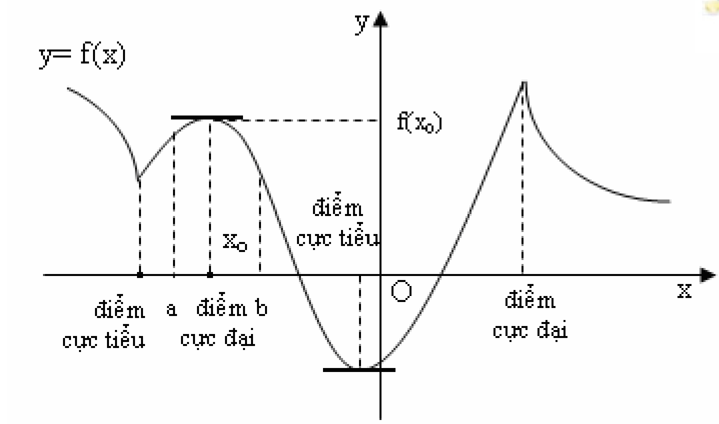
Bài 2: CỰC TRỊ HÀM SỐ



2.1 TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Khái niệm cực trị hàm số :

Giả sử hàm số f xác định trên tập hợp $D\left(D \subset \mathbb{R}\right)$ và $x_0 \in D$

$a)$ x_0 được gọi là một **điểm cực đại** của hàm số f nếu tồn tại một khoảng $\left(a;b\right)$ chứa điểm x_0 sao cho: $\begin{cases} \left(a;b\right) \subset D \\ f(x) < f(x_0) \quad \forall x \in \left(a;b\right) \setminus \left\{x_0\right\} \end{cases}$. Khi đó $f\left(x_0\right)$ được gọi là **giá trị cực đại** của hàm số f.

$b)$ x_0 được gọi là một **điểm cực tiểu** của hàm số f nếu tồn tại một khoảng $\left(a;b\right)$ chứa điểm x_0 sao cho: $\begin{cases} \left(a;b\right) \subset D \\ f(x) < f(x_0) \quad \forall x \in \left(a;b\right) \setminus \left\{x_0\right\} \end{cases}$. Khi đó $f\left(x_0\right)$ được gọi là **giá trị cực tiểu** của hàm số f.

Giá trị cực đại và giá trị cực tiểu được gọi chung là **cực trị**

Nếu x_0 là một điểm cực trị của hàm số f thì người ta nói rằng hàm số f đạt cực trị tại điểm x_0.

Như vậy : Điểm cực trị phải là một điểm trong của tập hợp $D\left(D \subset \mathbb{R}\right)$

Nhấn mạnh : $x_0 \in \left(a;b\right) \subset D$ nghĩa là x_0 là một điểm trong của D :

Ví dụ : Xét hàm số $f(x) = \sqrt{x}$ xác định trên $\left[0;+\infty\right)$. Ta có $f(x) > f\left(0\right)$ với mọi $x > 0$ nhưng $x = 0$ không phải là điểm cực tiểu vì tập hợp $\left[0;+\infty\right)$ không chứa bất kì một lân cận nào của điểm 0.

Chú ý :

- Giá trị cực đại (cực tiểu) $f(x_0)$ nói chung không phải là GTLN (GTNN) của f trên tập hợp D.
- Hàm số có thể đạt cực đại hoặc cực tiểu tại nhiều điểm trên tập hợp D. Hàm số cũng có thể không có điểm cực trị.
- x_0 là một điểm cực trị của hàm số f thì điểm $\left(x_{0;}f(x_0)\right)$ được gọi là ***điểm cực trị của đồ thị*** hàm số f.

2. Điều kiện cần để hàm số đạt cực trị:

Định lý 1: Giả sử hàm số f đạt cực trị tại điểm x_0. Khi đó , nếu f có đạo hàm tại điểm x_0 thì $f'\left(x_0\right) = 0$

Chú ý :

- Đạo hàm f' **có thể** bằng 0 tại điểm x_0 nhưng hàm số f không đạt cực trị tại điểm x_0.
- Hàm số **có thể** đạt cực trị tại một điểm mà tại đó hàm số không có đạo hàm .
- Hàm số chỉ **có thể** đạt cực trị tại một điểm mà tại đó đạo hàm của hàm số bằng 0, hoặc tại đó hàm số không có đạo hàm .
- Hàm số đạt cực trị tại x_0 và nếu đồ thị hàm số có tiếp tuyến tại điểm $\left(x_{0;}f(x_0)\right)$ thì tiếp tuyến đó song song với trục hoành.

Ví dụ : Hàm số $y = \left|x\right|$ và hàm số $y = x^3$

3. Điều kiện đủ để hàm số đạt cực trị:

Định lý 2: Giả sử hàm số f liên tục trên khoảng $\left(a;b\right)$ chứa điểm x_0 và có đạo hàm trên các khoảng $\left(a;x_0\right)$ và $\left(x_0;b\right)$. Khi đó :

$a)$ Nếu $\begin{cases} f'\left(x_0\right) < 0, x \in \left(a;x_0\right) \\ f'\left(x_0\right) > 0, x \in \left(x_0;b\right) \end{cases}$ thì hàm số đạt cực tiểu tại điểm x_0. Nói một cách khác , nếu $f'\left(x\right)$ đổi dấu từ âm sang dương khi x qua điểm x_0 thì hàm số đạt cực tiểu tại điểm x_0.

x	a		x_0		b
$f'\left(x\right)$		$-$	0	$+$	
$f\left(x\right)$	$f\left(a\right)$	$\searrow$	$f\left(x_0\right)$	$\nearrow$	$f\left(b\right)$

$b)$ Nếu $\begin{cases} f'(x_0) > 0, x \in (a;x_0) \\ f'(x_0) < 0, x \in (x_0;b) \end{cases}$ thì hàm số đạt cực đại tại điểm x_0. Nói một cách khác , nếu $f'(x)$ đổi dấu từ dương sang âm khi x qua điểm x_0 thì hàm số đạt cực đại tại điểm x_0.

x	a		x_0		b
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$f(a)$	$\nearrow$	$f(x_0)$	$\searrow$	$f(b)$

Định lý 3: Giả sử hàm số f có đạo hàm cấp một trên khoảng $(a;b)$ chứa điểm $x_0, f'(x_0) = 0$ và f có đạo hàm cấp hai khác 0 tại điểm x_0.

$a)$ Nếu $f''(x_0) < 0$ thì hàm số f đạt cực đại tại điểm x_0.

$b)$ Nếu $f''(x_0) > 0$ thì hàm số f đạt cực tiểu tại điểm x_0.

Chú ý:

Không cần xét hàm số f có hay không có đạo hàm tại điểm $x = x_0$ nhưng không thể bỏ qua điều kiện " *hàm số liên tục tại điểm* x_0 "

Ví dụ : Hàm số $f(x) = \begin{cases} 1 - x & khi \ \ x \le 0 \\ x & khi \ \ x > 0 \end{cases}$ không đạt cực trị tại $x = 0$. Vì hàm số không liên tục tại $x = 0$.

2.1 DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP.

Dạng 1 : Tìm các điểm cực trị của hàm số .

Quy tắc 1: Áp dụng định lý 2

- Tìm $f'(x)$
- Tìm các điểm x_i $(i = 1,2,3...)$ tại đó đạo hàm bằng 0 hoặc hàm số liên tục nhưng không có đạo hàm.

- Xét dấu của $f'(x)$. Nếu $f'(x)$ đổi dấu khi x qua điểm x_0 thì hàm số có cực trị tại điểm x_0.

Quy tắc 2: Áp dụng định lý 3

- Tìm $f'(x)$
- Tìm các nghiệm $x_i\ (i = 1,2,3...)$ của phương trình $f'(x) = 0$.
- Với mỗi x_i tính $f''(x_i)$.

– Nếu $f''(x_i) < 0$ thì hàm số đạt cực đại tại điểm x_i.

– Nếu $f''(x_i) > 0$ thì hàm số đạt cực tiểu tại điểm x_i.

Ví dụ 1 : Tìm cực trị của các hàm số :

1. $y = x^3 + 3x^2 + 3x + 5$ 2. $y = -x^4 + 6x^2 - 8x + 1$

Giải :

1. $y = x^3 + 3x^2 + 3x + 5$

* Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$.

* Ta có: $y' = 3x^2 + 6x + 3 = 3(x+1)^2 \ge 0\ \forall x \Rightarrow$ Hàm số không có cực trị.

Chú ý:

* Nếu y' không đổi dấu thì hàm số không có cực trị.

* Đối với hàm bậc ba thì $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt là điều cần và đủ để hàm có cực trị.

2. $y = -x^4 + 6x^2 - 8x + 1$

* Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$.

* Ta có: $y' = -4x^3 + 12x - 8 = -4(x-1)^2(x+2)$

$y' = 0 \Leftrightarrow -4(x-1)^2(x+2) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = -2$

* Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$			25	$\searrow$	$-\infty$

Vậy, hàm đạt cực đại tại $x = -2$ với giá trị cực đại của hàm số là $y(-2) = 25$, hàm số không có cực tiểu.

Bài tập tự luyện:

Tìm cực trị của các hàm số :

1. $y = \dfrac{4x^2 - 3x}{x - 1}$ **2.** $y = \dfrac{4x^2 + 4x - 1}{2x^2 + 4x + 3}$

Ví dụ 2 : Tìm cực trị của các hàm số :

1. $y = x\sqrt{4-x^2}$ 2. $y = 2x - \sqrt{x^2-3}$ 3. $y = \sqrt{-x^3+3x^2}$	4. $y = 2x + 1 - \sqrt{2x^2-8}$ 5. $y = \frac{1}{2}\left(x - \sqrt{12-3x^2}\right)$

Giải :

1. $y = f\left(x\right) = x\sqrt{4-x^2}$

* Hàm số đã cho xác định và liên tục trên đoạn $\left[-2;2\right]$

* Ta có $y' = \dfrac{4-2x^2}{\sqrt{4-x^2}}, x \in \left(-2;2\right)$

Hàm số không có đạo hàm tại các điểm $x = -2, x = 2$.

Suy ra, trên khoảng $\left(-2;2\right): y' = 0 \Leftrightarrow x = -\sqrt{2}, x = \sqrt{2}$

Bảng xét dấu y'

x	-2		$-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$		2
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	

y' đổi dấu từ âm sang dương khi x qua điểm $-\sqrt{2}$ thì hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x = -\sqrt{2},\ y\left(-\sqrt{2}\right) = -2$;

y' đổi dấu từ dương sang âm khi x qua điểm $\sqrt{2}$ thì hàm số đạt cực đại tại điểm $x = \sqrt{2},\ y\left(\sqrt{2}\right) = 2$.

2. $y = 2x - \sqrt{x^2-3}$

* Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $\left(-\infty;-\sqrt{3}\right] \cup \left[\sqrt{3};+\infty\right)$.

* Ta có: $y' = 2 - \dfrac{x}{\sqrt{x^2-3}} = \dfrac{2\sqrt{x^2-3}-x}{\sqrt{x^2-3}}, x \in \left(-\infty;-\sqrt{3}\right) \cup \left(\sqrt{3};+\infty\right)$.

Hàm số không có đạo hàm tại các điểm $x = -\sqrt{3}, x = \sqrt{3}$.

