\infty; 0)$ .
4.  $y = \frac{(m - 1)x^2 + m}{x + 3m}$  luôn nghịch biến khoảng  $(0; 1)$ .

**Ví dụ 2 :** Tìm  $m$  để các hàm số sau

1.  $y = 2x^3 - 2x^2 + mx - 1$  đồng biến trên khoảng  $(1; +\infty)$ .
2.  $y = mx^3 - x^2 + 3x + m - 2$  đồng biến trên khoảng  $(-3; 0)$ .
3.  $y = \frac{1}{3}mx^3 + 2(m - 1)x^2 + (m - 1)x + m$  đồng biến trên khoảng  $(2; +\infty)$ .

Giải :

1.  $y = 2x^3 - 2x^2 + mx - 1$  đồng biến trên khoảng  $(1; +\infty)$ .
  - \* Hàm số đã cho xác định trên khoảng  $(1; +\infty)$  .
  - \* Ta có :  $y' = 6x^2 - 4x + m$

**Nguyễn Phú Khánh – Đà Lạt .**

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng  $(1; +\infty)$  khi và chỉ khi

$$y' \geq 0, \forall x \in (1; +\infty) \Leftrightarrow g(x) = 6x^2 - 4x \geq -m, x > 1$$

Xét hàm số  $g(x) = 6x^2 - 4x$  liên tục trên khoảng  $(1; +\infty)$ , ta có

$$g'(x) = 12x - 4 > 0, \forall x > 1 \Leftrightarrow g(x) \text{ đồng biến trên khoảng } (1; +\infty)$$

$$\text{và } \lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (6x^2 - 4x) = 2, \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$$

\* Bảng biến thiên.

$x$		-1		$+\infty$
$g'(x)$			+	
$g(x)$				$+\infty$
				-2

Dựa vào bảng biến thiên suy ra  $2 \geq -m \Leftrightarrow m \geq -2$

2.  $y = mx^3 - x^2 + 3x + m - 2$  đồng biến trên khoảng  $(-3; 0)$ .

\* Hàm số đã cho xác định trên khoảng  $(-3; 0)$ .

\* Ta có :  $y' = 3mx^2 - 2x + 3$

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng  $(-3; 0)$  khi và chỉ khi  $y' \geq 0$ ,

$$\forall x \in (-3; 0).$$

$$\text{Hay } 3mx^2 - 2x + 3 \geq 0, \forall x \in (-3; 0) \Leftrightarrow m \geq \frac{2x - 3}{3x^2}, \forall x \in (-3; 0)$$

Xét hàm số  $g(x) = \frac{2x - 3}{3x^2}$  liên tục trên khoảng  $(-3; 0)$ , ta có

$$g'(x) = \frac{-6x^2 + 18x}{9x^4} < 0, \forall x \in (-3; 0) \Rightarrow g(x) \text{ nghịch biến trên khoảng } (-3; 0)$$

$$\text{và } \lim_{x \rightarrow -3^+} g(x) = -\frac{4}{27}, \lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = -\infty$$

\* Bảng biến thiên.

$x$		-3		0
$g'(x)$			-	
$g(x)$				$-\infty$
				$-\frac{4}{27}$

**Nguyễn Phú Khánh – Đà Lạt .**

Dựa vào bảng biến thiên suy ra  $m \geq -\frac{4}{27}$

3.  $y = \frac{1}{3}mx^3 + 2(m-1)x^2 + (m-1)x + m$  đồng biến trên khoảng  $(2; +\infty)$ .

\* Hàm số đã cho xác định trên khoảng  $(2; +\infty)$  .

\* Ta có :  $y' = mx^2 + 4(m-1)x + m - 1$

Hàm số đồng biến trên khoảng  $(2; +\infty)$  khi và chỉ khi

$$y' \geq 0, \forall x \in (2; +\infty) \Leftrightarrow mx^2 + 4(m-1)x + m - 1 \geq 0, \forall x \in (2; +\infty)$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + 4x + 1)m \geq 4x + 1, \forall x \in (2; +\infty) \Leftrightarrow m \geq \frac{4x + 1}{x^2 + 4x + 1}, \forall x \in (2; +\infty)$$

Xét hàm số  $g(x) = \frac{4x + 1}{x^2 + 4x + 1}, x \in (2; +\infty)$

$$\Rightarrow g'(x) = \frac{-2x(2x + 1)}{(x^2 + 4x + 1)^2} < 0, \forall x \in (2; +\infty) \Rightarrow g(x) \text{ nghịch biến trên khoảng}$$

$$(2; +\infty) \text{ và } \lim_{x \rightarrow 2^+} g(x) = \frac{9}{13}, \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$$

Bảng biến thiên.

$x$		2		$+\infty$
$g'(x)$			-	
$g(x)$		$\frac{9}{13}$		0

Vậy  $m \geq \frac{9}{13}$  thỏa yêu cầu bài toán .

**Bài tập tự luyện:**

Tìm  $m$  để các hàm số sau:

1.  $y = \frac{mx^2 + (m+1)x - 1}{2x - m}$  đồng biến trên khoảng  $(1; +\infty)$ .

2.  $y = x^3 - mx^2 - (2m^2 - 7m + 7)x + 2(m-1)(2m-3)$  đồng biến trên khoảng  $(2; +\infty)$ .

3.  $y = \frac{1}{3}mx^3 - (m-1)x^2 + 3(m-2)x + 1$  đồng biến trên khoảng  $(2; +\infty)$ .

**Ví dụ 3 :** Tìm  $m$  để các hàm số sau :

1.  $y = \frac{mx^2 + 6x - 2}{x + 2}$  nghịch biến trên nửa khoảng  $[2; +\infty)$ .

2.  $y = x^3 - (m+1)x^2 - (2m^2 - 3m + 2)x + m(2m - 1)$  đồng biến trên nửa khoảng  $[1; +\infty)$ .

Giải :

1.  $y = \frac{mx^2 + 6x - 2}{x + 2}$  nghịch biến trên nửa khoảng  $[2; +\infty)$ .

\* Hàm số đã cho xác định trên nửa khoảng  $[2; +\infty)$

\* Ta có  $y' = 3x^2 - 2(m+1)x - (2m^2 - 3m + 2)$

Hàm đồng biến trên nửa khoảng  $[2; +\infty)$ .  $\Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in [2; +\infty)$

$\Leftrightarrow f(x) = 3x^2 - 2(m+1)x - (2m^2 - 3m + 2) \geq 0, \forall x \in [2; +\infty)$

Vì tam thức  $f(x)$  có  $\Delta' = 7m^2 - 7m + 7 > 0 \forall m \in \mathbb{R}$  nên  $f(x)$  có hai nghiệm

$$x_1 = \frac{m+1 - \sqrt{\Delta'}}{3}; x_2 = \frac{m+1 + \sqrt{\Delta'}}{3}.$$

Vì  $x_1 < x_2$  nên  $f(x) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq x_1 \\ x \geq x_2 \end{cases}$ .

Do đó  $f(x) \geq 0 \forall x \in [2; +\infty) \Leftrightarrow x_2 \leq 2 \Leftrightarrow \sqrt{\Delta'} \leq 5 - m$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 5 \\ \Delta' \leq (5-m)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 5 \\ 2m^2 + m - 6 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -2 \leq m \leq \frac{3}{2}.$$

2.  $y = x^3 - (m+1)x^2 - (2m^2 - 3m + 2)x + m(2m - 1)$  đồng biến trên nửa khoảng  $[1; +\infty)$ .

\* Hàm số đã cho xác định trên nửa khoảng  $[1; +\infty)$

\* Ta có  $y' = \frac{mx^2 + 4mx + 14}{(x+2)^2}$

Hàm nghịch biến trên nửa khoảng  $[1; +\infty) \Leftrightarrow f(x) = mx^2 + 4mx + 14 \leq 0, \forall x \in [1; +\infty) (*)$ .

