Bài 4 : GIÁ TRỊ LỚN NHẤT GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ.

4.1 TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Định nghĩa*:* Cho hàm số xác định trên D

- Số M gọi là giá trị lớn nhất (GTLN) của hàm số $y = f\left(x\right)$ trên D

nếu $\begin{cases} f(x) \le M \ \forall x \in D \\ \exists x_0 \in D : f(x_0) = M \end{cases}$, ta kí hiệu $M = \max\limits_{x \in D} f(x)$.

- Số m gọi là giá trị nhỏ nhất (GTNN) của hàm số $y = f\left(x\right)$ trên D

nếu $\begin{cases} f(x) \ge M \ \forall x \in D \\ \exists x_0 \in D : f(x_0) = m \end{cases}$, ta kí hiệu $m = \min\limits_{x \in D} f(x)$.

2. Phương pháp tìm GTLN, GTNN của hàm số

Phương pháp chung: Để tìm GTLN, GTNN của hàm số $y = f\left(x\right)$ trên D ta tính y', tìm các điểm mà tại đó đạo hàm triệt tiêu hoặc không tồn tại và lập bảng biến thiên. Từ bảng biến thiên ta suy ra GTLN, GTNN.

***Chú ý*:**

- Nếu hàm số $y = f\left(x\right)$ luôn tăng hoặc luôn giảm trên $\left[a;b\right]$

thì $\max\limits_{[a;b]} f(x) = \max\{f(a), f(b)\}; \ \min\limits_{[a;b]} f(x) = \min\{f(a), f(b)\}$.

- Nếu hàm số $y = f\left(x\right)$ liên tục trên $\left[a;b\right]$ thì luôn có GTLN, GTNN trên đoạn đó và để tìm GTLN, GTNN ta làm như sau

* Tính y' và tìm các điểm $x_1, \ x_2, ..., x_n$ mà tại đó y' triệt tiêu hoặc hàm số không có đạo hàm.

* Tính các giá trị $f(x_1), f(x_2), ..., f(x_n), f(a), f(b)$.Khi đó

\+ $\max\limits_{x \in \left[a;b\right]} f\left(x\right) = \max\limits_{x \in \left[a;b\right]} \left\{f\left(a\right), f\left(x_1\right), f\left(x_2\right) ... f\left(x_i\right), f\left(b\right)\right\}$

\+ $\min\limits_{x \in \left[a;b\right]} f\left(x\right) = \min\limits_{x \in \left[a;b\right]} \left\{f\left(a\right), f\left(x_1\right), f\left(x_2\right) ... f\left(x_i\right), f\left(b\right)\right\}$

- Nếu hàm số $y = f\left(x\right)$ là hàm tuần hoàn chu kỳ T thì để tìm GTLN, GTNN của nó trên D ta chỉ cần tìm GTLN, GTNN trên một đoạn thuộc D có độ dài bằng T.

* Cho hàm số $y = f\left(x\right)$ xác định trên D. Khi đặt ẩn phụ $t = u(x)$, ta tìm được $t \in E$ với $\forall x \in D$, ta có $y = g\left(t\right)$ thì Max, Min của hàm f trên D chính là Max, Min của hàm g trên E.

* Khi bài toán yêu cầu tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất mà không nói trên tập nào thì ta hiểu là tìm GTLN, GTNN trên tập xác định của hàm số.
* Ngoài phương pháp khảo sát để tìm Max, Min ta còn dùng phương pháp miền giá trị hay Bất đẳng thức để tìm Max, Min.

4.2 DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

Ví dụ 1 : Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của các hàm số:

1. $y = \dfrac{3x-1}{x-3}$ trên đoạn $\left[0;2\right]$.
2. $y = (x-6)\sqrt{x^2+4}$ trên đoạn $\left[0;3\right]$.
3. $y = x^6 + 4\left(1-x^2\right)^3$ trên đoạn $\left[-1;1\right]$.
4. $y = \sqrt{-x^2+5x+6}$ trên đoạn $[-1;\ 6]$.

Giải :

1. $y = \dfrac{3x-1}{x-3}$

* Hàm số đã cho xác định và liên tục trên đoạn $\left[0;2\right]$.
* Ta có $y' = \dfrac{-8}{\left(x-3\right)^2} < 0, \forall x \in \left[0;2\right]$
* Bảng biến thiên

x	0		2
y'		$-$	
y	$\frac{1}{3}$	$\searrow$	-5

Từ bảng biến thiên suy ra :

$\max\limits_{\left[0;2\right]} f\left(x\right) = \dfrac{1}{3}$ $khi\ \ x = 0$ $\qquad$ $\min\limits_{\left[0;2\right]} f\left(x\right) = -5$ $khi\ \ x = 2$

2. $y = (x-6)\sqrt{x^2+4}$

* Hàm số đã cho xác định và liên tục trên đoạn $\left[0;3\right]$.
* Ta có : $y' = \dfrac{2x^2-6x+4}{\sqrt{x^2+4}}, x \in \left[0;3\right]$

$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 2 \end{array}\right.$

$\left.\begin{array}{l} y(1) = -5\sqrt{5} \\ y(0) = -12 \\ y(2) = -8\sqrt{2} \\ y(3) = -3\sqrt{13} \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \max\limits_{x\in[0;3]} y = -3\sqrt{13} \\ \min\limits_{x\in[0;3]} y = -12 \end{array}\right.$

Vậy $\max\limits_{x\in[0;3]} y = -3\sqrt{13}$ khi $x = 3$, $\min\limits_{x\in[0;3]} y = -12$ khi $x = 0$.

3. $y = x^6 + 4\left(1 - x^2\right)^3$

* Hàm số đã cho xác định và liên tục trên đoạn $\left[-1;1\right]$.