Suy ra, trên mỗi khoảng $\left(-\infty;-\sqrt{3}\right),\left(\sqrt{3};+\infty\right): y' = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in \left(-\infty;-\sqrt{3}\right) \cup \left(\sqrt{3};+\infty\right) \\ 2\sqrt{x^2-3} = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \le x < \sqrt{3} \\ 4(x^2-3) = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2.$$

Tương tự trên suy ra hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x = 2,\ y(2) = 3$, hàm số không có cực đại.

3. $y = \sqrt{-x^3 + 3x^2}$

* Hàm số đã cho xác định và liên tục trên nửa khoảng $(-\infty; 3]$.

* Ta có: $y' = \dfrac{-3(x^2 - 2x)}{2\sqrt{-x^3 + 3x^2}}, x < 3, x \neq 0$

Hàm số không có đạo hàm tại các điểm $x = 0, x = 3$.

Suy ra, trên mỗi khoảng $\left(-\infty; 3\right): y' = 0 \Leftrightarrow x = 2$

* Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		2		3
y'		$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	$\Vert$
y	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	0

Hàm số đạt cực đại tại điểm $x = 2,\ y(2) = 2$ và đạt cực tiểu tại điểm $x = 0,\ y(0) = 0$.

Chú ý:

* Ở bài 2 ví dụ 2 mặc dù $x = \pm\sqrt{3}$ là điểm mà tại đó hàm số không có đạo hàm tuy nhiên hàm số lại không xác định trên bất kì khoảng $(a; b)$ nào của hai điểm này nên hai điểm này không phải là điểm cực trị của hàm số.

* Tương tự vậy thì $x = 3$ của hàm số ở câu 3 cũng không phải là điểm cực trị nhưng $x = 0$ lại là điểm cực trị của hàm số.

4. $y = 2x + 1 - \sqrt{2x^2 - 8}$

* Hàm số đã cho xác định và liên tục trên nửa khoảng $\left(-\infty; -2\right], \left[2; +\infty\right)$.

* Ta có: $y' = 2 - \dfrac{2x}{\sqrt{2x^2 - 8}}, x \in \left(-\infty; -2\right) \cup \left(2; +\infty\right)$.

Hàm số không có đạo hàm tại các điểm $x = -2, x = 2$.

Suy ra, trên các khoảng $\left(-\infty; -2\right), \left(2; +\infty\right): y' = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in \left(-\infty; -2\right) \cup \left(2; +\infty\right) \\ \sqrt{2x^2 - 8} = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \le x < 2 \\ x^2 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2\sqrt{2}.$$

* Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-2		2		$2\sqrt{2}$		$+\infty$
y'		$+$	$\Vert$		$\Vert$	$-$	0	$+$	
y		$\nearrow$				$\searrow$		$\nearrow$	

Trên khoảng $\left(2;2\sqrt{2}\right)$: $y' < 0$, trên khoảng $\left(2\sqrt{2};+\infty\right)$: $y' > 0$ điểm cực tiểu là $\left(2\sqrt{2};3\sqrt{2}+1\right)$.

5. $y = \dfrac{1}{2}\left(x - \sqrt{12 - 3x^2}\right)$

* Hàm số đã cho xác định và liên tục trên đoạn $\left[-2;2\right]$.

* Ta có: $y' = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\sqrt{12-3x^2} + 3x}{\sqrt{12-3x^2}}\right), \forall x \in \left(-2;2\right)$

Hàm số không có đạo hàm tại các điểm $x = -2, x = 2$.

Suy ra, trên khoảng $\left(-2;2\right)$: $y' = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in \left(-2;2\right) \\ \sqrt{12-3x^2} = -3x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < x \le 0 \\ x^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = -1$$

* Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-2		-1		2	$+\infty$
y'		‖	$-$	0	$+$	‖	
y			↘		↗		

Trên khoảng $\left(-2;-1\right)$: $y' < 0$, trên khoảng $\left(-1;2\right)$: $y' > 0$ suy ra điểm cực tiểu là $\left(-1;-2\right)$.

Bài tập tương tự :

Tìm cực trị của các hàm số :

1. $y = x + 1 + \sqrt{2x^2 - 8}$

2. $y = \dfrac{x}{2} + \sqrt{x^2 + 3}$

3. $y = x + 2\sqrt{x^2 + x + 1}$

4. $y = x\sqrt{16 - x^2} + \left(x-1\right)\sqrt{x}$

Ví dụ 3 : Tìm cực trị của các hàm số :

1. $y = f\left(x\right) = \left|x\right|$
2. $y = f\left(x\right) = \left|x\right|\left(x+2\right)$
3. $y = f\left(x\right) = \sqrt{\left|x\right|}\left(x-3\right)$

Giải :

1. $y = f\left(x\right) = \left|x\right|$

* Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$.

$$y = \begin{cases} x \;\; khi \;\; x \ge 0 \\ -x \;\; khi \;\; x < 0 \end{cases}.$$

* Ta có $y' = \begin{cases} 1 \;\; khi \;\; x > 0 \\ -1 \;\; khi \;\; x < 0 \end{cases}$

Trên khoảng $\left(-\infty;0\right): y' < 0$,trên khoảng $\left(0;+\infty\right):\ y' > 0$.

* Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		$-$	$\Vert$	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số đạt điểm cực tiểu tại điểm $x = 0, f\left(0\right) = 0$.

2. $y = f\left(x\right) = \left|x\right|\left(x+2\right) = \begin{cases} x\left(x+2\right) \;\; khi \;\; x \ge 0 \\ -x\left(x+2\right) \;\; khi \;\; x < 0 \end{cases}$

* Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$.

* Ta có $y' = \begin{cases} 2x+2 > 0 \;\; khi \;\; x > 0 \\ -2x-2 \;\; khi \;\; x < 0 \end{cases}$

Hàm số liên tục tại $x = 0$, không có đạo hàm tại $x = 0$.

Trên khoảng $\left(-\infty;0\right): y' = 0 \Leftrightarrow x = -1$,trên khoảng $\left(0;+\infty\right):\ y' > 0$.

* Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$		$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy hàm số đạt cực đại tại điểm $x = -1, f\left(-1\right) = 1$, hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x = 0, f\left(0\right) = 0$.

3. $y = f\left(x\right) = \sqrt{\left|x\right|}\left(x-3\right)$

* Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$.

$$y = f\left(x\right) = \begin{cases} \sqrt{x}\left(x-3\right) \;\; khi \;\; x \ge 0 \\ \sqrt{-x}\left(x-3\right) \;\; khi \;\; x < 0 \end{cases}.$$

* Ta có $y' = \begin{cases} \dfrac{3(x-1)}{2\sqrt{x}} & khi\ \ x > 0 \\ \dfrac{3-x}{2\sqrt{-x}} + \sqrt{-x} & khi\ \ x < 0 \end{cases}$

Trên khoảng $(-\infty;0): y' > 0$,trên khoảng $(0;+\infty): y' = 0 \Leftrightarrow x = 1$

* Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		$+$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số đạt điểm cực đại tại điểm $x = 0, f(0) = 0$, hàm số đạt điểm cực tiểu tại điểm $x = 1, f(1) = -2$.

Bài tập tương tự :

Tìm cực trị của các hàm số :

1. $y = |x+1| + x$
2. $y = x^2 + x - |x^2 - 4|$
3. $y = |x| + 2\sqrt{4 - x^2}$
4. $y = |2x-4| + \sqrt{2x^2 - 8}$
5. $y = |x+3| + \sqrt{9x + x^2}$
6. $y = 2|-x+1| + x - 2 + \sqrt{x - x^2}$

Ví dụ 4 : Tìm cực trị của các hàm số sau

1. $y = 2\sin 2x - 3$ 2. $y = 3 - 2\cos x - \cos 2x$

Giải :

1. $y = 2\sin 2x - 3$

* Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$.

* Ta có $y' = 4\cos 2x$

$y' = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$,

$y'' = -8\sin 2x$

$y''\left(\dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{2}\right) = -8\sin\left(\dfrac{\pi}{2} + k\pi\right) = \begin{cases} -8 & khi \quad k = 2n \\ 8 & khi \quad k = 2n+1 \end{cases}$

Vậy hàm số đạt cực đại tại các điểm $x = \dfrac{\pi}{4} + n\pi; y\left(\dfrac{\pi}{4} + n\pi\right) = -1$ và đạt cực đại tại $x = \dfrac{\pi}{4} + (2n+1)\dfrac{\pi}{2}; y\left(\dfrac{\pi}{4} + (2n+1)\dfrac{\pi}{2}\right) = -5$

2. $y = 3 - 2\cos x - \cos 2x$

* Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$.

* Ta có $y' = 2\sin x + 2\sin 2x = 2\sin x\left(1 + 2\cos x\right)$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 0 \\ \cos x = -\frac{1}{2} = \cos\frac{2\pi}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k\pi \\ x = \pm\frac{2\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.$$

$y'' = 2\cos x + 4\cos 2x$

$y''\left(\pm\frac{2\pi}{3} + k2\pi\right) = 6\cos\frac{2\pi}{3} = -3 < 0$. Hàm số đạt cực đại tại $x = \pm\frac{2\pi}{3} + k2\pi$,

$y\left(\pm\frac{2\pi}{3} + k2\pi\right) = 4\frac{1}{2}$

$y''\left(k\pi\right) = 2\cos k\pi + 4 > 0, \forall k \in \mathbb{Z}$. Hàm số đạt cực tiểu tại

$x = k\pi$, $y\left(k\pi\right) = 2\left(1 - \cos k\pi\right)$

Bài tập tương tự:

Tìm cực trị của các hàm số :

1. $y = x - 2\sin^2 x$.

2. $y = x\tan x$.

3. $y = \cos^2 x$.

4. $y = 3\cos x + \sqrt{3}\sin x$.

5. $y = x - 2\sin^2 x$.

6. $y = x\tan x$.

7. $y = \cos^2 x$.

8. $y = 3\cos x + \sqrt{3}\sin x$.

Ví dụ 5: Tìm cực trị của hàm số : $y = \cos x\sqrt{\sin x}$ trên đoạn $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

Giải:

* Hàm số đã cho xác định và liên tục đoạn $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

* Ta có : $y' = -\sin x\sqrt{\sin x} + \frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}.\cos x = \frac{1 - 3\sin^2 x}{2\sqrt{\sin x}}$.

Trên khoảng $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$: $y' = 0 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x \in \left(0;\frac{\pi}{2}\right) \\ \sin^2 x = \frac{1}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ $\left(*\right)$

Tồn tại góc β sao cho $\sin\beta = \frac{1}{\sqrt{3}}$, khi đó $\left(*\right) \Leftrightarrow x = \beta$.

Với $\sin\beta = \frac{1}{\sqrt{3}}$ thì $\cos\beta = \frac{\sqrt{6}}{3}$ và $y(\beta) = \cos\beta\sqrt{\sin\beta} = \frac{\sqrt[4]{12}}{3}$

Bảng xét dấu y':

x	0		β		$\frac{\pi}{2}$
y'		$+$	0	$-$	

Hàm số đạt cực đại tại $x = \beta, y(\beta) = \frac{\sqrt[4]{12}}{3}$ với $\sin\beta = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Bài tập tương tự:

Tìm cực trị của các hàm số :

1. $y = (\cos 2x + 1)\sin 2x$ trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$.

2. $y = 2\cos\frac{x}{2} + 3\cos\frac{x}{3}$ trên khoảng $(0;20\pi)$.

3. $y = \cot x + 4x$ trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right]$.

4. $y = \frac{\cos x + 2\sin x + 3}{2\cos x - \sin x + 4}$ trên khoảng $(-\pi;\pi)$.