**Nguyễn Phú Khánh – Đà Lạt .**

**Cách 1:** Dùng tam thức bậc hai

- Nếu  $m = 0$  khi đó (\*) không thỏa mãn.
- Nếu  $m \neq 0$  . Khi đó  $f(x)$  có  $\Delta = 4m^2 - 14m$

Bảng xét dấu  $\Delta$

$m$	$-\infty$	$0$	$\frac{7}{2}$	$+\infty$
$\Delta'$	$+$	$0$	$-$	$+$

- Nếu  $0 < m < \frac{7}{2}$  thì  $f(x) > 0 \forall x \in \mathbb{R}$  , nếu  $f(x)$  có hai nghiệm  $x_1, x_2$  thì

$f(x) \leq 0 \Leftrightarrow x \in (x_1; x_2)$  nên (\*) không thỏa mãn.

- Nếu  $m < 0$  hoặc  $m > \frac{7}{2}$  . Khi đó  $f(x) = 0$  có hai nghiệm

$$x_1 = \frac{-2m + \sqrt{4m^2 - 14m}}{m}; x_2 = \frac{-2m - \sqrt{4m^2 - 14m}}{m}$$

$$\text{Vì } m < 0 \text{ hoặc } m > \frac{7}{2} \Rightarrow x_1 < x_2 \Rightarrow f(x) \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq x_1 \\ x \geq x_2 \end{cases}$$

$$\text{Do đó } f(x) \leq 0 \forall x \in [1; +\infty) \Leftrightarrow x_2 \leq 1 \Leftrightarrow -3m \geq \sqrt{4m^2 - 14m}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ 5m^2 + 14m \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \leq -\frac{14}{5}.$$

**Cách 2:** (\*)  $\Leftrightarrow m \leq \frac{-14}{x^2 + 4x} = g(x) \quad \forall x \in [1; +\infty) \Leftrightarrow m \leq \min_{x \geq 1} g(x)$

Ta có  $\min_{x \geq 1} g(x) = g(1) = -\frac{14}{5} \Rightarrow m \leq -\frac{14}{5}$ .

**Bài tập tự luyện :**

Tìm  $m$  để các hàm số sau :

1.  $y = \frac{x^2 + (m-2)x - 2}{x+m}$  đồng biến trên nửa khoảng  $(-\infty; 1]$ .

2.  $y = \frac{1}{3}x^3 + (m-1)x^2 - (m-1)x + 1$  nghịch biến trên nửa khoảng  $(-\infty; -2]$ .

**Ví dụ 4 :** Tìm tất cả các tham số  $m$  để hàm số  $y = x^3 + 3x^2 + mx + m$  nghịch biến trên đoạn có độ dài bằng 1?.

Giải :

\* Hàm số đã cho xác định trên  $\mathbb{R}$  .

**Nguyễn Phú Khánh – Đà Lạt .**

\* Ta có :  $y' = 3x^2 + 6x + m$  có  $\Delta' = 9 - 3m$

• Nếu  $m \geq 3$  thì  $y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ , khi đó hàm số luôn đồng biến trên  $\mathbb{R}$ , do đó  $m \geq 3$  không thoả yêu cầu bài toán .

• Nếu  $m < 3$ , khi đó  $y' = 0$  có hai nghiệm phân biệt  $x_1, x_2$  ( $x_1 < x_2$ ) và hàm số nghịch biến trong đoạn  $[x_1; x_2]$  với độ dài  $l = |x_2 - x_1|$

Theo Vi-ét, ta có :  $x_1 + x_2 = -2, x_1 x_2 = \frac{m}{3}$

Hàm số nghịch biến trên đoạn có độ dài bằng 1  $\Leftrightarrow l = 1$

$$\Leftrightarrow (x_2 - x_1)^2 = 1 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2 = 1 \Leftrightarrow 4 - \frac{4}{3}m = 1 \Leftrightarrow m = \frac{9}{4}.$$

**Bài tập tương tự :**

1. Tìm tất cả các tham số  $m$  để hàm số  $y = x^3 - 3m^2 x^2 + x + m - 1$  nghịch biến trên đoạn có độ dài bằng 1 ?.

2. Tìm tất cả các tham số  $m$  để hàm số  $y = -x^3 + m^2 x^2 + mx + 3m + 5$  đồng biến trên đoạn có độ dài bằng 3 ?.

**Ví dụ 5:** Tìm  $m$  để hàm số  $y = x + m \cos x$  đồng biến trên  $\mathbb{R}$ .

Giải:

\* Hàm số đã cho xác định trên  $\mathbb{R}$ .

\* Ta có  $y' = 1 - m \sin x$ .

**Cách 1:** Hàm đồng biến trên  $\mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow 1 - m \sin x \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow m \sin x \leq 1, \forall x \in \mathbb{R} \quad (1)$$

\*  $m = 0$  thì (1) luôn đúng

$$* m > 0 \text{ thì } (1) \Leftrightarrow \sin x \leq \frac{1}{m} \quad \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow 1 \leq \frac{1}{m} \Leftrightarrow 0 < m \leq 1.$$

$$* m < 0 \text{ thì } (1) \Leftrightarrow \sin x \geq \frac{1}{m} \quad \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow -1 \geq \frac{1}{m} \Leftrightarrow -1 \leq m < 0.$$

Vậy  $-1 \leq m \leq 1$  là những giá trị cần tìm.

**Cách 2:** Hàm đồng biến trên  $\mathbb{R} \Leftrightarrow y' \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \min y' = \min\{1 - m; 1 + m\} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - m \geq 0 \\ 1 + m \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \leq m \leq 1.$$

**Bài tập tự luyện:**

1. Tìm  $m$  để hàm số  $y = x(m - 1) + m \cos x$  nghịch biến trên  $\mathbb{R}$ .

2. Tìm  $m$  để hàm số  $y = x \cdot \sin x + m \cos x$  đồng biến trên  $\mathbb{R}$ .



**Dạng 5 : Sử dụng tính đơn điệu của hàm số CM bất đẳng thức.**

- Đưa bất đẳng thức về dạng  $f(x) \geq M, x \in (a; b)$ .
- Xét hàm số  $y = f(x), x \in (a; b)$ .
- Lập bảng biến thiên của hàm số trên khoảng  $(a; b)$ .
- Dựa vào bảng biến thiên và kết luận.

**Ví dụ 1 :** Với  $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ . Chứng minh rằng :

1.  $\sin x + \tan x > 2x$
2.  $\frac{2}{\pi} < \frac{\sin x}{x} < 1$

Giải :

1.  $\sin x + \tan x > 2x$

\* Xét hàm số  $f(x) = \sin x + \tan x - 2x$  liên tục trên nửa khoảng  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$ .

\* Ta có :  $f'(x) = \cos x + \frac{1}{\cos^2 x} - 2 > \cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x} - 2 > 0, \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$

$\Rightarrow f(x)$  là hàm số đồng biến trên  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$  và  $f(x) > f(0), \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$

hay  $\sin x + \tan x > 2x, \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$  (đpcm).

⊕ Từ bài toán trên ta có bài toán sau : Chứng minh rằng tam giác  $ABC$  có ba góc nhọn thì  $\sin A + \sin B + \sin C + \tan A + \tan B + \tan C > 2\pi$

2.  $\frac{2}{\pi} < \frac{\sin x}{x} < 1$

\* Với  $x > 0$  thì  $\frac{\sin x}{x} < 1$  (xem ví dụ 2)

\* Xét hàm số  $f(x) = \frac{\sin x}{x}$  liên tục trên nửa khoảng  $\left(0; \frac{\pi}{2}\right]$ .

\* Ta có  $f'(x) = \frac{x \cdot \cos x - \sin x}{x^2}, \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ .

\* Xét hàm số  $g(x) = x \cdot \cos x - \sin x$  liên tục trên đoạn  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$  và có

$g'(x) = -x \cdot \sin x < 0, \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow g(x)$  liên tục và nghịch biến trên đoạn  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$  và ta có  $g(x) < g(0) = 0, \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$

\* Từ đó suy ra  $f'(x) = \frac{g'(x)}{x^2} < 0, \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow f(x)$  liên tục và nghịch biến trên nửa khoảng  $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ , ta có  $f(x) > f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2}{\pi}, \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ .

**Bài tập tương tự :**

Chứng minh rằng với mọi  $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$  ta luôn có:

- |                                 |  |
|---------------------------------|--|
| 1. $\tan x > x$                 | 3. $2 \sin x + \tan x > 3x$                  |
| 2. $\tan x > x + \frac{x^3}{3}$ | 4. $\frac{3}{\frac{2}{\sin x} + \cot x} < x$ |

**Ví dụ 2 :** Chứng minh rằng :

- |   |   |
|---|---|
| 1. $\sin x \leq x, \forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$               | 3. $\cos x < 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}, \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ |
| 2. $\sin x > x - \frac{x^3}{3!}, \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ | 4. $\left(\frac{\sin x}{x}\right)^3 > \cos x, \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ .  |

Giải :

1.  $\sin x \leq x, \forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

\* Xét hàm số  $f(x) = \sin x - x$  liên tục trên đoạn  $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

\* Ta có:  $f'(x) = \cos x - 1 \leq 0, \forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow f(x)$  là hàm nghịch biến trên đoạn  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ .

Suy ra  $f(x) \leq f(0) = 0 \Leftrightarrow \sin x \leq x \forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$  (đpcm).

$$2. \sin x > x - \frac{x^3}{3!}, \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$$

\* Xét hàm số  $f(x) = \sin x - x + \frac{x^3}{6}$  liên tục trên nửa khoảng  $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right)$ .

\* Ta có:  $f'(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2} \Rightarrow f''(x) = -\sin x + x \geq 0 \forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right)$  (theo

câu 1)

$$\Rightarrow f'(x) \geq f'(0) = 0 \forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow f(x) \geq f(0) = 0 \forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \sin x > x - \frac{x^3}{3!}, \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \text{ (đpcm).}$$

$$3. \cos x < 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}, \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$$

\* Xét hàm số  $g(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24}$  liên tục trên nửa khoảng  $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right)$ .

\* Ta có:  $g'(x) = -\sin x + x - \frac{x^3}{6} \leq 0 \forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right)$  (theo câu

$$2) \Rightarrow g(x) \leq g(0) = 0 \forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \cos x < 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}, \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \text{ (Đpcm).}$$

$$4. \left(\frac{\sin x}{x}\right)^3 > \cos x, \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right).$$

Theo kết quả câu 2, ta có:  $\sin x > x - \frac{x^3}{6}, \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$

$$\Rightarrow \frac{\sin x}{x} > 1 - \frac{x^2}{6} \Rightarrow \left(\frac{\sin x}{x}\right)^3 > \left(1 - \frac{x^2}{6}\right)^3 = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{12} - \frac{x^6}{216}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\sin x}{x}\right)^3 > 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^4}{24} \left(1 - \frac{x^2}{9}\right)$$

$$\forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow 1 - \frac{x^2}{9} > 0 \Rightarrow \left(\frac{\sin x}{x}\right)^3 > 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$$

$$\text{Mặt khác, theo câu 3: } 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} > \cos x, \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\text{Suy ra } \left(\frac{\sin x}{x}\right)^3 > \cos x, \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \text{ (đpcm).}$$

**Nhận xét:** Ta có  $0 < \sin x < x \Rightarrow 0 < \frac{\sin x}{x} < 1 \quad \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$  nên

$$\left(\frac{\sin x}{x}\right)^\alpha \geq \left(\frac{\sin x}{x}\right)^3 \quad \forall \alpha \leq 3. \text{ Do đó, ta có kết quả sau}$$

Chứng minh rằng: với  $\forall \alpha \leq 3$ , ta luôn có:  $\left(\frac{\sin x}{x}\right)^\alpha \geq \cos x \quad \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ .

**Bài tập tương tự:**

Chứng minh rằng:

$$1. \quad 1 - \frac{x^2}{2} < \cos x < 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}, \quad \forall x \neq 0 \quad 2. \quad x \sin \frac{1}{x} > 1 - \frac{1}{6x^2}, \quad \forall x > 0$$

**Ví dụ 3:** Chứng minh rằng  $\frac{1}{\sin^2 x} < \frac{1}{x^2} + 1 - \frac{4}{\pi^2}, \quad \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$

Giải:

\* Xét hàm số  $f(x) = \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}$  liên tục trên nửa khoảng  $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right]$ .

\* Ta có:  $f'(x) = -\frac{2 \cos x}{\sin^3 x} + \frac{2}{x^3} = \frac{2(-x^3 \cos x + \sin^3 x)}{x^3 \sin^3 x}$ .

Theo kết quả câu 4 - ví dụ 2, ta có:  $\left(\frac{\sin x}{x}\right)^3 > \cos x, \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$

$$\Rightarrow -x^3 \cos x + \sin^3 x > 0, \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow f'(x) > 0, \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\Rightarrow f(x) \leq f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 - \frac{4}{\pi^2}, \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right]$$

Do vậy:  $\frac{1}{\sin^2 x} < \frac{1}{x^2} + 1 - \frac{4}{\pi^2}, \quad \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$  (đpcm).

**Bài tập tương tự :**

1. Chứng minh rằng :  $\sin^2 x < \frac{4x}{\pi^2}(\pi - x)$  với mọi  $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ .

2. Chứng minh rằng :  $\sin x > \frac{2}{\pi}x + \frac{x}{12\pi}(\pi - 4x^2)$  với mọi  $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ .

**Ví dụ 4 :** Với  $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$  . Chứng minh rằng  $2^{2 \cdot \sin x} + 2^{\tan x} > 2^{\frac{3}{2}x+1}$

Giải :

\* Ta có:  $2^{2 \cdot \sin x} + 2^{\tan x} \geq 2 \cdot \sqrt{2^{2 \cdot \sin x} \cdot 2^{\tan x}} = 2 \cdot 2^{\frac{\sin x + \tan x}{2}}$

Ta chứng minh:  $2^{\frac{\sin x + \tan x}{2}} \geq 2^{\frac{3x}{2}} \Leftrightarrow \sin x + \frac{1}{2} \tan x \geq \frac{3}{2}x \quad \forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right)$ .

\* Xét hàm số  $f(x) = \sin x + \frac{1}{2} \tan x - \frac{3x}{2}$  liên tục trên nửa khoảng  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$ .

\* Ta có:  $f'(x) = \cos x + \frac{1}{2 \cos^2 x} - \frac{3}{2} = \frac{2 \cos^3 x - 3 \cos^2 x + 1}{2 \cos^2 x}$   
 $= \frac{(\cos x - 1)^2(2 \cos x + 1)}{2 \cos^2 x} \geq 0, \quad \forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right)$ .

$\Rightarrow f(x)$  đồng biến trên

$\left[0; \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow f(x) \geq f(0) = 0 \Rightarrow \sin x + \frac{1}{2} \tan x \geq \frac{3}{2}x, \quad \forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right)$  (đpcm).

**Ví dụ 5 :** Chứng minh bất đẳng thức sau với mọi số tự nhiên  $n > 1$

$$\sqrt[n]{1 + \frac{\sqrt[n]{n}}{n}} + \sqrt[n]{1 - \frac{\sqrt[n]{n}}{n}} < 2$$

Giải :

\* Đặt  $x = \frac{\sqrt[n]{n}}{n} \in (0; 1), \forall n \in N^*$  .

\* Bất đẳng thức cần chứng minh là:  $\sqrt[n]{1+x} + \sqrt[n]{1-x} < 2, \forall x \in (0; 1)$

\* Xét hàm  $f(x) = \sqrt[n]{1+x} + \sqrt[n]{1-x}, x \in [0; 1)$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{n} \left( \frac{1}{\sqrt[n]{(1+x)^{n-1}}} - \frac{1}{\sqrt[n]{(1-x)^{n-1}}} \right) < 0, \forall x \in (0; 1)$$

Vậy  $f(x)$  giảm trên  $(0;1)$  nên  $f(x) < f(0) = 2, \forall x \in (0;1)$ .