Đặt $t = x^2, x \in \left[-1;1\right] \Rightarrow t \in \left[0;1\right]$

Hàm số đã cho viết lại $f\left(t\right) = t^3 + 4\left(1 - t\right)^3, t \in \left[0;1\right]$

* Ta có $f'\left(t\right) = 3t^2 - 12\left(1 - t\right)^2 = 3\left(-3t^2 + 8t - 4\right)$

$f'\left(t\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \frac{2}{3}, f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{9} \\ t = 2 \end{array}\right.$

$f\left(0\right) = 4, f\left(1\right) = 1$

* Bảng biến thiên

t	0		$\frac{2}{3}$		1
$f'\left(t\right)$		$-$	0	$+$	
$f\left(t\right)$	4	$\searrow$	$\frac{4}{9}$	$\nearrow$	1

Từ bảng biến thiên suy ra :

$\max\limits_{[-1;1]} f\left(x\right) = 4 \;\; khi \;\; x = 0 \qquad \min\limits_{[-1;1]} f\left(x\right) = \frac{4}{9} \;\; khi \;\; x = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$

4. $y = \sqrt{-x^2 + 5x + 6}$

* Hàm số đã cho xác định và liên tục trên đoạn $[-1;\ 6]$.

* Ta có $y' = \dfrac{-2x+5}{2\sqrt{-x^2+5x+6}}$

$y' = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{5}{2} \in [-1;\ 6]$

$y(-1) = y(6) = 0,\ y\left(\dfrac{5}{2}\right) = \dfrac{7}{2}$.

Vậy : $\min\limits_{x\in[-1;6]} y = 0\ \ khi\ \ x = -1, x = 6$ và $\max\limits_{x\in[-1;6]} y = \dfrac{7}{2}\ \ khi\ \ x = \dfrac{5}{2}$.

Ví dụ 2 : Tìm giá trị lớn nhất của các hàm số: $y = \dfrac{x+\sqrt{1+9x^2}}{8x^2+1}, x > 0$.

Giải :

* Hàm số đã cho xác định và liên tục trên khoảng $(0;+\infty)$

$$y = \frac{x+\sqrt{9x^2+1}}{8x^2+1} = \frac{9x^2+1-x^2}{(8x^2+1)\left(\sqrt{9x^2+1}-x\right)} = \frac{1}{\sqrt{9x^2+1}-x}$$

Hàm số đạt giá trị lớn nhất trên khoảng $(0;+\infty)$ khi hàm số

$f(x) = \sqrt{9x^2+1}-x$ đạt giá trị nhỏ nhất trên khoảng $(0;+\infty)$.

$$f'(x) = \frac{9x}{\sqrt{9x^2+1}} - 1$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{9x^2+1} = 9x \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ 72x^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1}{6\sqrt{2}}$$

$$\min_{x>0} f(x) = \frac{2\sqrt{2}}{3} \text{ khi } x = \frac{1}{6\sqrt{2}} \Rightarrow \max_{x>0} y = \frac{1}{\frac{2\sqrt{2}}{3}} = \frac{3\sqrt{2}}{4} \text{ khi } x = \frac{1}{6\sqrt{2}}.$$

Ví dụ 3: Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của các hàm số:

1. $y = x + \sqrt{4-x^2}$ trên đoạn $[-2;2]$.
2. $y = \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}$ trên đoạn $x \in [-1;2]$.

Giải :

1. $y = x + \sqrt{4-x^2}$

* Hàm số đã cho xác định và liên tục trên đoạn $[-2;2]$.

* Ta có $y' = 1 - \dfrac{x}{\sqrt{4-x^2}} = \dfrac{\sqrt{4-x^2} - x}{\sqrt{4-x^2}}, x \in (-2;2)$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{4-x^2} - x = 0 \\ x \in (-2;2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{4-x^2} = x \\ x \in (-2;2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 2 \\ 4 - x^2 = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 2 \\ x^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = \sqrt{2}$$

Bảng biến thiên

x	-2		$\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$
y'	$\|$	$-$	0	$+$	$\|$
y	-2	$\searrow$	$2\sqrt{2}$	$\nearrow$	2

Từ bảng biến thiên , ta được

$\max\limits_{x\in[-2;2]} f(x) = 2\sqrt{2}\ \ khi\ \ x = \sqrt{2}$ $\qquad$ $\min\limits_{x\in[-2;2]} f(x) = -2\ \ khi\ \ x = -2$

2. $y = \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}$ trên đoạn $x \in [-1;2]$.

* Hàm số đã cho xác định và liên tục trên đoạn $[-1;2]$.

* Ta có $y' = \dfrac{-x+1}{\sqrt{(x^2+1)^3}} \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow x = 1$

* Bảng biến thiên .

x	-1		1		2
y'		$+$	0	$-$	
y	0	$\nearrow$	$\sqrt{2}$	$\searrow$	$\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$

Từ bảng biến thiên , ta được

$\max\limits_{x\in[-1;2]} y = \sqrt{2}\ \ khi\ \ x = 1$ $\qquad$ $\min\limits_{x\in[-1;2]} y = 0\ \ khi\ \ x = -1$

Ví dụ 4 : Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số
$y = \left|x^3 - 3x^2 + 1\right|$ trên đoạn $[-2;1]$.

Giải :

* Hàm số đã cho xác định và liên tục trên đoạn $\left[-2;1\right]$.

Đặt $g\left(x\right) = x^3 - 3x^2 + 1, x \in \left[-2;1\right]$

$g'\left(x\right) = 3x^2 - 6x.$

$g'\left(x\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \notin \left[-2;1\right] \end{array}\right.$

$g\left(-2\right) = -19, g\left(0\right) = 1, g\left(1\right) = -1$, suy ra $\max\limits_{\left[-2;1\right]} g\left(x\right) = 1, \min\limits_{\left[-2;1\right]} g\left(x\right) = -19$.