Ví dụ 6: Tìm cực trị của hàm số : $y = \left|\cos^3 x + \sin^3 x\right| + 3\sin 2x$.

Giải:

$y = \left|\cos^3 x + \sin^3 x\right| + 3\sin 2x = \left|(\cos x + \sin x)(1 - \cos x.\sin x)\right| + 3\sin 2x$

Vì $1 - \cos x.\sin x = \frac{1}{2}(2 - 2\cos x.\sin x) = \frac{1}{2}(2 - \sin 2x) > 0$

Nên $y = \left|\cos x + \sin x\right|\left(1 - \cos x.\sin x\right) + 3\sin 2x$

Đặt $t = \left|\cos x + \sin x\right| \Rightarrow \cos x.\sin x = \frac{t^2 - 1}{2}, 0 \le t \le \sqrt{2}$

Khi đó $y = f(t) = -\frac{1}{2}t^3 + \frac{3}{2}t^2 + \frac{3}{2}t - \frac{3}{2}, 0 \le t \le \sqrt{2}$

Ta có : $y' = \frac{3}{2}\left(-t^2 + 2t + 1\right) = \frac{3}{2}\left[2 - (t-1)^2\right] > 0, \forall t \in \left[0;\sqrt{2}\right]$, suy ra hàm số không có cực trị .

Ví dụ 7: Tính đạo hàm của hàm số tại điểm $x = 0$ và chứng minh rằng hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$, biết rằng hàm số $f(x)$ xác định bởi :

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt[3]{1+x\sin^2 x}-1}{x} & , x\neq 0\\ 0 & , x=0\end{cases}.$$

Giải :

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x\sin^2 x}-1}{x^2}$$

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{x\sin^2 x}{x^2\left[\sqrt[3]{\left(1+x\sin^2 x\right)^2}+\sqrt[3]{1+x\sin^2 x}+1\right]}$$

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\sin x.\frac{\sin x}{x}.\frac{1}{\sqrt[3]{\left(1+x\sin^2 x\right)^2}+\sqrt[3]{1+x\sin^2 x}+1}=0$$

Mặt khác $x\neq 0$, ta có :

$$f\left(x\right)=\frac{\sin^2 x}{\sqrt[3]{\left(1+x\sin^2 x\right)^2}+\sqrt[3]{1+x\sin^2 x}+1}\Rightarrow f\left(x\right)\geq 0=f\left(0\right).$$

Vì hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ nên hàm số $f(x)$ đạt cực tiểu tại $x=0$.

Ví dụ 8 : Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x} & , x\neq 0\\ 0 & , x=0\end{cases}$. Chứng minh rằng $f'(0)=0$ nhưng hàm số $f(x)$ không đạt cực trị tại điểm 0.

Giải :

Ta có $\dfrac{f(x)-f\left(0\right)}{x}=x\sin\dfrac{1}{x}$ với mọi $x\neq 0$.

Với mọi $x\neq 0$: $\left|x\sin\dfrac{1}{x}\right|\leq\left|x\right|$ và $\lim\limits_{x\to 0}x=0$ nên $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f\left(0\right)}{x}=0$. Do đó hàm số $f(x)$ có đạo hàm tại $x=0$ và $f'(0)=0$.

Lấy một dãy $x_n=\dfrac{1}{2n\pi}$, khi đó $f(x_n)=\dfrac{1}{\left(2n\pi\right)^2}\sin 2n\pi=0,\forall n$.

Giả sử $\left(a;b\right)$ là một khoảng bất kỳ chứa điểm 0.

Vì $\lim\limits_{x\to 0}x_n=0$ nên với n đủ lớn $x_n\in\left(a;b\right)$ và do $f(x_n)=0=f\left(0\right),\forall n$, theo định nghĩa cực trị của hàm số , $x=0$ không phải là một điểm cực trị của $f(x)$.

Dạng 2 : Tìm điều kiện để hàm số có cực trị.

Phương pháp: Sử dụng định lí 2 và định lí 3

Chú ý:

* Hàm số f (xác định trên D) có cực trị $\Leftrightarrow \exists x_0 \in D$ thỏa mãn hai điều kiện sau:

i) Tại đạo hàm của hàm số tại x_0 phải triệt tiêu hoặc hàm số không có đạo hàm tại x_0

ii) $f'(x)$ phải đổi dấu qua điểm x_0 hoặc $f''(x_0) \neq 0$.

* Nếu $f'(x)$ là một tam thức bậc hai hoặc triệt tiêu và cùng dấu với một tam thức bậc hai thì hàm có cực trị $\Leftrightarrow$ phương trình $f'(x)$ có hai nghiệm phân biệt thuộc tập xác định.

Ví dụ 1 : Với giá trị nào của m, hàm số
$y = 2\left(m^2 - 3\right)\sin x - 2m\sin 2x + 3m - 1$ đạt cực tiểu tại điểm $x = \dfrac{\pi}{3}$?.

Giải :

* Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$.

* Ta có : $y' = 2\left(m^2 - 3\right)\cos x - 4m\cos 2x,$

$y'' = -2\left(m^2 - 3\right)\sin x + 8m\sin 2x$.

Điều kiện cần để hàm số y đạt cực tiểu tại điểm $x = \dfrac{\pi}{3}$ là $f'\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = 0$

$\Leftrightarrow m^2 + 2m - 3 = 0 \Leftrightarrow m = -3 \vee m = 1$.

Điều kiện đủ để hàm số y đạt cực tiểu tại điểm $x = \dfrac{\pi}{3}$ là $y''\left(\dfrac{\pi}{3}\right) > 0$.

Thật vậy, $y''\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}\left(m^2 - 4m - 3\right)$

\+ $m = -3$, ta có $y''\left(\dfrac{\pi}{3}\right) < 0$. Do đó hàm số đạt cực đại tại điểm $x = \dfrac{\pi}{3}$.

\+ $m = 1$, ta có $y''\left(\dfrac{\pi}{3}\right) > 0$. Do đó hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x = \dfrac{\pi}{3}$.

Vậy hàm số $f\left(x\right)$ đạt cực tiểu tại điểm $x = \dfrac{\pi}{3}$ khi và chỉ khi $m = 1$.

Bài tập tương tự :

1. Tìm m để $y = mx^3 + 3x^2 + 12x + 2$ đạt cực đại tại điểm $x = 2$.

2. Xác định giá trị tham số m để hàm số $y = \dfrac{x^2 + mx + 1}{x + m}$ đạt cực đại tại $x = 2$.

3. Xác định giá trị tham số m để hàm số $y = x^3 + \left(m + 3\right)x^2 + 1 - m$ đạt cực đại tại $x = -1$.

Ví dụ 2: Tìm $m \in \mathbb{R}$ để hàm số $y = \dfrac{x^2 + mx - 2}{mx - 1}$ có cực trị .

Giải :

* Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{1}{m}\right\}$

+ Nếu $m = 0$ thì $y = x^2 - 2 \Rightarrow$ hàm số có một cực trị

+ Nếu $m \neq 0$ hàm số xác định $\forall x \neq \dfrac{1}{m}$

* Ta có $y' = \dfrac{mx^2 - 2x + m}{(mx-1)^2}$. Hàm số có cực trị khi phương trình

$mx^2 - 2x + m = 0$ có hai nghiệm phân biệt khác $\dfrac{1}{m}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 - m^2 > 0 \\ m - \dfrac{1}{m} \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < m < 1.$$

Vậy $-1 < m < 1$ là những giá trị cần tìm.

Bài tập tương tự :

Tìm m để đồ thị của hàm số sau có cực trị :

1. $y = x^3 - 3mx^2 + \left(m + 2\right)x + 3m + 4$

2. $y = \dfrac{x^2 - \left(m+1\right)x - m + 2}{x - 1}$

3. $y = x^4 - 2\left(m - 4\right)x^2 + 2m - 5$

4. $y = \dfrac{mx^2 - \left(m - 2\right)x - 1}{x + 2}$

Ví dụ 3: Chứng minh rằng với mọi giá trị của $m \in \mathbb{R}$, hàm số $y = \dfrac{x^2 - m\left(m+1\right)x + m^3 + 1}{x - m}$ luôn có cực đại và cực tiểu .

Giải :

* Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $D = \mathbb{R} \setminus \left\{m\right\}$.

* Ta có:

$$y' = \frac{x^2 - 2mx + m^2 - 1}{\left(x - m\right)^2} = \frac{g\left(x\right)}{\left(x - m\right)^2}\ ,\ x \neq m\ ,\ g\left(x\right) = x^2 - 2mx + m^2 - 1$$

Dấu của $g\left(x\right)$ cũng là dấu của y' và $\Delta'_g = m^2 - \left(m^2 - 1\right) = 1 > 0$, $\forall m$.

Do đó $\forall m$ thì $g\left(x\right) = 0$ luôn có 2 nghiệm phân biệt $x_1 = m - 1, x_2 = m + 1$ thuộc tập xác định .

* Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$m-1$		m		$m+1$		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	||	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$		$\searrow$ $-\infty$	|| $+\infty$	$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$

y' đổi dấu từ dương sang âm khi x qua điểm $x_1 = m - 1$ thì hàm số đạt cực đại tại điểm $x_1 = m - 1$

y' đổi dấu từ âm sang dương khi x qua điểm $x_2 = m + 1$ thì hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x_2 = m + 1$

Bài tập tương tự :

Tìm m để đồ thị của hàm số sau có một cực đại và cực tiểu :

1. $y = \dfrac{\left(m-1\right)x^2 - \left(m-1\right)x + m}{x-1}$ **2.** $y = \dfrac{1}{3}\left(m+1\right)x^3 + \left(m+1\right)x^2 + 2m + 1$

Ví dụ 4 : Tìm m để điểm $M\left(2;0\right)$ là điểm cực đại của đồ thị hàm số $y = -x^3 + mx^2 - 4$.

Giải:

* Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$.

* Ta có $y' = -3x^2 + 2mx, \quad y'' = -6x + 2m$.

Điểm $M\left(2;0\right)$ là điểm cực đại của đồ thị hàm số khi và chỉ khi :

$$\begin{cases} y'\left(2\right) = 0 \\ y''\left(2\right) < 0 \\ y\left(2\right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -12 + 4m = 0 \\ -12 + 2m < 0 \\ -8 + 4m - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 3 \\ m < 6 \end{cases} \Leftrightarrow m = 3$$

Bài tập tương tự :

1. Tìm m để hàm số $y = x^4 + \left(m+1\right)x^2 + m - 1$ có điểm cực tiểu $\left(-1;1\right)$.

2. Tìm m để hàm số $y = \dfrac{x^2 + \left(m-1\right)x + m - 2}{x+1}$ có điểm cực đại $\left(2;-2\right)$.

Ví dụ 5 : Cho hàm số $y = x^4 + 4mx^3 + 3(m+1)x^2 + 1$. Tìm $m \in \mathbb{R}$ để :

1. Hàm số có ba cực trị.

2. Hàm số có cực tiểu mà không có cực đại.

Giải:

* Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$.

* Ta có $y' = 4x^3 + 12mx^2 + 6(m+1)x = 2x(2x^2 + 6mx + 3(m+1))$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ f(x) = 2x^2 + 6mx + 3m + 3 = 0 \end{array}\right.$$

Nhận xét:

*Nếu y có hai nghiệm phân biệt $x_1, x_2 \neq 0$, khi đó y' sẽ đổi dấu khi đi qua ba điểm $0, x_1, x_2$ khi đó hàm có hai cực tiểu và 1 cực đại.