**Ví dụ 6:**

1. Cho  $x \geq y \geq z \geq 0$ . Chứng minh rằng:  $\frac{x}{z} + \frac{z}{y} + \frac{y}{x} \geq \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}$

2. Cho  $x, y, z > 0$ . Chứng minh rằng:

$$x^4 + y^4 + z^4 + xyz(x + y + z) \geq xy(x^2 + y^2) + yz(y^2 + z^2) + zx(z^2 + x^2)$$

Giải:

1 Cho  $x \geq y \geq z \geq 0$ . Chứng minh rằng:  $\frac{x}{z} + \frac{z}{y} + \frac{y}{x} \geq \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}$

$$x \geq y \geq z \geq 0$$

\* Xét hàm số:  $f(x) = \frac{x}{z} + \frac{z}{y} + \frac{y}{x} - \left( \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} \right)$ .

\* Ta có:  $f'(x) = \left( \frac{1}{z} - \frac{1}{y} \right) - \left( \frac{y}{x^2} - \frac{z}{x^2} \right) = (y - z) \left( \frac{1}{yz} - \frac{1}{x^2} \right) \geq 0, \forall x \geq 0$

$\Rightarrow f(x)$  là hàm số đồng biến  $\forall x \geq 0 \Rightarrow f(x) \geq f(y) = 0 \Rightarrow đpcm$ .

2. Cho  $x, y, z > 0$  Chứng minh rằng:

$$x^4 + y^4 + z^4 + xyz(x + y + z) \geq xy(x^2 + y^2) + yz(y^2 + z^2) + zx(z^2 + x^2).$$

Không mất tính tổng quát ta giả sử:  $x \geq y \geq z > 0$ .

\* Xét hàm số

$$f(x) = x^4 + y^4 + z^4 + xyz(x + y + z) - xy(x^2 + y^2) - yz(y^2 + z^2) - zx(z^2 + x^2)$$

\* Ta có  $f'(x) = 4x^3 - 3x^2(y + z) + xyz + yz(x + y + z) - (y^3 + z^3)$

$$\Rightarrow f''(x) = 12x^2 - 6x(y + z) + 2yz$$

$\Rightarrow f''(x) > 0$  (do  $x \geq y \geq z$ )  $\Rightarrow f'(x) \geq f'(y) = z^2y - z^3 = z^2(y - z) \geq 0$  nên  $f(x)$  là hàm số đồng

biến.  $\Rightarrow f(x) \geq f(y) = z^4 - 2z^3y + y^2z^2 = z^2(z - y)^2 \geq 0 \Rightarrow đpcm$ .

**Ví dụ 7:**

1. Cho  $a, b, c > 0$ . Chứng minh rằng:  $\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} \geq \frac{3}{2}$ .

2. Cho  $0 < a \leq b \leq c$ . Chứng minh rằng:

$$\frac{2a}{b+c} + \frac{2b}{c+a} + \frac{2c}{a+b} \leq 3 + \frac{(c-a)^2}{a(c+a)}$$

Giải :

1. Cho  $a, b, c > 0$ . Chứng minh rằng:  $\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} \geq \frac{3}{2}$

\* Đặt  $x = \frac{b}{a}, y = \frac{c}{b}, z = \frac{a}{c} \Rightarrow xyz = 1$  và bất đẳng thức đã cho

$$\Leftrightarrow \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+y} + \frac{1}{1+z} \geq \frac{3}{2}.$$

\* Giả sử  $z \leq 1 \Rightarrow xy \geq 1$  nên có:  $\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+y} \geq \frac{2}{1+\sqrt{xy}} = \frac{2\sqrt{z}}{1+\sqrt{z}}$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+y} + \frac{1}{1+z} \geq \frac{2\sqrt{z}}{1+\sqrt{z}} + \frac{1}{1+z} = \frac{2t}{1+t} + \frac{1}{1+t^2} = f(t) \text{ với}$$

$$t = \sqrt{z} \leq 1$$

\* Ta có:  $f'(t) = \frac{2}{(1+t)^2} - \frac{2t}{(1+t^2)^2} \leq \frac{2(1-t)}{(1+t^2)^2} \leq 0$

$$\Rightarrow f(t) \geq f(1) = \frac{3}{2}, \forall t \leq 1 \Rightarrow \text{đpcm.}$$

2. Cho  $0 < a \leq b \leq c$ . Chứng minh rằng:  $\frac{2a}{b+c} + \frac{2b}{c+a} + \frac{2c}{a+b} \leq 3 + \frac{(c-a)^2}{a(c+a)}$

\* Đặt  $\frac{b}{a} = \alpha, \frac{c}{a} = x, 1 \leq \alpha \leq x$ . Khi đó bất đẳng thức cần chứng minh trở

$$\text{thành } \frac{2}{\alpha+x} + \frac{2\alpha}{1+x} + \frac{2x}{1+\alpha} \leq \frac{x^2+x+4}{x+1}$$

$$\Leftrightarrow x^2+x+1 \geq \left(2\frac{x+1}{\alpha+x} + 2\alpha + \frac{2x(x+1)}{1+\alpha}\right)$$

\* Xét hàm số  $f(x) = x^2+x+1 - \left(2\frac{x+1}{\alpha+x} + 2\alpha + \frac{2x(x+1)}{1+\alpha}\right), 1 \leq \alpha \leq x$

\* Ta có:  $f'(x) = 2x+1 - \frac{2(2x+1)}{\alpha+1} - 2\frac{\alpha-1}{(x+\alpha)^2}$

$$f'(x) = (\alpha-1) \left[ \frac{2x+1}{\alpha+1} - \frac{2}{(x+\alpha)^2} \right] \geq 0, \quad 1 \leq \alpha \leq x$$

Như vậy hàm  $f(x)$  là đồng biến do đó  $f(x) \geq f(\alpha) = \alpha^2 - 3\alpha + 3 - \frac{1}{\alpha}$

Nhưng  $f'(\alpha) = 2\alpha - 3 + \frac{1}{\alpha^2} = \alpha + \alpha + \frac{1}{\alpha^2} - 3 \geq 3\sqrt[3]{\alpha \cdot \alpha \cdot \frac{1}{\alpha^2}} - 3 = 0$   
 $\Rightarrow f(x) \geq f(\alpha) \geq f(1) = 0 \Rightarrow \text{đpcm.}$

**Bài tập tự luyện:**

**1.**

Cho hàm số  $f(x) = 2 \sin x + \tan x - 3x$

a) Chứng minh rằng hàm số đồng biến trên nửa khoảng  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$ .

b) Chứng minh rằng  $2 \sin x + \tan x > 3x$  với mọi  $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ .

**2.**

a) Chứng minh rằng  $\tan x > x$  với mọi  $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ .

b) Chứng minh rằng  $\tan x > x + \frac{x^3}{3}$  với mọi  $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ .

**3.**

Cho hàm số  $f(x) = \frac{4}{\pi}x - \tan x$  với mọi  $x \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right]$

a) Xét chiều biến thiên của hàm số trên đoạn  $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ .

b) Từ đó suy ra rằng  $\frac{4}{\pi}x \geq \tan x$  với mọi  $x \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ .

**4.**

Chứng minh rằng các bất đẳng thức sau :

a)  $\sin x < x$  với mọi  $x > 0$

b)  $\sin x > x$  với mọi  $x < 0$

c)  $\cos x > 1 - \frac{x^2}{2}$  với mọi  $x \neq 0$

d)  $\sin x > x - \frac{x^3}{6}$  với mọi  $x > 0$

e)  $\sin x < x - \frac{x^3}{6}$  với mọi  $x < 0$

f)  $\sin x + \tan x > 2x$  với mọi  $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ .

**Dạng 6 : Dùng đơn điệu hàm số để giải và biện luận phương trình và bất phương trình .**

**Chú ý 1 :**

Nếu hàm số  $y = f(x)$  luôn đơn điệu nghiêm cách trên  $D$  ( hoặc luôn đồng biến hoặc luôn nghịch biến trên  $D$  ) thì số nghiệm của phương trình :  $f(x) = k$  sẽ không nhiều hơn một và  $f(x) = f(y)$  khi và chỉ khi  $x = y$  .