$x \in \left[-2;1\right] \Rightarrow g\left(x\right) \in \left[-19;1\right] \Rightarrow f\left(x\right) = \left|g\left(x\right)\right| \in \left[0;19\right]$.

$g\left(0\right).g\left(1\right) < 0 \Rightarrow \exists x_1 \in \left(0;1\right)$ sao cho $g\left(x_1\right) = 0$.

Vậy $\max\limits_{\left[-2;1\right]} f\left(x\right) = 19, \min\limits_{\left[-2;1\right]} f\left(x\right) = 0$.

Ví dụ 5:

1. Tìm a để giá trị lớn nhất của hàm số $y = \left|x^2 + 2x + a - 4\right|$ trên đoạn $\left[-2;1\right]$ đạt giá trị nhỏ nhất .
2. Tìm giá trị p, q để giá trị lớn nhất của hàm số $y = \left|x^2 + px + q\right|$ trên đoạn $\left[-1;1\right]$ là bé nhất .

Giải :

1.

* Hàm số đã cho xác định và liên tục trên đoạn $\left[-2;1\right]$.

$y = \left|x^2 + 2x + a - 4\right| = \left|\left(x+1\right)^2 + a - 5\right|$

Đặt $t = \left(x+1\right)^2, x \in \left[-2;1\right] \Rightarrow t \in \left[0;4\right]$

Ta có $f\left(t\right) = \left|t + a - 5\right|, t \in \left[0;4\right]$

$\max\limits_{x \in \left[-2;1\right]} y \Leftrightarrow \max\limits_{t \in \left[0;4\right]} f\left(t\right) = \max\limits_{t \in \left[0;4\right]} \left\{f\left(0\right), f\left\{4\right\}\right\} = \max\limits_{t \in \left[0;4\right]} \left\{\left|a-5\right|, \left|a-1\right|\right\}$

- $\left|a-5\right| \ge \left|a-1\right| \Leftrightarrow a \le 3 \Rightarrow \max\limits_{t \in \left[0;4\right]} f\left(t\right) = \left|a-5\right| = 5 - a$
- $\left|a-5\right| \le \left|a-1\right| \Leftrightarrow a \ge 3 \Rightarrow \max\limits_{t \in \left[0;4\right]} f\left(t\right) = \left|a-1\right| = a - 1$

Mặt khác $\begin{cases} 5-a \ge 5-3 = 2, \forall a \le 3 \\ a-1 \ge 3-1 = 2, \forall a \ge 3 \end{cases} \Rightarrow \max\limits_{t\in[0;4]} f\left(t\right) \ge 2, \forall a \in \mathbb{R}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của $\max\limits_{t\in[0;4]} f\left(t\right) = 2 \ khi \ a = 3$

2. Xét hàm số $f\left(x\right) = x^2 + px + q$

* Hàm số đã cho xác định và liên tục trên đoạn $\left[-1;1\right] \Rightarrow y = \left|f\left(x\right)\right|$

$f\left(-1\right) = 1 - p + q, f\left(0\right) = q, f\left(1\right) = 1 + p + q$

Giả sử $\max y = f\left(\alpha\right)$

$\Rightarrow \left|f(1)\right| + \left|f(0)\right| \ge \left|f(1) - f(0)\right| = \left|1+p\right|$, $\left|f(-1)\right| + \left|f(0)\right| \ge \left|f(-1) - f(0)\right| = \left|1-p\right|$

$\bullet p > 0 \Rightarrow \left|1+p\right| > 1 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \left|f(1)\right| > \dfrac{1}{2} \\ \left|f(0)\right| > \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Rightarrow f\left(\alpha\right) > \dfrac{1}{2}$

$\bullet p < 0 \Rightarrow \left|1-p\right| > 1 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} f(-1) > \dfrac{1}{2} \\ f(0) > \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Rightarrow f\left(\alpha\right) > \dfrac{1}{2}$

$\max\limits_{x\in[-1;1]} y = \max\left\{\left|f(-\dfrac{p}{2})\right|; \left|f(-1)\right|; \left|f(1)\right|\right\}$

$\bullet p = 0 \Rightarrow f\left(x\right) = x^2 + q, f\left(0\right) = f\left(-\dfrac{p}{2}\right) = q, f\left(-1\right) = f\left(1\right) = 1 + q$

Giá trị lớn nhất của y là một trong hai giá trị $\left|q\right|; \left|1+q\right|$

$\bullet q > -\dfrac{1}{2} \Rightarrow \left|1+q\right| > \dfrac{1}{2} \Rightarrow \left|f(\pm 1)\right| > \dfrac{1}{2} \Rightarrow f(\alpha) > \dfrac{1}{2}$

$\bullet q < -\dfrac{1}{2} \Rightarrow \left|q\right| > \dfrac{1}{2} \Rightarrow \left|f(0)\right| > \dfrac{1}{2} \Rightarrow f(\alpha) > \dfrac{1}{2}$

$\bullet q = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow \left|f\left(x\right)\right| = \left|x^2 - \dfrac{1}{2}\right| \le \dfrac{1}{2} \Rightarrow \max f(x) = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x = 0; x = \pm 1$

cũng là giá trị nhỏ nhất của $f\left(\alpha\right)$.

Vậy $p = 0, q = -\dfrac{1}{2}$ thoả mãn bài toán .

Ví dụ 6 : Tìm các giá trị a,b sao cho hàm số $y=\dfrac{ax+b}{x^2+1}$ có giá trị lớn nhất bằng 4 và có giá trị nhỏ nhất bằng -1.