*Nếu y có 1 nghiệm $x = 0$, khi đó y' chỉ đổi dấu từ $-$ sang $+$ khi đi qua một điểm duy nhất nên hàm chỉ có một cực tiểu.

* Nếu y có nghiệm kép hoặc vô nghiệm thì y' chỉ đổi dấu từ - sang + khi đi qua $x = 0$ nên hàm đạt cực tiểu tại $x = 0$.

Từ trên ta thấy hàm số luôn có ít nhất một cực trị.

1. Hàm số có ba cực trị khi và chỉ khi y có hai nghiệm phân biệt khác 0

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 3(3m^2 - 2m - 2) > 0 \\ y(0) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < \dfrac{1-\sqrt{7}}{3} \cup m > \dfrac{1+\sqrt{7}}{3} \\ m \neq -1 \end{cases}.$$

2. Theo nhận xét trên ta thấy hàm chỉ có cực tiểu mà không có cực đại

$\Leftrightarrow$ hàm số không có ba cực trị $\Leftrightarrow \dfrac{1-\sqrt{7}}{3} \leq m \leq \dfrac{1+\sqrt{7}}{3}$.

Chú ý:

1) Đối với hàm trùng phương $y = ax^4 + bx^2 + c \ (a \neq 0)$

Ta có $y' = 4ax^3 + 2bx = x(4ax^2 + b) \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ 4ax^2 + b = 0 \ (1) \end{array}\right.$

* Hàm có ba cực trị $\Leftrightarrow$ (1) có hai nghiệm phân biệt khác 0 $\Leftrightarrow \begin{cases} b \neq 0 \\ ab < 0 \end{cases}$.

Khi đó hàm có hai cực tiểu, một cực đại khi $a > 0$; hàm có hại cực đại, 1 cực tiểu khi $a < 0$.

* Hàm có một cực trị khi và chỉ khi (1) có nghiệm kép hoặc vô nghiệm hoặc có 1 nghiệm $x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \Delta < 0 \\ y(0) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} ab > 0 \\ b = 0 \end{array}\right.$. Khi đó hàm chỉ có cực tiểu khi $a > 0$ và chỉ có cực đại khi $a < 0$.

2) Đối với hàm số bậc bốn $y = ax^4 + bx^3 + cx^2 + d$, Ta có: $y' = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ 4ax^2 + 3bx + 2c = 0 \ (2) \end{array}\right.$

* Hàm số có ba cực trị khi và chỉ khi (2) có hai nghiệm phân biệt khác 0 $\Leftrightarrow \begin{cases} 9b^2 - 32ac > 0 \\ c \neq 0 \end{cases}$. Khi đó hàm có hai cực tiểu, một cực đại khi $a > 0$; hàm có hại cực đại, 1 cực tiểu khi $a < 0$.

* Hàm có một cực trị khi và chỉ khi (2) có nghiệm kép hoặc vô nghiệm hoặc có 1 nghiệm $x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \Delta < 0 \\ y(0) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 9b^2 - 32ac < 0 \\ c = 0 \end{array}\right.$. Khi đó hàm chỉ có cực tiểu khi $a > 0$ và chỉ có cực đại khi $a < 0$.

Bài tập tương tự :

1. Tìm m để hàm số $y = \dfrac{mx^2 + x + m}{x + m}$ không có cực đại , cực tiểu .

2. Tìm m để hàm số $y = mx^3 + 3mx^2 - (m-1)x - 1$ không có cực trị.

3. Xác định các giá trị của tham số k để đồ thị của hàm số $y = kx^4 + \left(k-1\right)x^2 + 1 - 2k$ chỉ có một điểm cực trị.

4. Xác định m để đồ thị của hàm số $y = x^4 - mx^2 + 3$ có cực tiểu mà không có cực đại.

Ví dụ 6 : Tìm m để hàm số $y = -2x + 2 + m\sqrt{x^2 - 4x + 5}$ có cực đại.

Giải :

* Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$.

* Ta có $y' = -2 + m\dfrac{x-2}{\sqrt{x^2 - 4x + 5}}$; $y'' = \dfrac{m}{\sqrt{(x^2 - 4x + 5)^3}}$.

\+ Nếu $m = 0$ thì $y = -2 < 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$ nên hàm số không có cực trị.

\+ $m \neq 0$ vì dấu của y'' chỉ phụ thuộc vào m nên để hàm có cực đại thì trước hết $y'' < 0 \Leftrightarrow m < 0$. Khi đó hàm số có cực đại $\Leftrightarrow$ Phương trình $y' = 0$ có nghiệm **(1)**.

Ta có: $y' = 0 \Leftrightarrow 2\sqrt{(x-2)^2 + 1} = m(x-2)$ **(2)** .

Đặt $t = x - 2$ thì **(2)** trở thành :

$mt = 2\sqrt{t^2 + 1} \Leftrightarrow \begin{cases} t \leq 0 \\ (m^2 - 4)t^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \leq 0 \\ t^2 = \dfrac{1}{m^2 - 4} \end{cases} \Rightarrow (1)$ có nghiệm

$\Leftrightarrow m^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow m < -2$ (Do $m < 0$).

Vậy $m < -2$ thì hàm số có cực đại.

Dạng 3 : Tìm điều kiện để các điểm cực trị của hàm số thỏa mãn điều kiện cho trước.

Phương pháp:

- Trước hết ta tìm điều kiện để hàm số có cực trị,
- Biểu diễn điều kiện của bài toán thông qua tọa độ các điểm cực trị của đồ thị hàm số từ đó ta tìm được điều kiện của tham số.

Chú ý:

* Nếu ta gặp biểu thức đối xứng của hoành độ các điểm cực trị và hoành độ các điểm cực trị là nghiệm của một tam thức bậc hai thì ta sử dụng định lí Viét.

* Khi tính giá trị cực trị của hàm số qua điểm cực trị ta thường dùng các kết quả sau:

Định lí 1: Cho hàm đa thức $y = P\left(x\right)$, giả sử $y = \left(ax+b\right)P'\left(x\right) + h\left(x\right)$ khi đó nếu x_0 là điểm cực trị của hàm số thì giá trị cực trị của hàm số là:

$y\left(x_0\right) = h\left(x_0\right)$ và $y = h\left(x\right)$ gọi là phương trình quỹ tích của các điểm cực trị.

Chứng minh: Giả sử x_0 là điểm cực trị của hàm số, vì $P(x)$ là hàm đa thức nên $P'\left(x_0\right) = 0 \Rightarrow y\left(x_0\right) = (ax_0+b)P'\left(x_0\right) + h\left(x_0\right) = h\left(x_0\right)$ (đpcm) .

Định lí 2: Cho hàm phân thức hữu tỉ $y = \dfrac{u\left(x\right)}{v\left(x\right)}$ khi đó nếu x_0 là điểm cực trị của hàm số thì giá trị cực trị của hàm số: $y(x_0) = \dfrac{u'\left(x_0\right)}{v'\left(x_0\right)}$.

Và $y = \dfrac{u'\left(x\right)}{v'\left(x\right)}$ là phương trình quỹ tích của các điểm cực trị.

Chứng minh: Ta có $y' = \dfrac{u'\left(x\right)v\left(x\right) - v'\left(x\right)u\left(x\right)}{v^2\left(x\right)}$

$\Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow u'\left(x\right)v\left(x\right) - v'\left(x\right)u\left(x\right) = 0$ (*). Giả sử x_0 là điểm cực trị của hàm số thì x_0 là nghiệm của phương trình (*) $\Rightarrow \dfrac{u'\left(x_0\right)}{v'\left(x_0\right)} = \dfrac{u\left(x_0\right)}{v\left(x_0\right)} = y\left(x_0\right)$.

Ví dụ 1 : Tìm m để đồ thị của hàm số $y = \dfrac{1}{3}x^3 - mx^2 + \left(2m-1\right)x + 2$ có 2 điểm cực trị dương.

Giải :

* Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$.

* Ta có $y' = x^2 - 2mx + 2m - 1$

$y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2mx + 2m - 1 = 0 \quad (*)$

* Hàm số có hai điểm cực trị dương $\Leftrightarrow$ $(*)$ có hai nghiệm dương phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = m^2 - 2m + 1 > 0 \\ S = 2m > 0 \\ P = 2m - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > \dfrac{1}{2} \\ m \neq 1 \end{cases}.$$

Vậy $\begin{cases} m > \dfrac{1}{2} \\ m \neq 1 \end{cases}$ là những giá trị cần tìm.

Bài tập tương tự :

1. Tìm m để đồ thị của hàm số $y = x^3 - mx^2 + \left(m + 6\right)x + 5$ có 2 điểm cực trị dương.

2. Tìm m để đồ thị của hàm số $y = \dfrac{2x^2 - mx + m - 2}{mx + 1}$ có 2 điểm cực trị âm.

Ví dụ 2 : Tìm m để đồ thị của hàm số $y = \dfrac{mx^2 + 3mx + 2m + 1}{x - 1}$ có cực đại, cực tiểu và 2 điểm đó nằm về hai phía với trục Ox.

Giải :

* Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \left\{1\right\}$.

* Ta có $y' = \dfrac{mx^2 - 2mx - 5m - 1}{(x - 1)^2}$

$y' = 0 \Leftrightarrow mx^2 - 2mx - 5m - 1 = 0 \quad \left(x \neq 1\right) \quad \left(*\right)$

Hàm số có hai điểm cực trị $\Leftrightarrow \left(*\right)$ có 2 nghiệm phân biệt $x_1, x_2 \neq 1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m(6m + 1) > 0 \\ -6m - 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < -\dfrac{1}{6} \\ m > 0 \end{array} \right..$$

Hai điểm cực trị của đồ thị hàm số nằm về hai phía trục Ox

$\Leftrightarrow y\left(x_1\right).y\left(x_2\right) < 0$.

Áp dụng kết quả định lí 2 ta có: $y\left(x_1\right) = 2m\left(x_1 - 1\right)$, $y\left(x_2\right) = 2m\left(x_2 - 1\right)$

$\Rightarrow y\left(x_1\right).y\left(x_2\right) = 4m^2\left[x_1x_2 - \left(x_1 + x_2\right) + 1\right] = 4m\left(-2m - 1\right)$.

$y\left(x_1\right).y\left(x_2\right) < 0 \Leftrightarrow 4m(-2m-1) < 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < -\dfrac{1}{2} \\ m > 0 \end{array}\right.$.

Vậy $\left[\begin{array}{l} m < -\dfrac{1}{2} \\ m > 0 \end{array}\right.$ là những giá trị cần tìm.

Bài tập tương tự :

1. Tìm m để đồ thị của hàm số $y = \dfrac{m}{3}x^3 - \dfrac{1}{2}x^2 + \left(m-1\right)x + 3$ có cực đại, cực tiểu và 2 điểm đó nằm về hai phía với trục Ox.

2. Tìm m để đồ thị của hàm số $y = -\dfrac{\left(m+1\right)}{3}x^3 - mx^2 + 3m - 1$ có cực đại, cực tiểu và 2 điểm đó nằm về hai phía với trục Oy.

3. Cho hàm số $y = \dfrac{mx^2 + 3mx + 2m + 1}{x-1}, m \neq \dfrac{1}{6}$. Tìm m để hàm số có cực đại, cực tiểu và hai điểm cực trị đó nằm về hai phía của trục hoành.

Ví dụ 3 : Tìm m để đồ thị của hàm số $(C_m): y = 2x^3 + mx^2 - 12x - 13$ có điểm cực đại, cực tiểu và các điểm này cách đều trục Oy.