**Chú ý 2:**

- Nếu hàm số  $y = f(x)$  luôn đơn điệu nghiêm cách trên  $D$  ( hoặc luôn đồng biến hoặc luôn nghịch biến trên  $D$  ) và hàm số  $y = g(x)$  luôn đơn điệu nghiêm ngặt ( hoặc luôn đồng biến hoặc luôn nghịch biến ) trên  $D$  , thì số nghiệm trên  $D$  của phương trình  $f(x) = g(x)$  không nhiều hơn một.
- Nếu hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm đến cấp  $n$  trên  $D$  và phương trình  $f^{(k)}(x) = 0$  có  $m$  nghiệm, khi đó phương trình  $f^{(k-1)}(x) = 0$  có nhiều nhất là  $m + 1$  nghiệm.

**Ví dụ 1 : Giải các phương trình**

1.  $3x(2 + \sqrt{9x^2 + 3}) + (4x + 2)(\sqrt{1 + x + x^2} + 1) = 0$
2.  $x^3 - 4x^2 - 5x + 6 = \sqrt[3]{7x^2 + 9x - 4}$

**Giải :**

$$1. 3x(2 + \sqrt{9x^2 + 3}) + (4x + 2)(\sqrt{1 + x + x^2} + 1) = 0 \quad (1)$$

$$\text{Phương trình (1)} \Leftrightarrow (-3x)(2 + \sqrt{(-3x)^2 + 3}) = (2x + 1)(2 + \sqrt{(2x + 1)^2 + 3}) \quad (2)$$

Đặt  $u = -3x, v = 2x + 1, u, v > 0$

$$\text{Phương trình (1)} \Leftrightarrow u(2 + \sqrt{u^2 + 3}) = v(2 + \sqrt{v^2 + 3}) \quad (3)$$

\* Xét hàm số  $f(t) = 2t + \sqrt{t^4 + 3t^2}$  liên tục trên khoảng  $(0; +\infty)$

\* Ta có  $f'(t) = 2 + \frac{2t^3 + 3t}{\sqrt{t^4 + 3t^2}} > 0, \forall t > 0 \Rightarrow f(t)$  đồng biến trên khoảng  $(0; +\infty)$ .

Khi đó phương trình (3)  $\Leftrightarrow f(u) = f(v) \Leftrightarrow u = v \Leftrightarrow -3x = 2x + 1 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{5}$

**Nguyễn Phú Khánh – Đà Lạt .**

Vậy  $x = -\frac{1}{5}$  là nghiệm duy nhất của phương trình.

$$2. x^3 - 4x^2 - 5x + 6 = \sqrt[3]{7x^2 + 9x - 4}.$$

Đặt  $y = \sqrt[3]{7x^2 + 9x - 4}$ . Khi đó phương trình cho

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 4x^2 - 5x + 6 = y \\ 7x^2 + 9x - 4 = y^3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 4x^2 - 5x + 6 = y \\ y^3 + y = x^3 + 3x^2 + 4x + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 4x^2 - 5x + 6 = y \\ y^3 + y = (x+1)^3 + x + 1 \end{cases} \quad (I)$$

(\*) có dạng  $f(y) = f(x+1)$  (a)

\* Xét hàm  $f(t) = t^3 + t, t \in \mathbb{R}$

\* Vì  $f'(t) = 3t^2 + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$  nên hàm số đồng biến trên tập số thực  $\mathbb{R}$ .

Khi đó (a)  $\Leftrightarrow y = x + 1$

$$\text{Hệ (I)} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 4x^2 - 5x + 6 = y \\ y = x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 4x^2 - 6x + 5 = 0 \quad (**) \\ y = x + 1 \end{cases}$$

Giải phương trình (\*\*) ta có tập nghiệm :  $S = \left\{ 5, \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}, \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \right\}$ .

**Ví dụ 2 :** Chứng minh rằng phương trình:  $2x^2\sqrt{x-2} = 11$  có nghiệm duy nhất  
Giải :

**Cách 1 :**

Xét hàm số  $y = 2x^2\sqrt{x-2}$  liên tục trên nửa khoảng  $[2; +\infty)$ .

Ta có:  $y' = \frac{x(5x-8)}{\sqrt{x-2}} > 0, \forall x \in (2; +\infty)$   $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x^2\sqrt{x-2}) = +\infty$

Bảng biến thiên :

$x$	2	$+\infty$
$y'$		+
$y$		$+\infty$

0 ↗

**Nguyễn Phú Khánh – Đà Lạt .**

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy đồ thị của hàm số  $y = 2x^2\sqrt{x-2}$  luôn cắt đường thẳng  $y = 11$  tại duy nhất một điểm. Do đó phương trình

$2x^2\sqrt{x-2} = 11$  có nghiệm duy nhất .

**Cách 2:**

Xét hàm số  $y = f(x) = 2x^2\sqrt{x-2} - 11$  liên tục trên nửa khoảng  $[2; +\infty)$ .

Ta có  $f(2) = -11, f(3) = 7$ . Vì  $f(2).f(3) = -77 < 0 \Rightarrow f(x) = 0$  có ít nhất một nghiệm trong khoảng  $(2; 3)$ .

$f'(x) = \frac{x(5x-8)}{\sqrt{x-2}} > 0, \forall x \in (2; +\infty) \Rightarrow f(x)$  liên tục và đồng biến trên khoảng  $(2; 3)$ .

Vậy phương trình cho có nghiệm duy nhất thuộc khoảng  $(2; 3)$ .

**Ví dụ 3 :** Giải bất phương trình sau :  $\sqrt{5x-1} + \sqrt{x+3} \geq 4$

Giải :

Điều kiện :  $x \geq \frac{1}{5}$

\* Xét hàm số  $f(x) = \sqrt{5x-1} + \sqrt{x+3}$  liên tục trên nửa khoảng  $\left[\frac{1}{5}; +\infty\right)$

\* Ta có :  $f'(x) = \frac{5}{2\sqrt{5x-1}} + \frac{1}{2\sqrt{x-1}} > 0, \forall x > \frac{1}{5} \Rightarrow f(x)$

là hàm số đồng biến trên nửa khoảng  $\left[\frac{1}{5}; +\infty\right)$  và  $f(1) = 4$ , khi đó bất phương trình cho  $\Leftrightarrow f(x) \geq f(1) \Leftrightarrow x \geq 1$ .

Vậy bất phương trình cho có nghiệm là  $x \geq 1$ .

**Ví dụ 4 :** Giải bất phương trình sau  $3\sqrt{3-2x} + \frac{5}{\sqrt{2x-1}} - 2x \leq 6$

Giải :

Điều kiện:  $\frac{1}{2} < x \leq \frac{3}{2}$

\* Bất phương trình cho  $\Leftrightarrow 3\sqrt{3-2x} + \frac{5}{\sqrt{2x-1}} \leq 2x + 6 \Leftrightarrow f(x) \leq g(x)$  (\*)

\* Xét hàm số  $f(x) = 3\sqrt{3-2x} + \frac{5}{\sqrt{2x-1}}$  liên tục trên nửa khoảng  $\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right]$

**Nguyễn Phú Khánh – Đà Lạt .**

\* Ta có :  $f'(x) = \frac{-3}{\sqrt{3-2x}} - \frac{5}{(\sqrt{2x-1})^3} < 0, \forall x \in \left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right) \Rightarrow f(x)$  là hàm

ngịch biến trên nửa đoạn  $\left[\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right]$ .

Hàm số  $g(x) = 2x + 6$  là hàm đồng biến trên  $\mathbb{R}$  và  $f(1) = g(1) = 8$

- Nếu  $x > 1 \Rightarrow f(x) < f(1) = 8 = g(1) < g(x) \Rightarrow (*)$  đúng
- Nếu  $x < 1 \Rightarrow f(x) > f(1) = 8 = g(1) > g(x) \Rightarrow (*)$  vô nghiệm.