Giải :

* Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$.

- Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 4 khi và chỉ khi

$$\begin{cases}\dfrac{ax+b}{x^2+1}\le 4,\forall x\in\mathbb{R}\\ \exists x_0\in\mathbb{R}:\dfrac{ax_0+b}{x_0^2+1}=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4x^2-ax+4-b\ge 0,\forall x\in\mathbb{R}\\ 4x_0^2-ax_0+4-b=0:\text{có nghiệm } x_0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta=a^2-16\left(4-b\right)\le 0\\ \Delta=a^2-16\left(4-b\right)\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow a^2+16b-64=0\ \left(*\right)$$

- Hàm số có giá trị nhỏ nhất bằng 1 khi và chỉ khi

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{ax+b}{x^2+1}\ge -1,\forall x\in\mathbb{R}\\ \exists x_0\in\mathbb{R}:\dfrac{ax_0+b}{x_0^2+1}=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+ax+b+1\ge 0,\forall x\in\mathbb{R}\\ x_0^2+ax_0+b+1=0:\text{có nghiệm } x_0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta=a^2-4\left(b+1\right)\le 0\\ \Delta=a^2-4\left(b+1\right)\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow a^2-4b-4=0\quad\left(**\right)$$

Từ $\left(*\right)$ và $\left(**\right)$ ta có hệ

$$\begin{cases}a^2+16b-64=0\ \left(*\right)\\ a^2-4b-4=0\quad\left(**\right)\end{cases}\Leftrightarrow\Leftrightarrow\begin{cases}a^2=16\\ b=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-4\\ b=3\end{cases}\vee\begin{cases}a=4\\ b=3\end{cases}$$

Vậy giá trị a,b cần tìm là : $\begin{cases}a=-4\\ b=3\end{cases}\vee\begin{cases}a=4\\ b=3\end{cases}$

Ví dụ 7 : Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của các hàm số:

1. $y=\sin^4 x+\cos^2 x+2$
2. $y=x-\sin 2x$ trên đoạn $\left[-\dfrac{\pi}{2};\pi\right]$
3. $y=\dfrac{\sin x+1}{\sin^2 x+\sin x+1}$
4. $y=\dfrac{\sin^6 x\left|\cos x\right|+\cos^6 x\left|\sin x\right|}{\left|\sin x\right|+\left|\cos x\right|}$

Giải :

1. $y = \sin^4 x + \cos^2 x + 2$

$y = \sin^4 x + \cos^2 x + 2 = \sin^4 x - \sin^2 x + 3$

* Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$.

Đặt $t = \sin^2 x, 0 \le t \le 1$

Xét hàm số $f\left(t\right) = t^2 - t + 3$ liên tục trên đoạn $\left[0;1\right]$

Ta có $f'\left(t\right) = 2t - 1,\ t \in \left[0;1\right]$

$f'\left(t\right) = 0 \Leftrightarrow t = \dfrac{1}{2}$

$f\left(0\right) = f\left(1\right) = 3\ ,\ f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{11}{4}$

$\min y = \min\limits_{t\in\left[0;1\right]} f\left(t\right) = \dfrac{11}{4} = 2\dfrac{3}{4}$ $\qquad \max y = \max\limits_{t\in\left[0;1\right]} f\left(t\right) = 3$

2. $y = x - \sin 2x$ trên đoạn $\left[-\dfrac{\pi}{2};\pi\right]$

* Hàm số đã cho xác định và liên tục trên đoạn đoạn $\left[-\dfrac{\pi}{2};\pi\right]$

Ta có : $f'\left(x\right) = 1 - 2\cos 2x, -\dfrac{\pi}{2} < x < \pi$

$f'\left(x\right) = 0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{6}, \dfrac{5\pi}{6}$

$f\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) = -\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}; f\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{\pi}{6} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$f\left(\dfrac{5\pi}{6}\right) = \dfrac{5\pi}{6} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}; f\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) = -\dfrac{\pi}{2}; f\left(\pi\right) = \pi$

Vậy:

$\max\limits_{x\in\left[-\frac{\pi}{2};\pi\right]} y = \dfrac{5\pi}{6} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\ \ khi\ \ x = \dfrac{5\pi}{6}$

$\min\limits_{x\in\left[-\frac{\pi}{2};\pi\right]} y = -\dfrac{\pi}{2}\ \ khi\ \ x = -\dfrac{\pi}{2}$

3. $y = \dfrac{\sin x + 1}{\sin^2 x + \sin x + 1}$

Đặt $t = \sin x \Rightarrow f\left(t\right) = \dfrac{t+1}{t^2+t+1},\ t \in [-1;\ 1]$

$f\left(t\right) = \dfrac{t+1}{t^2+t+1}$ liên tục trên đoạn $[-1;\ 1]$

$f^{/}\left(t\right) = \dfrac{-t^2-2t}{(t^2+t+1)^2}$

$f^{/}\left(t\right) = 0 \Leftrightarrow t = 0 \in [-1;\ 1]$

$f(-1) = 0,\ f\left(0\right) = 1,\ f\left(1\right) = \dfrac{2}{3}.$

Vậy:

$\min f\left(x\right) = \min\limits_{t\in\left[-1;1\right]} f\left(t\right) = 0\ khi\ \sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

$\max f\left(x\right) = \max\limits_{t\in\left[-1;1\right]} f\left(t\right) = 1\ khi\ \sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$

4. $y = \dfrac{\sin^6 x\left|\cos x\right| + \cos^6 x\left|\sin x\right|}{\left|\sin x\right| + \left|\cos x\right|}$