Giải:

* Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$

* Ta có $y' = 2(3x^2 + mx - 6) \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 + mx - 6 = 0 \quad (2)$

Vì (2) luôn có hai nghiệm phân biệt nên đồ thị hàm số luôn có hai cực trị. Gọi x_1, x_2 là hoành độ hai cực trị, hai điểm cực trị cách đều trục tung

$\Leftrightarrow \left|x_1\right| = \left|x_2\right| \Leftrightarrow x_1 = -x_2 \Leftrightarrow x_1 + x_2 = 0$ (vì $x_1 \neq x_2$)

$\Leftrightarrow S = \dfrac{-b}{a} = \dfrac{-m}{3} = 0 \Leftrightarrow m = 0$.

Vậy $m = 0$ là giá trị cần tìm.

Bài tập tương tự :

1. Tìm m để đồ thị của hàm số (C_m): $y = -\dfrac{1}{3}x^3 + \left(2m-3\right)x^2 - \left(2m-3\right)x$ có điểm cực đại, cực tiểu và các điểm này cách đều trục Oy.

2. Tìm m để đồ thị của hàm số (C_m): $y = \dfrac{x^2 - \left(m-1\right)x + m + 1}{x-1}$ có điểm cực đại, cực tiểu và các điểm này cách đều trục Ox.

Ví dụ 4 : Tìm m để đồ thị của hàm số

$y = x^3 - (2m+1)x^2 + (m^2 - 3m + 2)x + 4$ có hai điểm cực đại và cực tiểu nằm về hai phía trục tung .

Giải :

* Hàm số cho xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$

* Ta có : $y' = 3x^2 - 2(2m+1)x + m^2 - 3m + 2$

Hàm số có hai điểm cực đại và cực tiểu nằm về hai phía trục tung khi và chỉ khi phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thoả mãn $x_1 < 0 < x_2$

$\Leftrightarrow 3.y'(0) < 0 \Leftrightarrow m^2 - 3m + 2 < 0 \Leftrightarrow 1 < m < 2$

Vậy giá trị cần tìm là $1 < m < 2$.

Bài tập tương tự :

1. Tìm m để đồ thị của hàm số $y = x^3 - mx^2 + (2m^2 + 7m - 9)x - 1$ có hai điểm cực đại và cực tiểu nằm về hai phía trục tung .

2. Tìm m để đồ thị của hàm số $y = -x^3 + (4m-3)x^2 + (m^2 + 7m + 10)x + 3$ có hai điểm cực đại và cực tiểu nằm về hai phía trục hoành .

Ví dụ 5 : Tìm tham số $m > 0$ để hàm số $y = \dfrac{x^2 + m^2x + 2m^2 - 5m + 3}{x}$ đạt cực tiểu tại $x \in (0;2m)$.

Giải :

* Hàm số đã cho xác định và liên tục trên khoảng $(0;2m)$

* Ta có : $y' = \dfrac{x^2 - 2m^2 + 5m - 3}{x^2} = \dfrac{g(x)}{x^2}, x \neq 0, g(x) = x^2 - 2m^2 + 5m - 3$

Hàm số đạt cực tiểu tại $x \in (0;2m) \Leftrightarrow g(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt

$x_1, x_2\ (x_1 < x_2)$ thoả $x_1 < 0 < x_2 < 2m \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ 1.g(0) < 0 \\ 1.g(2m) > 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ -2m^2 + 5m - 3 < 0 \\ 2m^2 + 5m - 3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ \left[\begin{array}{l} m < 1 \\ m > \dfrac{3}{2} \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} m < -3 \\ m > \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{1}{2} < m < 1 \\ m > \dfrac{3}{2} \end{array}\right. .$$

Vậy giá trị m cần tìm là $\frac{1}{2} < m < 1 \vee m > \frac{3}{2}$.

Bài tập tương tự :

1. Tìm tham số m để hàm số $y = x^3 - m^2x^2 - 2x + 3$ đạt cực tiểu tại $x \in (m; 2m)$.

2. Tìm tham số m để hàm số $y = x^4 - (m-1)x^2 - 1$ đạt cực đại tại $x \in (1; m+1)$.

Ví dụ 6 : Tìm tham số thực m để đồ thị của hàm số :
$y = \frac{1}{3}mx^3 + 3mx^2 + (3m+1)x - 2$ có cực đại tại $x \in (-3; 0)$.

Giải :

* Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$.

* Ta có $y' = mx^2 + 6mx + 3m + 1$

\+ Nếu $m = 0$ thì $y' = 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$ hàm số luôn tăng $\forall x \in \mathbb{R}$, do đó hàm số không có cực trị.

\+ Nếu $m \neq 0$, ta có $\Delta' = m(6m - 1)$.

* Bảng xét dấu

m	$-\infty$		0		$\frac{1}{6}$		$+\infty$
Δ'		$+$	0	$-$	0	$+$	

- Nếu $0 < m < \frac{1}{6}$ thì $y' > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$ hàm số luôn tăng $\forall x \in \mathbb{R}$, do đó hàm số không có cực trị.
- Nếu $m = \frac{1}{6}$ thì $y' = \frac{1}{6}x^2 + x + \frac{3}{2} = \frac{1}{6}(x+3)^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$ hàm số luôn tăng $\forall x \in \mathbb{R}$, do đó hàm số không có cực trị.

- Với $m < 0$ hoặc $m > \dfrac{1}{6}$, khi đó tam thức y' có hai nghiệm phân biệt

$x_{1,2} = -3 \pm \dfrac{\sqrt{\Delta'}}{m}$ $\left(x_1 < x_2\right)$.

+ $m < 0$. Ta có bảng xét dấu

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	

Dựa vào bảng xét dấu, suy ra x_2 là hoành độ cực đại của hàm số.

Theo bài toán, ta có $-3 < x_2 < 0 \Leftrightarrow -3 < -3 - \dfrac{\sqrt{\Delta'}}{m} < 0 \Leftrightarrow \sqrt{\Delta'} < -3m$

$\Leftrightarrow m\left(6m-1\right) < 9m^2 \Leftrightarrow 3m^2 + m > 0 \Leftrightarrow m < -\dfrac{1}{3}\left(do \;\; m < 0\right)$

+ $m > \dfrac{1}{6}$, tương tự.

Bài tập tự luyện:

1. Tìm tham số thực m để đồ thị của hàm số : $y = \dfrac{mx^2 + x}{-x+1}$ có cực đại tại $x \in \left(0;1\right)$ và có cực tiểu x ở ngoài khoảng đó.

2. Tìm tham số thực m để đồ thị của hàm số : $y = \dfrac{x^2 + m\left(x+1\right)}{x+2}$ có cực đại tại $x \in \left[0;1\right]$ và có cực tiểu x ở ngoài đoạn đó.

3. Tìm tham số thực m để đồ thị của hàm số : $y = \left(m+1\right)x^3 + mx^2 - x$ có một cực trị tại $x \in \left(-1;1\right)$.

Ví dụ 7 : Cho hàm số $y = \dfrac{x^2 + m\left(x+1\right)}{x+2}$, hãy tìm tham số m để hàm số đạt cực đại , cực tiểu tại các điểm có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn hệ thức :

$x_1^2 + x_2^2 = -6\left(\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2}\right)$.

Giải :

* Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $\left(-\infty;-2\right) \cup \left(-2;+\infty\right)$.

* Ta có $y' = \dfrac{x^2 + 4x + m}{\left(x+2\right)^2}, x \neq -2$

* Để hàm số đạt cực đại , cực tiểu tại các điểm có hoành độ x_1, x_2 thì phương trình $g\left(x\right) = x^2 + 4x + m = 0$ có hai nghiệm phân biệt khác -2 khi đó

$$\begin{cases} \Delta = 4 - m > 0 \\ g\left(-2\right) = \left(-2\right)^2 + 4.\left(-2\right) + m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < 4 .$$

Theo định lý Vi-ét , ta có : $\begin{cases} x_1 + x_2 = 12 \\ x_1.x_2 = m \end{cases}$.

$$x_1^2 + x_2^2 = -6\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}\right) \Leftrightarrow \left(x_1 + x_2\right)^2 - 2.x_1.x_2 = -6\frac{x_1 + x_2}{x_1.x_2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 16 - 2m = \dfrac{24}{m} \\ 0 \neq m < 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 8m + 12 = 0 \\ 0 \neq m < 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m = 2 \\ m = 6 \end{array}\right. \\ 0 \neq m < 4 \end{cases} \Leftrightarrow m = 2 .$$

Bài tập tương tự :

1. Tìm m để đồ thị của hàm số: $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}\left(3m - 1\right)x^2 + 2\left(m - 1\right)mx$ có cực đại, cực tiểu đồng thời hoành độ cực đại, cực tiểu x_1, x_2 thỏa mãn hệ thức :

$x_1 = x_2^2 + 3$.

2. Tìm m để đồ thị của hàm số: $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + \left(m^2 - 1\right)x - \frac{m}{3}$ có cực đại, cực tiểu đồng thời hoành độ cực đại, cực tiểu x_1, x_2 thỏa mãn hệ thức :

$x_1^2 = x_1.\left(x_2 - 5\right) + 12$.

3. Tìm m để đồ thị của hàm số: $y = x + m + 1 + \frac{\left(m - 1\right)^2}{x - 1}; m \neq 1$ có cực đại, cực tiểu đồng thời hoành độ cực đại, cực tiểu x_1, x_2 thỏa mãn hệ thức :

$x_1 - x_2 = mx_1^2 - 1$.

4. Tìm $m < 5, m \in \mathbb{Z}$ để đồ thị của hàm số:

$y = \frac{1}{3}x^3 - \left(m - 1\right)x^2 + 3\left(m - 2\right)x + \frac{1}{3}$ có cực đại, cực tiểu đồng thời hoành độ cực đại, cực tiểu x_1, x_2 thỏa mãn hệ thức : $2 \leq \left|x_1 - x_2\right| < 2\sqrt{7}$.

5. Tìm $m \in \mathbb{Z}^+$ để đồ thị của hàm số:

$y = 2x^3 - 3\left(2m+1\right)x^2 + 6m\left(m+1\right)x + \left(m+1\right)^2$ có cực đại $A\left(x_1, y_1\right)$, cực tiểu $B\left(x_2, y_2\right)$ thỏa mãn hệ thức : $\left(y_1 - y_2\right)\left(6 - 5m\right) > m^2\left(x_2 - x_1\right)$.

Ví dụ 8 : Tìm tham số m để hàm số $y = \left(x - m\right)\left(x^2 - 3x - m - 1\right)$ có cực đại và cực tiểu thỏa $\left|x_{CĐ}.x_{CT}\right| = 1$.

Giải:

* Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$.

* Ta có $y' = 3x^2 - 2\left(m+3\right)x + 2m - 1$

$y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 2\left(m+3\right)x + 2m - 1 = 0 \ (1)$

Hàm số có hai điểm cực trị thỏa mãn $\left|x_{CĐ}.x_{CT}\right| = 1 \Leftrightarrow$ (1) có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn: $\left|x_1.x_2\right| = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = m^2 + 7 > 0 \\ \left|P\right| = \left|\dfrac{c}{a}\right| = \left|\dfrac{2m-1}{3}\right| = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 2 \\ m = -1 \end{array}\right.$.

Vậy $m = 2$ hoặc $m = -1$ là giá trị cần tìm.

Bài tập tương tự :

1. Tìm tham số m để hàm số $y = 3x^4 - mx^2 - 2$ có cực đại $A\left(0;-2\right)$ và cực tiểu B, C sao cho $\left|x_C.x_B\right| < \dfrac{m^2 + 4m - 4}{6}$.