Vậy nghiệm của bất phương trình đã cho là:  $1 \leq x \leq \frac{3}{2}$ .

**Ví dụ 5 :** Giải bất phương trình sau

$$\sqrt{(x+2)(2x-1)} - 3\sqrt{x+6} \leq 4 - \sqrt{(x+6)(2x-1)} + 3\sqrt{x+2}$$

Giải :

Điều kiện:  $x \geq \frac{1}{2}$ .

Bất phương trình cho  $\Leftrightarrow (\sqrt{x+2} + \sqrt{x+6})(\sqrt{2x-1} - 3) \leq 4 \quad (*)$

- Nếu  $\sqrt{2x-1} - 3 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 5 \Rightarrow (*)$  luôn đúng.
- Nếu  $x > 5$

\* Xét hàm số  $f(x) = (\sqrt{x+2} + \sqrt{x+6})(\sqrt{2x-1} - 3)$  liên tục trên khoảng  $(5; +\infty)$

\* Ta có:

$$f'(x) = \left(\frac{1}{2\sqrt{x+2}} + \frac{1}{2\sqrt{x+6}}\right)(\sqrt{2x-1} - 3) + \frac{\sqrt{x+2} + \sqrt{x+6}}{\sqrt{2x-1}} > 0, \forall x > 5$$

$\Rightarrow f(x)$  đồng biến trên khoảng  $(5; +\infty)$  và  $f(7) = 4$ , do đó

$(*) \Leftrightarrow f(x) \leq f(7) \Leftrightarrow x \leq 7$ .

Vậy nghiệm của bất phương trình đã cho là:  $\frac{1}{2} \leq x \leq 7$ .

**Ví dụ 6 :** Giải bất phương trình sau  $\sqrt{2x^3 + 3x^2 + 6x + 16} < 2\sqrt{3} + \sqrt{4-x}$

Giải :

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} 2x^3 + 3x^2 + 6x + 16 \geq 0 \\ 4 - x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 4..$$

Bất phương trình cho

$$\Leftrightarrow \sqrt{2x^3 + 3x^2 + 6x + 16} - \sqrt{4-x} < 2\sqrt{3} \Leftrightarrow f(x) < 2\sqrt{3} \quad (*)$$

**Nguyễn Phú Khánh – Đà Lạt .**

\* Xét hàm số  $f(x) = \sqrt{2x^3 + 3x^2 + 6x + 16} - \sqrt{4 - x}$  liên tục trên đoạn  $[-2; 4]$ .

\* Ta có:  $f'(x) = \frac{3(x^2 + x + 1)}{\sqrt{2x^3 + 3x^2 + 6x + 16}} + \frac{1}{2\sqrt{4 - x}} > 0, \forall x \in (-2; 4) \Rightarrow f(x)$

đồng biến trên nửa khoảng  $(-2; 4)$  và  $f(1) = 2\sqrt{3}$ , do đó

$(*) \Leftrightarrow f(x) < f(1) \Leftrightarrow x < 1$ .

Vậy nghiệm của bất phương trình đã cho là:  $-2 \leq x < 1$ .

**Ví dụ 7 :** Chứng minh rằng  $x^4 - x + 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$

Giải :

\* Xét hàm số  $f(x) = x^4 - x + 1$  liên tục trên  $\mathbb{R}$ .

\* Ta có  $f'(x) = 4x^3 - 1$  và  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt[3]{4}}$ .

\* Vì  $f'(x)$  đổi dấu từ âm sang dương khi  $x$  qua  $\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$ , do đó

$$\min f(x) = f\left(\frac{1}{\sqrt[3]{4}}\right) = \frac{1}{4\sqrt[3]{4}} - \frac{1}{\sqrt[3]{4}} + 1 > 0$$

Vậy  $f(x) > 0, \forall x$ .

**Ví dụ 8 :** Chứng minh rằng phương trình :  $x^5 + \frac{x}{\sqrt{x^2 - 2}} - 2009 = 0$  có

đúng hai nghiệm dương phân biệt.

Giải :

\* Điều kiện:  $x > \sqrt{2}$  (do  $x > 0$ ).

\* Xét hàm số :  $f(x) = x^5 + \frac{x}{\sqrt{x^2 - 2}} - 2009$  với  $x > \sqrt{2}$ .

\* Ta có  $f'(x) = 5x^4 - \frac{1}{\sqrt{(x^2 - 2)^3}}$

$$\Rightarrow f''(x) = 20x^3 + \frac{3x}{\sqrt{(x^2 - 2)^5}} > 0, \forall x > \sqrt{2}$$

$\Rightarrow f'(x) = 0$  có nhiều nhất một nghiệm  $\Rightarrow f(x) = 0$  có nhiều nhất là hai nghiệm.

**Nguyễn Phú Khánh – Đà Lạt .**

Mà:  $\lim_{x \rightarrow \sqrt{2}^+} f(x) = +\infty, f(\sqrt{3}) < 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \Rightarrow f(x) = 0$  có hai nghiệm  $x_1 \in (\sqrt{2}; \sqrt{3})$  và  $x_2 > \sqrt{3}$ .

**Ví dụ 9 :** Giải hệ phương trình

$$\begin{aligned} 1. \begin{cases} \sqrt{2x+3} + \sqrt{4-y} = 4 & (1) \\ \sqrt{2y+3} + \sqrt{4-x} = 4 & (2) \end{cases} & \quad 3. \begin{cases} x^3 - 3x = y^3 - 3y & (1) \\ x^6 + y^6 = 1 & (2) \end{cases} \\ 2. \begin{cases} x^3 + 2x = y & (1) \\ y^3 + 2y = x & (2) \end{cases} \end{aligned}$$

Giải :

$$1. \begin{cases} \sqrt{2x+3} + \sqrt{4-y} = 4 & (1) \\ \sqrt{2y+3} + \sqrt{4-x} = 4 & (2) \end{cases}$$

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} -\frac{3}{2} \leq x \leq 4 \\ -\frac{3}{2} \leq y \leq 4 \end{cases} .$$

**Cách 1:**

Trừ (1) và (2) ta được:

$$\sqrt{2x+3} - \sqrt{4-x} = \sqrt{2y+3} - \sqrt{4-y} \quad (3)$$

\* Xét hàm số  $f(t) = \sqrt{2t+3} - \sqrt{4-t}$  liên tục trên đoạn  $\left[-\frac{3}{2}; 4\right]$ .

\* Ta có:

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+3}} + \frac{1}{2\sqrt{4-x}} > 0, \quad \forall t \in \left(-\frac{3}{2}; 4\right)$$

$$\Rightarrow (3) \Leftrightarrow f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y.$$

Thay  $x = y$  vào (1), ta được:

$$\sqrt{2x+3} + \sqrt{4-x} = 4 \Leftrightarrow x + 7 + 2\sqrt{(2x+3)(4-x)} = 16$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{-2x^2 + 5x + 12} = 9 - x \Leftrightarrow \begin{cases} 9 - x \geq 0 \\ 9x^2 - 38x + 33 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = \frac{11}{9} \end{cases}$$

**Nguyễn Phú Khánh – Đà Lạt .**

Vậy hệ phương trình có 2 nghiệm phân biệt  $\begin{cases} x = 3 \\ y = 3 \end{cases}, \begin{cases} x = \frac{11}{9} \\ y = \frac{11}{9} \end{cases}$ .