Vì $\left|\sin x\right| + \left|\cos x\right| \ge \sin^2 x + \cos^2 x = 1, \forall x$

Nên $y = \dfrac{\sin^6 x\left|\cos x\right| + \cos^6 x\left|\sin x\right|}{\left|\sin x\right| + \left|\cos x\right|} = \dfrac{\left|\sin x\cos x\right|\left(\left|\sin x\right|^5 + \left|\cos x\right|^5\right)}{\left|\sin x\right| + \left|\cos x\right|}$

$y = \left|\sin x\cos x\right|\left(1 - \left|\sin x\cos x\right| - \sin^2 x\cos^2 x\right)$

$y = \dfrac{-1}{8}\left|\sin^3 x\right| - \dfrac{1}{4}\left|\sin 2x\right|^2 + \dfrac{1}{2}\left|\sin 2x\right|$

Đặt $t = \left|\sin 2x\right|; 0 \le t \le 1$

Xét hàm số : $f(t) = \dfrac{-1}{8}t^3 - \dfrac{1}{4}t^2 + \dfrac{1}{2}t$ liên tục trên đoạn $\left[0;1\right]$.

Ta có : $f'(t) = \dfrac{-3}{8}t^2 - \dfrac{1}{2}t + \dfrac{1}{2}, \forall t \in \left[0;1\right]$ và $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \dfrac{2}{3}$

$f(0) = 0; f\left(\dfrac{2}{3}\right) = \dfrac{5}{27}; f(1) = \dfrac{1}{8}$

Vậy : $\min y = \min\limits_{t\in\left[0;1\right]} f(t) = f(0) = 0$ khi $\left|\sin 2x\right| = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{k\pi}{2}$

$\max y = \max\limits_{t\in[0;1]} f(t) = f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{5}{27}$ khi

$\left|\sin 2x\right| = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \cos 4x = \frac{1}{9} \Leftrightarrow x = \pm\frac{1}{4} arc\cos\frac{1}{9} + \frac{k\pi}{2}$

Bài tập tương tự:

Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của các hàm số:

1. $y = \sin^3 x + \cos^3 x$
2. $y = -2\sin^3 x + 3\cos 2x - 6\sin x$

Ví dụ 8 : Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của các hàm số:

1. $y = \dfrac{1}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}}$
2. $y = \sqrt{1+\sin x} + \sqrt{1+\cos x}$

Giải :

1. $y = \dfrac{1}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}}$

Xét hàm số $g(x) = \sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}$ liên tục trên đoạn $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$

Ta có : $g'(x) = \dfrac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}} - \dfrac{\sin x}{2\sqrt{\cos x}} = \dfrac{\cos x\sqrt{\cos x} - \sin x\sqrt{\sin x}}{2\sqrt{\sin x.\cos x}}$, $x \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right]$

$$g'(x) = 0, x \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right] \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = \sin x \\ x \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right] \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4}$$

$$g(0) = 1; g(\frac{\pi}{4}) = \sqrt[4]{8}; g(\frac{\pi}{2}) = 1 \Rightarrow 1 \le g(x) \le \sqrt[4]{8} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt[4]{8}} \le y \le 1$$

Vậy $\min y = \dfrac{1}{\sqrt[4]{8}}, \max y = 1$

2. $y = \sqrt{1+\sin x} + \sqrt{1+\cos x}$

Hàm số đã cho xác định khi $\begin{cases} 1+\sin x \ge 0 \\ 1+\cos x \ge 0 \end{cases}$

$$y > 0 \Rightarrow y^2 = \sin x + \cos x + 2 + 2\sqrt{\sin x + \cos x + \sin x\cos x + 1} \quad (*)$$

Đặt $t = \sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right), -\sqrt{2} \le t \le \sqrt{2} \Rightarrow \sin x\cos x = \dfrac{t^2-1}{2}$

Khi đó $(*)$ viết lại $f(t) = t + 2 + 2\sqrt{\frac{1}{2}(t^2 + 2t + 1)} = t + 2 + \sqrt{2}\left|t + 1\right|$

$$f(t) = \begin{cases} (1 - \sqrt{2})t + 2 - \sqrt{2}, & \text{nếu } -\sqrt{2} \le t \le -1 \\ (1 + \sqrt{2})t + 2 + \sqrt{2}, & \text{nếu } -1 \le t \le \sqrt{2} \end{cases}$$

$$f'(t) = \begin{cases} 1 - \sqrt{2} < 0, & \text{nếu } -\sqrt{2} \le t < -1 \\ 1 + \sqrt{2} > 0, & \text{nếu } -1 < t \le \sqrt{2} \end{cases}$$

Hàm số $f(t)$ không có đạo hàm tại điểm $t = -1$

$\max\limits_{x \in \mathbb{R}} f(x) = \sqrt{4 + 2\sqrt{2}}$ $\qquad$ $\min\limits_{x \in \mathbb{R}} f(x) = 1$

Ví dụ 9: $g(x) = f(\sin^2 x)f(\cos^2 x)$ trong đó hàm f thỏa mãn:
$f(\cot x) = \sin 2x + \cos 2x \quad \forall x \in [0;\pi]$. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $g(x)$.