2. Tìm tham số m để hàm số $y = x^4 - 4mx^2 + 1$ có cực đại $A\left(0;1\right)$ và cực tiểu B, C sao cho $\left|x_C.x_B\right| > 2\left(m^2 + 8m + 10\right)$.

Ví dụ 9 : Tìm tham số m để hàm số

$y = \dfrac{1}{3}mx^3 - \left(m-1\right)x^2 + 3\left(m-2\right)x + \dfrac{1}{3}$ có cực đại , cực tiểu đồng thời hoành độ cực đại cực tiểu x_1, x_2 thỏa $x_1 + 2x_2 = 1$.

Giải:

* Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$.

* Ta có $y' = mx^2 - 2\left(m-1\right)x + 3\left(m-2\right)$

Hàm số có cực đại , cực tiểu khi y' đổi dấu hai lần qua nghiệm x, tức là phương trình $mx^2 - 2\left(m-1\right)x + 3\left(m-2\right) = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2

$$\begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta' = (m-1)^2 - 3m(m-2) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ -2m^2 + 4m + 1 > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ \dfrac{2-\sqrt{6}}{2} < m < \dfrac{2+\sqrt{6}}{2} \end{cases}$$

Theo định lý Vi – ét và yêu cầu bài toán, ta có:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 1 \quad (gt) \\ x_1 + x_2 = \dfrac{2(m-1)}{m} \\ x_1.x_2 = \dfrac{3(m-2)}{m} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{3m-4}{m} \\ x_2 = \dfrac{2-m}{m} \\ \left(\dfrac{3m-4}{m}\right)\left(\dfrac{2-m}{m}\right) = \dfrac{3(m-2)}{m} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 3m^2 - 8m + 4 = 0\,(m \neq 0) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = \dfrac{2}{3} \\ m = 2 \end{array}\right.$$

So với điều kiện bài toán , vậy $m = \dfrac{2}{3} \vee m = 2$ là giá trị cần tìm .

Bài tập tương tự :

1. Tìm tham số m để hàm số $y = 3x^4 - mx^2 - 2$ có cực đại $A(0;-2)$ và cực tiểu B, C sao cho $|x_C - x_B| < \sqrt{6(m^2 - m)}$.

2. Tìm tham số m để hàm số $y = x^4 - 4mx^2 + 1$ có cực đại $A(0;1)$ và cực tiểu B, C sao cho $|x_C - x_B| > \sqrt{2(2m - m^2)}$.

Ví dụ 10: Tìm tham số m để hàm số $y = \dfrac{2x^2 + 3x + m - 2}{x + 2}$ có điểm cực đại và cực tiểu tại các điểm có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn $|y(x_2) - y(x_1)| = 8$

Giải :

$$y = \frac{2x^2 + 3x + m - 2}{x + 2} = 2x - 1 + \frac{m}{x+2}$$

* Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$

* Với $x \neq -2, m \neq 0$, ta có

$$y' = 2 - \frac{m}{(x+2)^2} = \frac{2(x+2)^2 - m}{(x+2)^2} = \frac{g(x)}{(x+2)^2}, g(x) = 2(x+2)^2 - m$$

Đồ thị hàm số có cực đại , cực tiểu khi $y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt và y' đổi dấu khi x qua các nghiệm đó , khi đó phương trình $g\left(x\right) = 0$ có hai nghiệm phân biệt khác -2 $\Leftrightarrow \begin{cases} 2(x+2)^2 = m > 0 \\ 2(-2+2)^2 - m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > 0$

Khi đó ta có

$$\begin{cases} y\left(x_1\right) = 4x_1 + 3 \\ y\left(x_2\right) = 4x_2 + 3 \end{cases} \Rightarrow \left|y\left(x_2\right) - y\left(x_1\right)\right| = \left|(4x_2 + 3) - (4x_1 + 3)\right| = 4\left|x_2 - x_1\right|$$

$$\left|y\left(x_2\right) - y\left(x_1\right)\right| = 8 \Leftrightarrow 4\left|x_2 - x_1\right| = 8 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = 4 \ \left(1\right)$$

Mà $\begin{cases} x_1 + x_2 = -4 \\ x_1x_2 = \dfrac{8-m}{2} \end{cases} \left(2\right)$

Từ $\left(1\right)$ và $\left(2\right)$ suy ra $(-4)^2 - 4\left(\dfrac{8-m}{2}\right) - 4 = 0 \Leftrightarrow m = 2$

Bài tập tương tự :

1. Tìm tham số m để hàm số $y = \dfrac{1}{3}x^3 + \left(m-2\right)x^2 - 2$ có điểm cực đại và cực tiểu tại các điểm có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn $\left|y\left(x_2\right) - y\left(x_1\right)\right| < 2$.

2. Tìm tham số m để hàm số $y = \left(m+1\right)x^4 - 2\left(m-1\right)x^2$ có 2 điểm cực tiểu khác $O\left(0;0\right)$ và hoành độ x_1, x_2 của cực tiểu thỏa mãn $\left|y\left(x_2\right) + y\left(x_1\right)\right| > 1$.

Ví dụ 11 : Cho hàm số $y = \dfrac{x^2 + \left(m+1\right)x + m + 1}{x+1}$. Gọi A, B là hai điểm cực trị , định m để diện tích tam giác OAB bằng 2. Với giá trị m vừa tìm được , tính khoảng cách từ O đến đường thẳng AB.

Giải :

* Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $\left(-\infty;-1\right) \cup \left(-1;+\infty\right)$.

* Ta có $y' = \dfrac{x^2 + 2x}{\left(x+1\right)^2}, x \neq -1$

- Với $\forall m \in \mathbb{R}$ hàm số đã cho có điểm cực đại $A\left(-2; m-3\right)$ và điểm cực tiểu $B\left(0; m+1\right)$.
- Ta có :

$\overrightarrow{OA}\left(-2; m-3\right) \Rightarrow OA = \sqrt{m^2 - 6m + 13}, \overrightarrow{OB}\left(0; m+1\right) \Rightarrow OB = \left|m+1\right|$ và

$\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = -2.0 + \left(m-3\right)\left(m+1\right) = \left(m-3\right)\left(m+1\right)$. $\cos\widehat{AOB} = \dfrac{\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}}{OA.OB}$

$$\Rightarrow \sin\widehat{AOB} = \sqrt{1 - \cos^2\widehat{AOB}} = \frac{\sqrt{\left(OA.OB\right)^2 - \left(\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}\right)^2}}{OA.OB}$$

- Diện tích $dt_{\left(\Delta OAB\right)} = \dfrac{1}{2}OA.OB.\sin\widehat{AOB} = \dfrac{1}{2}\sqrt{\left(OA.OB\right)^2 - \left(\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}\right)^2}$

$$dt_{\left(\Delta OAB\right)} = \ldots = \left|m+1\right| \Rightarrow dt_{\left(\Delta OAB\right)} = 2 \Leftrightarrow \left|m+1\right| = 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -3 \\ m = 1 \end{array}\right.$$

- Gọi d là khoảng cách từ O đến đường thẳng AB khi đó $AB = 2\sqrt{5}$ và

$$dt_{\left(\Delta OAB\right)} = \frac{1}{2}d.AB \Rightarrow d = \frac{\left|m+1\right|}{\sqrt{5}}.$$

$+ \ m = -3 \Rightarrow d = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

$+ \ m = 1 \Rightarrow d = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

Bài tập tự luyện:

1. Định m để đồ thị của hàm số $y = -\dfrac{1}{3}mx^3 + \left(3m-1\right)x^2 - 4x - 2$ có cực trị A, B sao cho tam giác MAB diện tích bằng 1, biết $M\left(0;1\right)$.

2. Định m để đồ thị của hàm số $y = x^4 - 2m^2x^2 + 1$ có cực trị A, B, C sao cho tam giác ABC diện tích bằng 4.

Ví dụ 12 : Tìm tham số m để hàm số $y = x^4 - 2m^2x^2 + 1$ có 3 điểm cực trị là 3 đỉnh của một tam giác vuông cân.

Giải:

* Hàm số đã cho xác định và liên tục $\mathbb{R}$.

* Ta có $y' = 4x^3 - 4m^2x = 4x(x^2 - m^2)$.

Với $m \neq 0$ hàm số có ba cực trị .Khi đó tọa độ các điểm cực trị của đồ thị hàm số là: $A(0;1),\ B(m;1-m^4),\ C(-m;1-m^4)$.

Dễ thấy $AB = AC$ nên tam giác ABC vuông cân $\Leftrightarrow AB^2 + AC^2 = BC^2$

$\Leftrightarrow 2(m^2 + m^8) = 4m^2 \Leftrightarrow m = \pm 1$

Vậy $m = \pm 1$ là những giá trị cần tìm.

Bài tập tự luyện:

1. Tìm tham số m để hàm số $y = \dfrac{1}{3}x^3 - x^2 + \left(m-1\right)x + m$ có 2 điểm cực trị A, B sao cho ABO một tam giác vuông cân , với O là gốc tọa độ.

2. Tìm tham số m để hàm số $y = \dfrac{1}{4}x^4 - \dfrac{1}{2}\left(m-1\right)x^2 + m - 2$ có 3 điểm cực trị là 3 đỉnh của một tam giác vuông.

Ví dụ 13: Tìm m để đồ thị của hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 2m + m^4$ có cực đại , cực tiểu đồng thời các điểm cực trị lập thành tam giác đều.

Giải :

* Hàm số đã cho xác định và liên tục $\mathbb{R}$.

* Ta có $y' = 4x^3 - 4mx = 4x\left(x^2 - m\right)$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = m \quad \left(*\right) \end{array}\right.$$

Đồ thị hàm số có cực đại , cực tiểu khi $y' = 0$ có 3 nghiệm phân biệt và y' đổi dấu khi x qua các nghiệm đó , khi đó phương trình $\left(*\right)$ có hai nghiệm phân biệt khác $0 \Leftrightarrow m > 0$

$$\text{Khi đó : } y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \Rightarrow A\left(0; m^4 + 2m\right) \\ x = \pm\sqrt{m} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} B\left(-\sqrt{m}; m^4 - m^2 + 2m\right) \\ C\left(\sqrt{m}; m^4 - m^2 + 2m\right) \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Hàm số có 3 cực trị A, B, C lập thành tam giác đều

$$\Leftrightarrow \begin{cases} AB = AC \\ AB = BC \end{cases} \Leftrightarrow AB^2 = BC^2 \Leftrightarrow m + m^4 = 4m$$

$$\Leftrightarrow m\left(m^3 - 3\right) = 0 \Leftrightarrow m = \sqrt[3]{3}\left(m > 0\right)$$

Vậy $m = \sqrt[3]{3}$ là giá trị cần tìm .

Bài tập tự luyện:

1. Tìm m để đồ thị của hàm số $y = \dfrac{1}{4}x^4 - \dfrac{1}{2}\left(m-1\right)x^2 + m - m^2$ có cực đại , cực tiểu đồng thời các điểm cực trị lập thành tam giác đều.

2. Tìm m để đồ thị của hàm số $y = -x^3 + \frac{3}{2}m^2x^2$ có cực đại A, cực tiểu B đồng thời các điểm ABC cực trị lập thành tam giác đều, biết $C\left(-2;3\right)$.