**Cách 2:**

Trừ (1) và (2) ta được:

$$(\sqrt{2x+3} - \sqrt{2y+3}) + (\sqrt{4-y} - \sqrt{4-x}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(2x+3) - (2y+3)}{\sqrt{2x+3} + \sqrt{2y+3}} + \frac{(4-y) - (4-x)}{\sqrt{4-y} + \sqrt{4-x}} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-y) \left( \frac{2}{\sqrt{2x+3} + \sqrt{2y+3}} + \frac{1}{\sqrt{4-y} + \sqrt{4-x}} \right) = 0 (*).$$

$$\text{Vì } \frac{2}{\sqrt{2x+3} + \sqrt{2y+3}} + \frac{1}{\sqrt{4-y} + \sqrt{4-x}} > 0 \text{ nên } (*) \Leftrightarrow x = y$$

Thay  $x = y$  vào (1), ta được:

$$\sqrt{2x+3} + \sqrt{4-x} = 4 \Leftrightarrow x+7 + 2\sqrt{(2x+3)(4-x)} = 16$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{-2x^2 + 5x + 12} = 9-x \Leftrightarrow \begin{cases} 9-x \geq 0 \\ 9x^2 - 38x + 33 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = \frac{11}{9} \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có 2 nghiệm phân biệt  $\begin{cases} x = 3 \\ y = 3 \end{cases}, \begin{cases} x = \frac{11}{9} \\ y = \frac{11}{9} \end{cases}$ .

$$2. \begin{cases} x^3 + 2x = y & (1) \\ y^3 + 2y = x & (2) \end{cases}$$

**Cách 1 :**

\* Xét hàm số  $f(t) = t^3 + 2t \Rightarrow f'(t) = 3t^2 + 2 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$ .

\* Hệ phương trình trở thành  $\begin{cases} f(x) = y & (1) \\ f(y) = x & (2) \end{cases}$ .

+ Nếu  $x > y \Rightarrow f(x) > f(y) \Rightarrow y > x$  (do (1) và (2) dẫn đến mâu thuẫn).

+ Nếu  $x < y \Rightarrow f(x) < f(y) \Rightarrow y < x$  (mâu thuẫn).

Suy ra  $x = y$ , thế vào hệ ta được

$$x^3 + x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ vì } x^2 + 1 > 0.$$

**Nguyễn Phú Khánh – Đà Lạt .**

Vậy hệ có nghiệm duy nhất  $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ .

**Cách 2:**

Trừ (1) và (2) ta được:

$$x^3 - y^3 + 3x - 3y = 0 \Leftrightarrow (x - y)(x^2 + y^2 + xy + 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - y) \left[ \left( x + \frac{y}{2} \right)^2 + \frac{3y^2}{4} + 3 \right] = 0 \Leftrightarrow x = y$$

Thế  $x = y$  vào (1) và (2) ta được:  $x^3 + x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất  $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ .

$$3. \begin{cases} x^3 - 3x = y^3 - 3y & (1) \\ x^6 + y^6 = 1 & (2) \end{cases}$$

Từ (1) và (2) suy ra  $-1 \leq x, y \leq 1$

$$(1) \Leftrightarrow f(x) = f(y) \quad (*)$$

\* Xét hàm số  $f(t) = t^3 - 3t$  liên tục trên đoạn  $[-1; 1]$ , ta có

$$f'(t) = 3(t^2 - 1) \leq 0 \quad \forall t \in [-1; 1] \Rightarrow f(t) \text{ nghịch biến trên đoạn } [-1; 1]$$

\* Do đó:  $(*) \Leftrightarrow x = y$  thay vào (2) ta được nghiệm của hệ là:

$$x = y = \pm \frac{1}{\sqrt[6]{2}}.$$

**Ví dụ 10 :** Giải hệ phương trình

$$1. \begin{cases} x - \frac{1}{x} = y - \frac{1}{y} & (1) \\ 2x^2 - xy - 1 = 0 & (2) \end{cases} \qquad 2. \begin{cases} x - \frac{1}{x} = y - \frac{1}{y} & (1) \\ 2y = x^3 + 1 & (2) \end{cases}$$

Giải :

$$1. \begin{cases} x - \frac{1}{x} = y - \frac{1}{y} & (1) \\ 2x^2 - xy - 1 = 0 & (2) \end{cases}$$

Điều kiện:  $x \neq 0, y \neq 0$ . Ta có:

**Nguyễn Phú Khánh – Đà Lạt .**

$$(1) \Leftrightarrow (x - y) \left( 1 + \frac{1}{xy} \right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ y = -\frac{1}{x} \end{cases}$$

- $y = x$  phương trình (2)  $\Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$ .
- $y = -\frac{1}{x}$  phương trình (2) vô nghiệm.

Vậy hệ phương trình có 2 nghiệm phân biệt  $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}; \begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \end{cases}$ .

**Bình luận:**

Cách giải sau đây sai:  $\begin{cases} x - \frac{1}{x} = y - \frac{1}{y} & (1) \\ 2x^2 - xy - 1 = 0 & (2) \end{cases}$ .

Điều kiện:  $x \neq 0, y \neq 0$ .

\* Xét hàm số

$$f(t) = t - \frac{1}{t}, t \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \Rightarrow f'(t) = 1 + \frac{1}{t^2} > 0, \forall t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Suy ra (1)  $\Leftrightarrow f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y$ !

Sai do hàm số  $f(t)$  đơn điệu trên 2 khoảng rời nhau (cụ thể

$$f(-1) = f(1) = 0).$$

$$2. \begin{cases} x - \frac{1}{x} = y - \frac{1}{y} & (1) \\ 2y = x^3 + 1 & (2) \end{cases}$$

**Cách 1:**

Điều kiện:  $x \neq 0, y \neq 0$ .

$$(1) \Leftrightarrow x - y + \frac{x - y}{xy} = 0 \Leftrightarrow (x - y) \left( 1 + \frac{1}{xy} \right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ y = -\frac{1}{x} \end{cases}$$

- $x = y$  phương trình (2)  $\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \end{cases}$ .

- $y = -\frac{1}{x}$  phương trình (2)  $\Leftrightarrow x^4 + x + 2 = 0$ .

Xét hàm số  $f(x) = x^4 + x + 2 \Rightarrow f'(x) = 4x^3 + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1}{\sqrt[3]{4}}$ .

**Nguyễn Phú Khánh – Đà Lạt .**

$$f\left(\frac{-1}{\sqrt[3]{4}}\right) = 2 - \frac{3}{4\sqrt[3]{4}} > 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} = \lim_{x \rightarrow +\infty} = +\infty$$

$\Rightarrow f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow x^4 + x + 2 = 0$  vô nghiệm.

**Cách 2:**

Điều kiện:  $x \neq 0, y \neq 0$ .

$$(1) \Leftrightarrow x - y + \frac{x - y}{xy} = 0 \Leftrightarrow (x - y)\left(1 + \frac{1}{xy}\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ y = -\frac{1}{x} \end{cases}$$

$$\bullet x = y \text{ phương trình (2)} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

$$\bullet y = -\frac{1}{x} \text{ phương trình (2)} \Leftrightarrow x^4 + x + 2 = 0.$$

$$\bullet \text{ Với } |x| < 1 \Rightarrow x + 2 > 0 \Rightarrow x^4 + x + 2 > 0.$$

$$\bullet \text{ Với } |x| \geq 1 \Rightarrow x^4 \geq |x| \geq -x \Rightarrow x^4 + x + 2 > 0.$$

Suy ra phương trình (2) vô nghiệm.

Vậy hệ phương trình có 3 nghiệm phân biệt

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \\ y = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} x = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \\ y = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

**Bài tập tự luyện:**

1. Giải phương trình:

$$a. \sqrt{3x+1} + \sqrt{x+\sqrt{7x+2}} = 4 \qquad b. \sqrt{5x^3-1} + \sqrt[3]{2x-1} + x = 4$$

2. Giải phương trình:  $81 \sin^{10} x + \cos^{10} x = \frac{81}{256} (*)$

3. Giải bất phương trình:

$$\sqrt{(x+2)(2x-1)} - 3\sqrt{x+6} \leq 4 - \sqrt{(x+6)(2x-1)} + 3\sqrt{x+2}$$

4. Giải các hệ phương trình

$$1. \begin{cases} y = \frac{2x}{1-x^2} \\ z = \frac{2y}{1-y^2} \\ x = \frac{2z}{1-z^2} \end{cases} \qquad 2. \begin{cases} y^3 - 9x^2 + 27x - 27 = 0 \\ z^3 - 9y^2 + 27y - 27 = 0 \\ x^3 - 9z^2 + 27z - 27 = 0 \end{cases}$$

**Dạng 7 : Dùng đơn điệu hàm số để giải và biện luận phương trình và bất phương trình chứa tham số.**

Cho hàm số  $f(x; m) = 0$  xác định với mọi  $x \in I$  (\*)

- Biến đổi (\*) về dạng  $f(x) = f(m)$
- Xét hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $I$
- Dùng tính chất đơn điệu của hàm số và kết luận.