Giải :

Đặt $t = \cot x$

$$\Rightarrow \sin 2x = \frac{2\tan x}{1 + \tan^2 x} = \frac{2\cot x}{1 + \cot^2 x} = \frac{2t}{1 + t^2}; \quad \cos 2x = \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1}$$

$$\Rightarrow f(t) = \frac{t^2 + 2t - 1}{t^2 + 1}$$

$$\Rightarrow g(x) = \frac{(\sin^4 x + 2\sin^2 x - 1)(\cos^4 x + 2\cos^2 x - 1)}{(\sin^4 x + 1)(\cos^4 x + 1)}$$

$$g(x) = \frac{\sin^4 x\cos^4 x + 8\sin^2 x\cos^2 x - 2}{\sin^4 x\cos^4 x - 2\sin^2 x\cos^2 x + 2} = \frac{u^2 + 8u - 2}{u^2 - 2u + 2} = h(u).$$

trong đó $u = \sin^2 x\cos^2 x; \quad 0 \le u \le \frac{1}{4}$.

$$\Rightarrow h'(u) = 2\frac{-5u^2 + 4u + 6}{(u^2 - 2u + 2)^2} > 0 \qquad \forall u \in \left[0; \frac{1}{4}\right].$$

$\Rightarrow$ hàm số $h(u)$ luôn tăng trên $\left[0;\frac{1}{4}\right]$ nên $\max\limits_{u\in\left[0;\frac{1}{4}\right]} h(u) = h\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{25}$

$\min\limits_{u\in\left[0;\frac{1}{4}\right]} h(t) = h(0) = -1$.

Vậy $\max g(x) = \frac{1}{25}$; $\min g(x) = -1$

Ví dụ 10: Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của các hàm số trên : $\left[-1;2\right]$, biết

$$\begin{cases} f\left(0\right) = 1 \\ f^2\left(x\right).f'\left(x\right) = 1 + 2x + 3x^2 \end{cases}$$

Giải :

$f^2\left(x\right).f'\left(x\right) = 1 + 2x + 3x^2 \Leftrightarrow \frac{\left[f(x)\right]^3}{3} = x + x^2 + x^3 + c, c$: hằng số.

$f\left(0\right) = 1 \Rightarrow c = \frac{1}{3}$

Do đó $f(x) = \sqrt[3]{3x^3 + 3x^2 + 3x + 1}$

Xét hàm số : $g\left(x\right) = 3x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ liên tục trên đoạn $x \in \left[-1;2\right]$.

Ta có $g'\left(x\right) = 9x^2 + 6x + 3$

$$g'\left(x\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = -\frac{1}{3} \end{array}\right.$$

$$g\left(-1\right) = -2, g\left(2\right) = 40, g\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{9} \Rightarrow \max\limits_{x\in\left[-1;2\right]} g\left(x\right) = 40, \min\limits_{x\in\left[-1;2\right]} g\left(x\right) = -2$$

Vậy $\begin{cases} \max\limits_{x\in\left[-1;2\right]} f\left(x\right) = \sqrt[3]{40} \quad khi\ x = 2 \\ \min\limits_{x\in\left[-1;2\right]} f\left(x\right) = \sqrt[3]{-2} \quad khi\ x = -1 \end{cases}$

Ví dụ 11 : Cho a, b là các số dương thoả mãn $ab + a + b = 3$. Tìm GTLN của biểu thức: $P = \frac{3a}{b+1} + \frac{3b}{a+1} + \frac{ab}{a+b} - a^2 - b^2$ (**Dự bị Đại học- 2005**) .

Giải :

Từ $ab + a + b = 3 \Rightarrow 3 - (a+b) = ab \le \dfrac{(a+b)^2}{4} \Leftrightarrow a + b \ge 2$.

Ta có: $P = \dfrac{3a(a+1) + 3b(b+1)}{(b+1)(1+a)} + \dfrac{ab}{a+b} - (a+b)^2 + 2ab$

$$P = 3\frac{(a+b)^2 - 2ab + (a+b)}{ab + a + b + 1} + \frac{ab}{a+b} - (a+b)^2 + 2ab$$

$$P = \frac{3}{4}\left[(a+b)^2 + 3(a+b) - 6\right] + \frac{3 - (a+b)}{a+b} - (a+b)^2 + 6 - 2(a+b)$$

$$P = \frac{1}{4}\left[-(a+b)^2 + (a+b) + \frac{12}{a+b} + 2\right].$$

Đặt $t = a + b \ge 2$. Xét hàm số $g(t) = -t^2 + t + \dfrac{12}{t} + 2$ với $t \ge 2$

Ta có: $g'(t) = -2t + 1 - \dfrac{12}{t^2} < 0 \quad \forall t \ge 2 \Rightarrow \max\limits_{t \ge 2} g(t) = g(2) = \dfrac{3}{2}$.

Vậy $\max P = \dfrac{3}{2}$ đạt được khi $a = b = 1$.

Ví dụ 12: Cho x, y, z là số thực thỏa mãn $x^2 + y^2 + z^2 = 2$. Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của biểu thức $P = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$.

Giải :

Từ các đẳng thức $x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx) = (x+y+z)^2$

$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x+y+z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$ và điều kiện ta có: $P = (x+y+z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$

$$= (x+y+z)\left[2 - \frac{(x+y+z)^2 - 2}{2}\right]$$

Đặt $t = x + y + z \Rightarrow -\sqrt{6} \le t \le \sqrt{6}$

Ta có: $P = t\left(2 - \dfrac{t^2 - 2}{2}\right) = -\dfrac{t^3}{2} + 3t = f(t)$

Xét hàm số $f(t)$ với $-\sqrt{6} \le t \le \sqrt{6}$.

Ta có: $f'(t) = \dfrac{3}{2}(-t^2 + 2) \Rightarrow f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \pm\sqrt{2}$

$$\Rightarrow \max_{\left[-\sqrt{6};\sqrt{6}\right]} f(t) = f(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}; \quad \min_{\left[-\sqrt{6};\sqrt{6}\right]} f(t) = f(-\sqrt{2}) = -2\sqrt{2}$$

Vậy $\max P = 2\sqrt{2}$ đạt được khi $x = \sqrt{2}; y = z = 0$

$\min P = -2\sqrt{2}$ đạt được khi $x = -\sqrt{2}; y = z = 0$.