Ví dụ 14: Tìm a để đồ thị của hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2 \quad \left(C\right)$ có điểm cực đại và điểm cực tiểu của đồ thị $\left(C\right)$ ở về hai phía khác nhau của đường tròn (phía trong và phía ngoài): $\left(C_a\right) : x^2 + y^2 - 2ax - 4ay + 5a^2 - 1 = 0$.

Giải :

* Hàm số đã cho xác định và liên tục $\mathbb{R}$.

* Ta có : $y' = 3x^2 - 6x$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \Rightarrow y = 2 \\ x = 2 \Rightarrow y = -2 \end{array}\right.$$

Cách 1:

Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị $A\left(0;2\right), B\left(2;-2\right)$. Hai điểm $A\left(0;2\right), B\left(2;-2\right)$ ở về hai phía của hai đường tròn $\left(C_a\right)$ khi

$$\Leftrightarrow P_{A/\left(C_a\right)}.P_{B/\left(C_a\right)} < 0 \Leftrightarrow \left(5a^2 - 8a + 3\right)\left(5a^2 + 4a + 7\right) < 0$$

$$\Leftrightarrow 5a^2 - 8a + 3 < 0 \Leftrightarrow \frac{3}{5} < a < 1$$

Cách 2 :

$\left(C_a\right) : \left(x - a\right)^2 + \left(y - 2a\right)^2 = 1$ có tâm $I\left(a;2a\right)$ và bán kính $R = 1$

Ta có : $IB = \sqrt{\left(a - 2\right)^2 + \left(2a + 2\right)^2} = \sqrt{5a^2 + 4a + 8}$

$IB = \sqrt{5\left(a + \frac{2}{5}\right)^2 + \frac{36}{5}} \geq \frac{6}{\sqrt{5}} > 1 = R \Rightarrow$ điểm B nằm ngoài $\left(C_a\right)$,

do đó điểm A nằm trong đường tròn

$\left(C_a\right) \Leftrightarrow IA < 1 \Leftrightarrow \sqrt{a^2 + \left(2 - 2a\right)^2} < 1 \Leftrightarrow 5a^2 - 8a + 3 < 0 \Leftrightarrow \frac{3}{5} < a < 1$

Bài tập tự luyện:

1. Tìm m để đồ thị của hàm số $y = -x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 1 \quad \left(C\right)$ có điểm cực đại và điểm cực tiểu của đồ thị $\left(C\right)$ ở về một phía khác nhau của đường tròn (phía trong hoặc phía ngoài): $\left(C_m\right) : x^2 + y^2 + mx + 2my + m^2 - 2 = 0$.

2. Tìm m để đồ thị của hàm số $y = x^3 + mx^2 + 2m - 1$ $\left(C_m\right)$ có điểm cực đại và điểm cực tiểu của đồ thị $\left(C_m\right)$ ở về hai phía khác nhau của đường tròn (phía trong và phía ngoài): $\left(C\right): x^2 + y^2 = 4$.

Ví dụ 15 : Tìm m để đồ thị của hàm số: $y = x^4 - 2mx^2 + m - 1$ có ba cực trị. Đồng thời các điểm cực trị $A, B,\ C$ của đồ thị tạo thành một tam giác có bán kính đường tròn ngoại tiếp bằng 1.

Giải :

* Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$.

* Ta có : $y' = 4x^3 - 4mx = 4x\left(x^2 - m\right)$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = m \end{array}\right.$$

Với $m > 0$: $y' = 0$ có ba nghiệm phân biệt và y' đổi dấu khi x đi qua các nghiệm đó.

* Khi đó ba điểm cực trị của đồ thị hàm số là: $A\left(0; m - 1\right)$, $B\left(-\sqrt{m}; -m^2 + m - 1\right)$, $C\left(\sqrt{m}; -m^2 + m - 1\right)$.

$AB = AC = \sqrt{m^4 + m}$, $BC = 2\sqrt{m}$ và $S_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{2}\left|y_B - y_A\right|.\left|x_C - x_B\right| = m^2\sqrt{m}$

$$R = \frac{AB.AC.BC}{4S_{\triangle ABC}} = 1 \Leftrightarrow \frac{\left(m^4 + m\right)2\sqrt{m}}{4m^2\sqrt{m}} = 1 \Leftrightarrow m^3 - 2m + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = \dfrac{\sqrt{5} - 1}{2} \end{array}\right.$$

Bài tập tương tự :

Tìm m để đồ thị của hàm số: $y = \dfrac{1}{4}x^4 - \dfrac{1}{2}mx^2 + m + 1$ có ba cực trị $A, B,\ C$ sao cho tam giác nội tiếp được trong đường tròn có bán kính $R = 1$.

Ví dụ 16: Tìm m để đồ thị của hàm số $y = x^3 - 3x^2 + m^2x + m$ có cực đại, cực tiểu và các điểm cực đại, cực tiểu của đồ thị hàm số đối xứng nhau qua đường thẳng : $d: y = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{5}{2}$.

Giải :

* Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$.

Cách 1 :

* Ta có $y' = 3x^2 - 6x + m^2 \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x + m^2 = 0$ (1).
hàm số có cực trị $\Leftrightarrow$ (1) có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2

$\Leftrightarrow \Delta' = 3(3 - m^2) > 0 \Leftrightarrow -\sqrt{3} < m < \sqrt{3}$.
phương trình đường thẳng d' đi qua các điểm cực trị là :

$y = (\frac{2}{3}m^2 - 2)x + \frac{1}{3}m^2 + m \Rightarrow$ các điểm cực trị là :

$A(x_1;(\frac{2}{3}m^2 - 2)x_1 + \frac{1}{3}m^2 + 3m)$, $\mathrm{B}(x_2;(\frac{2}{3}m^2 - 2)x_2 + \frac{1}{3}m^2 + 3m)$.
Gọi I là giao điểm của hai đường thẳng d và d'

$\Rightarrow I(\frac{2m^2 + 6m + 15}{15 - 4m^2}; \frac{11m^2 + 3m - 30}{15 - 4m^2})$.

A và B đối xứng qua d thì trước hết $d \perp d' \Leftrightarrow \frac{2}{3}m^2 - 2 = -2 \Leftrightarrow m = 0$ khi đó $I\left(1;-2\right)$ và $A\left(x_1;-2x_1\right)$; $B\left(x_2;-2x_2\right) \Rightarrow$ I là trung điểm của $AB \Rightarrow$ A và B đối xứng nhau qua d.
Vậy $m = 0$ là giá trị cần tìm.

Cách 2 :

* Hàm số đã cho xác định trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $y' = 3x^2 - 6x + m^2$.
Hàm số có cực đại , cực tiểu khi phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt $x_1, x_2 \Leftrightarrow \Delta' = 9 - 3m^2 > 0 \Leftrightarrow -\sqrt{3} < m < \sqrt{3}$.

Vi-ét, ta có $x_1 + x_2 = 2$, $x_1.x_2 = \frac{m^2}{3}$.

Gọi $A\left(x_1;y_1\right), B\left(x_2;y_2\right)$ là các điểm cực trị của đồ thị hàm số và I là trung điểm của đoạn AB.
Đường thẳng AB có hệ số góc

$$k_{AB} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{x_2^3 - x_1^3 - 3\left(x_2^2 - x_1^2\right) + m^2\left(x_2 - x_1\right)}{x_2 - x_1}$$

$$k_{AB} = \left(x_1 + x_2\right)^2 - x_1x_2 - 3\left(x_1 + x_2\right) + m^2$$

$$k_{AB} = 4 - \frac{m^2}{3} - 6 + m^2 = \frac{2m^2 - 6}{3}$$

Đường thẳng $y = \frac{1}{2}x - \frac{5}{2}\left(\Delta\right)$ có hệ số góc $k = \frac{1}{2}$

Hai điểm $A\left(x_1;y_1\right), B\left(x_2;y_2\right)$ đối xứng nhau qua đường thẳng $\left(\Delta\right)$

khi và chỉ khi $\begin{cases} AB \perp \Delta \\ I \in \Delta \end{cases}$

- $AB \perp \Delta \Leftrightarrow k_{AB}.k = -1 \Leftrightarrow \frac{1}{2}.\left(\frac{2m^2-6}{3}\right) = -1 \Leftrightarrow m = 0$
- $m = 0 \Rightarrow y' = 3x^2 - 6x$

$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = 0 \Rightarrow y_1 = 0 \Rightarrow A(0;0) \\ x_2 = 2 \Rightarrow y_2 = -4 \Rightarrow B(2;-4) \end{array}\right. \Rightarrow I(1;-2)$

Dễ thấy $I(1;-2) \in \Delta$

Vậy $m = 0$ thoả mãn yêu cầu bài toán .

Bài tập tương tự :

Tìm m để đồ thị của hàm số $y = x^3 + (m-4)x^2 - 4(m-1)x + 4m + 1$ có cực đại, cực tiểu và các điểm cực đại, cực tiểu của đồ thị hàm số đối xứng nhau qua đường thẳng : $d : y = x$.

Ví dụ 17: Tìm m để đồ thị của hàm số $y = \frac{x^2 + mx}{1 - x}$ có cực trị và khoảng cách giữa hai điểm cực trị bằng 10 .

Giải :

* Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

* Ta có $y' = \frac{-x^2 + 2x + m}{(1-x)^2}$

$y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - m = 0 \ (1) \quad (x \neq 1)$

Đồ thị hàm số có cực trị $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 1 + m > 0 \\ 1 - 2 - m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > -1$.

Đường thẳng đi qua các điểm cực trị có phương trình $y = -2x - m \Rightarrow$ các điểm cực trị là: $A(x_1; -2x_1 - m)$, $B(x_2; -2x_2 - m)$

$\Rightarrow AB^2 = 5(x_1 - x_2)^2 = 100 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 - 20 = 0$

$\Leftrightarrow 4 + 4m - 20 = 0 \Leftrightarrow m = 4$.

Vậy $m = 4$ là giá trị cần tìm.

Bài tập tương tự :

1. Tìm m để đồ thị của hàm số $y = \frac{mx^2 + x - m + 1}{x - 1}$ có cực trị và khoảng cách giữa hai điểm cực trị bằng $\sqrt{3}$.

2. Tìm m để đồ thị của hàm số $y = x^3 - mx^2 + x - 5m + 1$ có cực trị và khoảng cách giữa hai điểm cực trị bé hơn $\sqrt{2}$.

Ví dụ 18: Tìm giá trị của m để đồ thị hàm số $y = f(x) = \dfrac{x^2 + 2mx + 2}{x + 1}$ có điểm cực đại, điểm cực tiểu và khoảng cách từ hai điểm đó đến đường thẳng $\Delta : x + y + 2 = 0$ bằng nhau.

Giải :

* Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

* Ta có $y' = \dfrac{x^2 + 2x + 2m - 2}{(x + 1)^2}, x \neq -1$

Hàm số có cực đại , cực tiểu khi $f'(x)$ đổi dấu hai lần qua nghiệm x hay phương trình $g(x) = x^2 + 2x + 2m - 2 = 0$ có hai nghiệm phân biệt khác -1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ g(-1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 - 2m > 0 \\ 2m - 3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < \frac{3}{2}$$

Gọi $A(x_1; y_1 = 2x_1 + 2m), B(x_2; y_2 = 2x_2 + 2m)$ là các điểm cực trị của đồ thị hàm số thì x_1, x_2 là nghiệm của phương trình $g(x) = 0, x \neq 1$. Theo định lý Vi ét $x_1 + x_2 = -2,\ x_1.x_2 = -2m$

Theo yêu cầu bài toán $d(A, \Delta) = d(B, \Delta) \Leftrightarrow \dfrac{|x_1 + y_1 + 2|}{\sqrt{2}} = \dfrac{|x_2 + y_2 + 2|}{\sqrt{2}}$

$$\Leftrightarrow |3x_1 + 2m + 2| = |3x_2 + 2m + 2| \Leftrightarrow (3x_1 + 2m + 2)^2 = (3x_2 + 2m + 2)^2$$

$$\Leftrightarrow (3x_1 + 2m + 2)^2 - (3x_2 + 2m + 2)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x_1 - x_2)\left[3(x_1 + x_2) + 4m + 4\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow 3(x_1 + x_2) + 4m + 4 = 0 \quad (x_1 \neq x_2) \Leftrightarrow 3(-2) + 4m + 4 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{1}{2}$$

So với điều kiện, vậy $m = \dfrac{1}{2}$ là giá trị cần tìm .