**Ví dụ 1:** Tìm tham số thực  $m$  để pt trình  $x + \sqrt{3x^2 + 1} = m$  có nghiệm thực .

Giải :

\* Xét hàm số  $f(x) = x + \sqrt{3x^2 + 1}$  và  $y = m$

\* Hàm số  $f(x) = x + \sqrt{3x^2 + 1}$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  .

\* Ta có :  $f'(x) = 1 + \frac{3x}{\sqrt{3x^2 + 1}} = \frac{\sqrt{3x^2 + 1} + 3x}{\sqrt{3x^2 + 1}}$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{3x^2 + 1} = -3x \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ 3x^2 + 1 = 9x^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ x = \frac{\pm 1}{\sqrt{6}} = \frac{\pm\sqrt{6}}{6} \Leftrightarrow x = \frac{-\sqrt{6}}{6}, f\left(\frac{-\sqrt{6}}{6}\right) = \frac{\sqrt{6}}{3} \end{cases}$$

Bảng biến thiên : suy ra  $f(x) \geq \frac{\sqrt{6}}{3}$  mà  $f(x) = m$  do đó  $m \geq \frac{\sqrt{6}}{3}$  thì phương trình cho có nghiệm thực .

**Ví dụ 2 :** Tìm tham số thực  $m$  để phương trình :  $\sqrt[4]{x^2 + 1} - \sqrt{x} = m(1)$  có nghiệm thực .

Giải :

\* Xét hàm số  $f(x) = \sqrt[4]{x^2 + 1} - \sqrt{x}$  liên tục trên nửa khoảng  $[0; +\infty)$  .

\* Ta có :  $f'(x) = \frac{1}{2} \left( \frac{x}{\sqrt[4]{(x^2 + 1)^3}} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) < 0$

Vì  $\frac{x}{\sqrt[4]{(x^2 + 1)^3}} < \frac{x}{\sqrt[4]{x^6}} = \frac{1}{\sqrt{x}} \Rightarrow \frac{x}{\sqrt[4]{(x^2 + 1)^3}} - \frac{1}{\sqrt{x}} < 0$  nên

$f'(x) < 0, \forall x > 0 \Rightarrow f(x)$  nghịch biến trên nửa khoảng  $[0; +\infty)$  và

**Nguyễn Phú Khánh – Đà Lạt .**

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0, \text{ nên } 0 < f(x) \leq 1, \forall x \in [0; +\infty).$$

Vậy, phương trình (1) có nghiệm thực trên nửa khoảng  $[0; +\infty) \Leftrightarrow 0 < m \leq 1$

**Ví dụ 3:** Tìm tham số thực  $m$  để phương trình :

$$(4m - 3)\sqrt{x + 3} + (3m - 4)\sqrt{1 - x} + m - 1 = 0, (2) \text{ có nghiệm thực.}$$

Giải :

Điều kiện:  $-3 \leq x \leq 1$ .

$$* \text{ Phương trình (2)} \Leftrightarrow m = \frac{3\sqrt{x + 3} + 4\sqrt{1 - x} + 1}{4\sqrt{x + 3} + 3\sqrt{1 - x} + 1}$$

\* Nhận thấy rằng:

$$(\sqrt{x + 3})^2 + (\sqrt{1 - x})^2 = 4 \Leftrightarrow \left(\frac{\sqrt{x + 3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{1 - x}}{2}\right)^2 = 1$$

\* Nên tồn tại góc  $\varphi \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right], t = \tan \frac{\varphi}{2}; t \in [0; 1]$  sao cho:

$$\sqrt{x + 3} = 2 \sin \varphi = 2 \frac{2t}{1 + t^2} \text{ và } \sqrt{1 - x} = 2 \cos \varphi = 2 \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$$

$$m = \frac{3\sqrt{x + 3} + 4\sqrt{1 - x} + 1}{4\sqrt{x + 3} + 3\sqrt{1 - x} + 1} \Leftrightarrow m = \frac{-7t^2 + 12t + 9}{-5t^2 + 16t + 7} = f(t), (3)$$

\* Xét hàm số:  $f(t) = \frac{-7t^2 + 12t + 9}{-5t^2 + 16t + 7}$  liên tục trên đoạn  $t \in [0; 1]$ . Ta có

$$f'(t) = \frac{-52t^2 - 8t - 60}{(-5t^2 + 16t + 7)^2} < 0, \forall t \in [0; 1] \Rightarrow f(t) \text{ nghịch biến trên đoạn } [0; 1]$$

$$\text{và } f(0) = \frac{9}{7}; f(1) = \frac{7}{9}$$

\* Suy ra phương trình (2) có nghiệm khi phương trình (3) có nghiệm trên

đoạn  $t \in [0; 1]$  khi và chỉ khi:  $\frac{7}{9} \leq m \leq \frac{9}{7}$ .

**Ví dụ 4:** Tìm tham số thực  $m$  để bất phương trình

$$\sqrt{x^2 - 2x + 24} \leq x^2 - 2x + m \text{ có nghiệm thực trong đoạn } [-4; 6].$$

Giải :

**Nguyễn Phú Khánh – Đà Lạt .**

Đặt  $t = \sqrt{x^2 - 2x + 24}$ ,  $\forall x \in [-4; 6] \Rightarrow t \in [0; 5]$

Bài toán trở thành tìm tham số thực  $m$  để bất phương trình  $t^2 + t - 24 \leq m$  có nghiệm thực  $t \in [0; 5]$

\* Xét hàm số  $f(t) = t^2 + t - 24$  liên tục trên đoạn  $[0; 5]$ .

\* Ta có :  $f'(t) = 2t + 1 > 0, \forall t \in [0; 5] \Rightarrow f(t)$  liên tục và đồng biến trên đoạn  $[0; 5]$

\* Vậy bất phương trình cho có nghiệm thực trên đoạn  $[0; 5]$  khi

$$\max_{t \in [0; 5]} f(t) \leq m \Leftrightarrow f(5) \leq m \Leftrightarrow 6 \leq m \Leftrightarrow m \geq 6$$

**Bài tập tự luyện:**

1. Tìm tham số thực  $m$  để phương trình :  $mx + \sqrt{(m-1)x+2} = 1$  có nghiệm thực trên đoạn  $[0; 1]$ .

2. Tìm tham số thực  $m$  để bất phương trình:  $\sqrt{x^2 - 4x + 5} \geq x^2 - 4x + m$  có nghiệm thực trên đoạn  $[2; 3]$ .

**Dạng 8 : Dùng đơn điệu hàm số để chứng minh hệ thức lượng giác**

**Ví dụ :** Chứng minh rằng : nếu tam giác  $ABC$  thỏa mãn hệ thức

$$\cos A + \cos B + \cos C + \frac{1}{\cos A + \cos B + \cos C} = \frac{13}{6} \text{ thì tam giác } ABC \text{ đều.}$$

Giải :

\* Đặt :  $t = \cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \Rightarrow 1 < t \leq \frac{3}{2}$ .

\* Xét hàm số  $f(t) = t + \frac{1}{t}$  hàm số liên tục trên nửa khoảng  $\left(0; \frac{3}{2}\right]$ .

\* Ta có :  $f'(t) = 1 - \frac{1}{t^2} > 0, \forall t \in \left(0; \frac{3}{2}\right] \Rightarrow f(t)$  đồng biến trên nửa khoảng

$\left(0; \frac{3}{2}\right]$ , suy ra :  $2 < f(t) \leq \frac{13}{6}$ .

Đẳng thức  $f(t) = \frac{13}{6}$  xảy ra khi  $t = \cos A + \cos B + \cos C = \frac{3}{2}$  hay tam giác  $ABC$  đều.