Ví dụ 13: Cho hai số $x, y \neq 0$ thay đổi thỏa mãn $\left(x + y\right)xy = x^2 + y^2 - xy$

Tìm GTLN của biểu thức : $A = \dfrac{1}{x^3} + \dfrac{1}{y^3}$ (**Đại học Khối A – 2006**).

Giải:

Cách 1 :

Đặt: $u = x + y, v = xy \Rightarrow \left(x + y\right)xy = x^2 + y^2 - xy \Leftrightarrow uv = u^2 - 3v$

$\Leftrightarrow \left(u + 3\right)v = u^2 \Leftrightarrow v = \dfrac{u^2}{u + 3}\left(\text{do } u \neq -3\right)$.

Vậy $A = \dfrac{1}{x^3} + \dfrac{1}{y^3} = \dfrac{x^3 + y^3}{\left(xy\right)^3} = \dfrac{u^3 - 3uv}{v^3} = \dfrac{u\left(u^2 - 3v\right)}{v^3} = \dfrac{u^2}{v^2} = \left(\dfrac{u + 3}{u}\right)^2$

Vì $u^2 \geq 4v \Rightarrow u^2 \geq \dfrac{4u^2}{u + 3} \Leftrightarrow \dfrac{4}{u + 3} \leq 1 \Leftrightarrow \dfrac{u - 1}{u + 3} \geq 0$ (ở đây ta lưu ý $u \neq 0$)

$\Leftrightarrow u \geq 1 \vee u < -3 \quad \Rightarrow \dfrac{u + 3}{u} > 0$. Xét hàm $f\left(u\right) = \dfrac{u + 3}{u} \Rightarrow f'\left(u\right) = \dfrac{-3}{u^2} < 0$

Lập bảng biến thiên, ta thấy $f(u) \leq f(1) = 4 \Rightarrow A \leq 16$.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x = y = \dfrac{1}{2}$. Vậy GTLN của $A = 16$.

Cách 2 :

Đặt $a = \dfrac{1}{x}; b = \dfrac{1}{y}$. Khi đó giả thiết của bài toán trở thành

$a + b = a^2 + b^2 - ab \geq \dfrac{1}{4}(a + b)^2 \Leftrightarrow 0 \leq a + b \leq 4$

Và $A = a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 + b^2 - ab) = (a + b)^2 \leq 16$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b = 2 \Leftrightarrow x = y = \dfrac{1}{2}$.

Ví dụ 14 : Cho hai số thực x, y thay đổi và thỏa mãn hệ thức $x^2 + y^2 = 1$.

Tìm GTLN, GTNN cảu biểu thức: $P = \dfrac{2(x^2 + 6xy)}{1 + 2xy + 2y^2}$

(**Đại học Khối B – 2008**).

Giải:

Cách 1 :

Ta có: $P = \dfrac{2(x^2 + 6xy)}{1 + 2xy + 2y^2} = \dfrac{2(x^2 + 6xy)}{x^2 + 2xy + 3y^2}$

* Nếu $y = 0 \Rightarrow P = 1$.

Nếu $y \neq 0$ thì đặt : $x = ty \Rightarrow P = \dfrac{2(t^2y^2 + 6ty^2)}{t^2y^2 + 2ty^2 + 3y^2} = \dfrac{2(t^2 + 6t)}{t^2 + 2t + 3} = 2f\left(t\right)$

Xét hàm số $f(t)$, ta có :

$$f'\left(t\right) = \frac{-4t^2 + 6t + 18}{\left(t^2 + 2t + 3\right)^2}, f'\left(t\right) = 0 \Leftrightarrow t_1 = 3, t_2 = -\frac{3}{2},\ \lim_{t \to \pm\infty} f\left(t\right) = 1$$

Lập bảng biến thiên ta được: GTLN $P = 3$ và GTNN $P = -6$.

Cách 2 :

$$P = \frac{2(x^2 + 6xy)}{1 + 2xy + 2y^2} = \frac{2x^2 + 12xy}{x^2 + 2xy + 3y^2}$$

$$\Rightarrow P - 3 = \frac{2x^2 + 12xy}{x^2 + 2xy + 3y^2} - 3 = \frac{-(x - 3y)^2}{x^2 + 2xy + 3y^2} \le 0$$

$\Rightarrow P \le 3$. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3y \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm\dfrac{3}{2} \\ y = \pm\dfrac{1}{2} \end{cases}$.

$$P + 6 = \frac{2x^2 + 12xy}{x^2 + 2xy + 3y^2} + 6 = \frac{2(2x + 3y)^2}{x^2 + 2xy + 3y^2} \ge 0$$

$\Rightarrow P \ge -6$. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{3}{2}y \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \mp\dfrac{3}{\sqrt{13}} \\ y = \pm\dfrac{2}{\sqrt{13}} \end{cases}$.

Vậy $\max P = 3;\ \min P = -6$.

Tuy nhiên cách làm cái khó là chúng ta làm sao biết cách đánh giá $P - 3$ và $P + 6$?

Ví dụ 15: Cho bốn số nguyên a, b, c, d thay đổi thỏa: $1 \le a < b < c < d \le 50$

Tìm GTNN của biểu thức $P = \dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d}$ (**Dự bị Đại học - 2002**).

Giải:

Vì $1 \le a < b < c < d \le 50$ và a,b,c,d là các số nguyên nên $c \ge b+1$

Suy ra : $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} \ge \frac{1}{b} + \frac{b+1}{50} = f\left(b\right)$.