Bài tập tương tự :

1. Tìm giá trị của m để đồ thị hàm số $y = \dfrac{x^2 + 2mx - 3m + 1}{x - 2}$ có điểm cực đại, điểm cực tiểu và khoảng cách từ hai điểm đó đến đường thẳng $\Delta : 2x - y = 0$ bằng nhau.

2. Tìm giá trị của m để đồ thị hàm số $y = x^3 - \left(3m+1\right)x^2 - 2m + 3$ có điểm cực đại, điểm cực tiểu và khoảng cách từ cực đại đến đường thẳng $\left(d\right) : 2x - 3y = 0$ nhỏ hơn $\sqrt{11}$.

Ví dụ 19: Tìm giá trị của m để đồ thị hàm số $y = \dfrac{x^2 + mx + 2}{x - 1}$ có điểm cực tiểu nằm trên Parabol $\left(P\right) : y = x^2 + x - 4$

Giải :

* Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $D = \mathbb{R} \setminus \left\{1\right\}$

* Ta có $y' = \dfrac{x^2 - 2x - m - 2}{\left(x-1\right)^2}, x \neq 1$. Đặt $g\left(x\right) = x^2 - 2x - m - 2$.

Hàm số có cực đại , cực tiểu khi phương trình $g\left(x\right) = 0$ có hai nghiệm phân biệt khác 1 $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 1 - \left(-m-2\right) > 0 \\ g\left(1\right) = -m - 3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m + 3 > 0 \\ m \neq -3 \end{cases} \Leftrightarrow m > -3$

Khi đó : $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = 1 - \sqrt{m+3} \Rightarrow y_1 = m + 2 - 2\sqrt{m+3} \\ x_2 = 1 + \sqrt{m+3} \Rightarrow y_2 = m + 2 + 2\sqrt{m+3} \end{array}\right.$

Bảng xét dấu :

x	$-\infty$		x_1		1		x_2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

Dựa vào bảng xét dấu suy ra $A\left(1 + \sqrt{m+3}; m + 2 + 2\sqrt{m+3}\right)$ là điểm cực tiểu của đồ thị hàm số .

$A \in \left(P\right) \Leftrightarrow m + 2 + 2\sqrt{m+3} = \left(1 + \sqrt{m+3}\right)^2 + 1 + \sqrt{m+3} - 4$

$\Leftrightarrow \sqrt{m+3} = 1 \Leftrightarrow m = -2$

So với điều kiện bài toán, ta có $m = -2$ là giá trị cần tìm.

Bài tập tương tự :

1. Tìm giá trị của m để đồ thị hàm số $y = \dfrac{1}{3}x^3 - \dfrac{1}{2}mx^2 + 2\left(m-2\right)x$ có điểm cực tiểu nằm trên đường thẳng $\left(d\right) : y = \dfrac{5}{6}x$.

2. Tìm giá trị của m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 3(m+1)x^2 + 3m - 2$ có điểm cực tiểu nằm trên Parabol $(P): y = x^2$.

Ví dụ 20: Tìm giá trị của m để đồ thị hàm số $y = -x^3 + 3(m+1)x^2 - (3m^2 + 7m - 1)x + m^2 - 1$ có điểm cực tiểu tại một điểm có hoành độ nhỏ hơn 1.

Giải :

* Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$.

* Ta có $y' = -3x^2 + 6(m+1)x - (3m^2 + 7m - 1)$.

Hàm số đạt cực tiểu tại một điểm có hoành độ nhỏ hơn 1

$\Leftrightarrow y' = -3x^2 + 6(m+1)x - (3m^2 + 7m - 1) = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thoả mãn điều kiện :

$$\left[\begin{array}{ll} x_1 < 1 < x_2 & (1) \\ x_1 < x_2 \le 1 & (2) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (1) \Leftrightarrow -3.y'(1) < 0 \\ (2) \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ -3.y'(1) \ge 0 \\ \dfrac{S}{2} < 1 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3(3m^2 + m - 4) < 0 \\ \begin{cases} 9(m+1)^2 - 3(3m^2 + 7m - 1) > 0 \\ 3(3m^2 + m - 4) \ge 0 \\ m + 1 < 1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -\dfrac{4}{3} < m < 1 \\ \begin{cases} -3m + 12 > 0 \\ 3m^2 + m - 4 \ge 0 \\ m < 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -\dfrac{4}{3} < m < 1 \\ \begin{cases} m < 4 \\ m \le -\dfrac{4}{3} \vee m \ge 1 \\ m < 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -\dfrac{4}{3} < m < 1 \\ m \le -\dfrac{4}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow m < 1$$

Bài tập tương tự :

1. Tìm giá trị của m để đồ thị hàm số $y = mx^3 - 3mx^2 + (m+1)x - 4$ có điểm cực tiểu tại một điểm có hoành độ âm.

2. Tìm giá trị của m để đồ thị hàm số $y = \frac{1}{3}(m-1)x^3 - \frac{1}{2}(m-1)x^2 + 2m + 3$ có điểm cực tiểu tại một điểm có hoành độ lớn hơn 2.

Ví dụ 21: Tìm giá trị của m để đồ thị hàm số $y = \dfrac{x^2 - \left(m+1\right)x - m^2 + 4m - 2}{x-1}$. có cực trị đồng thời tích các giá trị cực đại và cực tiểu đạt giá trị nhỏ nhất.

Giải :

* Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $D = \mathbb{R} \setminus \left\{1\right\}$.

* Ta có $y' = \dfrac{x^2 - 2x + m^2 - 3m + 3}{\left(x-1\right)^2} = \dfrac{g\left(x\right)}{\left(x-1\right)^2}, x \neq 1$

$g\left(x\right) = x^2 - 2x + m^2 - 3m + 3$

Hàm số có cực đại , cực tiểu khi phương trình $g\left(x\right) = 0, x \neq 1$

có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 khác 1.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ g\left(1\right) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -m^2 + 3m - 2 > 0 \\ m^2 - 3m + 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < m < 2$$

Gọi $A\left(x_1; y_1\right), B\left(x_2; y_2\right)$ là các điểm cực trị của đồ thị hàm số thì x_1, x_2 là nghiệm của phương trình $g\left(x\right) = 0, x \neq 1$.

Khi đó $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = 1 - \sqrt{-m^2 + 3m - 2} \Rightarrow y_1 = 1 - m + 2\sqrt{-m^2 + 3m - 2} \\ x_2 = 1 + \sqrt{-m^2 + 3m - 2} \Rightarrow y_2 = 1 - m - 2\sqrt{-m^2 + 3m - 2} \end{array}\right.$

$$y_1.y_2 = \left(1 - m + 2\sqrt{-m^2 + 3m - 2}\right)\left(1 - m - 2\sqrt{-m^2 + 3m - 2}\right)$$

$$y_1.y_2 = \left(1-m\right)^2 - 4\left(-m^2 + 3m - 2\right)$$

$$y_1.y_2 = 5m^2 - 14m + 9 = 5\left(m - \frac{7}{5}\right)^2 - \frac{4}{5} \geq -\frac{4}{5}$$

$$\Rightarrow \min y_1.y_2 = -\frac{4}{5} \; khi \; m = \frac{7}{5}$$

So với điều kiện , vậy $m = \dfrac{7}{5}$ là giá trị cần tìm .

Bài tập tương tự :

1. Tìm giá trị của m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + m^2 + 4m - 2$ có cực trị đồng thời tích các giá trị cực đại và cực tiểu đạt giá trị nhỏ nhất.

2. Tìm giá trị của m để đồ thị hàm số $y = -x^3 + \frac{3}{2}x^2 + m^2 - m + 1$ có cực trị đồng thời tích các giá trị cực đại và cực tiểu đạt giá trị lớn nhất.

Ví dụ 22: Tìm các hệ số a, b, c, d sao cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ đạt cực tiểu tại điểm $x = 0, f(0) = 0$ và đạt cực đại tại điểm $x = 1, f(1) = 1$.

Giải :

* Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$.

* Ta có $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$, $f''(x) = 6ax + 2b$

- Hàm số $f(x)$ đạt cực tiểu tại $x = 0$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases} f'(0) = 0 \\ f''(0) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ 2b > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ b > 0 \end{cases} (1).$$

- Hàm số $f(x)$ đạt cực đại tại $x = 1$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases} f'(1) = 0 \\ f''(1) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a + 2b + c = 0 \\ 6a + 2b < 0 \end{cases} (2)$$

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(1) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d = 0 \\ a + b + c + d = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = 0 \\ a + b + c = 1 \end{cases} \quad (3).$$

Từ $(1),(2),(3)$ suy ra $a = -2, b = 3, c = 0, d = 0$.

Ta kiểm tra lại $f(x) = -2x^3 + 3x^2$

Ta có $f'(x) = -6x^2 + 6x$, $f''(x) = -12x + 6$

$f''(0) = 6 > 0$. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$

$f''(1) = -6 < 0$. Hàm số đạt cực đại tại $x = 1$

Vậy : $a = -2, b = 3, c = 0, d = 0$.

Bài tập tự luyện:

1. Tìm các hệ số a, b, c sao cho hàm số $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ đạt cực trị bằng 0 tại điểm $x = -2$ và đồ thị của hàm số đi qua điểm $A(1;0)$.

2. Tìm các hệ số a, b sao cho hàm số $f(x) = \dfrac{ax^2 + bx + ab}{ax + b}$ đạt cực trị tại điểm $x = 0$ và $x = 4$.

Dạng 4 : Ứng dụng cực trị của hàm số trong bài toán đại số .

Ví dụ : Tìm tất cả các giá trị thực của m để phương trình sau có một số lẻ nghiệm thực: $(3x^2 - 14x + 14)^2 - 4(3x - 7)(x - 1)(x - 2)(x - 4) = m$.

Giải :

$f(x) = (x-1)(x-2)(x-4) = x^3 - 7x^2 + 14x - 8$

$g(x) = (3x^2 - 14x + 14)^2 - 4(3x-7)f(x)$

$g(x)$ là đa thức bậc 4 với hệ số của x^4 là -3.

$f'(x) = 3x^2 - 14x + 14$

$g'(x) = 2(3x^2 - 14x + 14)(6x - 14) - 12f(x) - 4(3x-7)f'(x) = -12f(x)$

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1;\ x = 2;\ x = 4.$

$g(1) = 9;\ g(2) = 4;\ g(4) = 36.$

Bảng biến thiên của $g(x)$.

x	$-\infty$		1		2		4		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	9	$\searrow$	4	$\nearrow$	36	$\searrow$	$-\infty$

Từ bảng biến thiên cho thấy phương trình $g(x) = m$ có một số lẻ nghiệm khi và chỉ khi: $m = 4;\ m = 9;\ m = 36.$