Dễ thấy $2 \le b \le 48$ nên ta xét hàm số : $f\left(x\right) = \frac{1}{x} + \frac{x+1}{50}, x \in [2;48]$

Ta có $f'\left(x\right) = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{50} \Rightarrow f'\left(x\right) = 0 \Leftrightarrow x = 5\sqrt{2}$.

Lập bảng biến thiên ta được $\min\limits_{[2;48]} f\left(x\right) = f\left(5\sqrt{2}\right)$

Do 7 và 8 là hai số nguyên gần $5\sqrt{2}$ nhất vì vậy:

$\min\limits_{[2;48]} f\left(b\right) = \min\left\{f\left(7\right); f\left(8\right)\right\} = \min\left\{\frac{53}{175}; \frac{61}{200}\right\} = \frac{53}{175}$.

Vậy GTNN $P = \frac{53}{175}$.

Ví dụ 16: Cho a,b,c là 3 số thực dương và thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=1$. Chứng minh rằng : $\frac{a}{b^2+c^2} + \frac{b}{a^2+c^2} + \frac{c}{a^2+b^2} \ge \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Giải :

Để không mất tính tổng quát , giả sử $0 < a \le b \le c$ và thỏa mãn hệ thức $a^2+b^2+c^2=1$. Do đó $0 < a \le b \le c \le \frac{1}{\sqrt{3}}$.

$$\frac{a}{b^2+c^2} + \frac{b}{a^2+c^2} + \frac{c}{a^2+b^2} = \frac{a}{1-a^2} + \frac{b}{1-b^2} + \frac{c}{1-c^2}$$

$$= \frac{a^2}{a\left(1-a^2\right)} + \frac{b^2}{b\left(1-b^2\right)} + \frac{c^2}{c\left(1-c^2\right)}$$

Xét hàm số : $f(x) = x\left(1-x^2\right)$ liên tục trên nửa khoảng $\left(0; \frac{1}{\sqrt{3}}\right]$.

Ta có : $f'(x) = -3x^2+1 > 0, x \in \left(0; \frac{1}{\sqrt{3}}\right] \Rightarrow f\left(x\right)$ liên tục và đồng biến trên nửa khoảng $\left(0; \frac{1}{\sqrt{3}}\right]$.

Và $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} x\left(1-x^2\right) = 0, f\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right) = \dfrac{2}{3\sqrt{3}} \Rightarrow 0 < f(x) \le \dfrac{2}{3\sqrt{3}}$ hay

$0 < x\left(1-x^2\right) \le \dfrac{2}{3\sqrt{3}}$.

Hay $\dfrac{1}{x\left(1-x^2\right)} \ge \dfrac{2}{3\sqrt{3}} \Leftrightarrow \dfrac{x}{1-x^2} \ge \dfrac{3\sqrt{3}}{2}x^2, \forall x \in \left(0;\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right]$.

Suy ra $\begin{cases} \dfrac{a}{1-a^2} \ge \dfrac{3\sqrt{3}}{2}a^2 \\ \dfrac{b}{1-b^2} \ge \dfrac{3\sqrt{3}}{2}b^2 \\ \dfrac{c}{1-c^2} \ge \dfrac{3\sqrt{3}}{2}c^2 \end{cases} \Rightarrow \dfrac{a}{1-a^2} + \dfrac{b}{1-b^2} + \dfrac{c}{1-c^2} \ge \dfrac{3\sqrt{3}}{2}\left(a^2+b^2+c^2\right)$.

Vậy $\dfrac{a}{b^2+c^2} + \dfrac{b}{a^2+c^2} + \dfrac{c}{a^2+b^2} \ge \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$. Xảy ra khi $a = b = c = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Chú ý : Để không mất tính tổng quát , giả sử $0 < a \le b \le c$ và thỏa mãn hệ thức $a^2+b^2+c^2 = 1$. Ta có thể suy ra $0 < a \le b \le c < 1$.

Khi đó xét hàm số : $f(x) = x\left(1-x^2\right)$ liên tục trên khoảng $\left(0;1\right)$.

$f'(x) = -3x^2+1, x \in \left(0;1\right)$ và $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

- $f'(x) > 0, x \in \left(0;\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right) \Rightarrow f\left(x\right)$ liên tục và đồng biến trên khoảng $\left(0;\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$
- $f'(x) < 0, x \in \left(\dfrac{1}{\sqrt{3}};1\right) \Rightarrow f\left(x\right)$ liên tục và nghịch biến trên khoảng $\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}};1\right)$.

Và $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = 0, f\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right) = \dfrac{2}{3\sqrt{3}} \Rightarrow 0 < f(x) \le \dfrac{2}{3\sqrt{3}}$. Phần còn lại tương tự như trên.

Ví dụ 17: Xét các số thực không âm thay đổi x, y, z thỏa điều kiện: $x+y+z=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của:

$S = \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}} + \sqrt{\dfrac{1-y}{1+y}} + \sqrt{\dfrac{1-z}{1+z}}$.

Giải :

Tìm MinS :

Không mất t ính tổng quát giả sử: $0 \le x \le y \le z \le 1$.

Với $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x, y, z \ge 0 \end{cases} \Rightarrow x, y, z \in \left[0;1\right]$.

Vì $\left(1-x\right)\left(1+x\right) = 1 - x^2 \le 1$ nên: $\dfrac{1-x}{1+x} \ge (1-x)^2 \Rightarrow \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}} \ge 1 - x$.

Dấu đẳng thức xảy ra trong trường hợp $x = 0$ hoặc $x = 1$.

Khi đó $S = \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}} + \sqrt{\dfrac{1-y}{1+y}} + \sqrt{\dfrac{1-z}{1+z}} \ge 1 - x + 1 - y + 1 - z$ hay $S \ge 2$.

Đẳng thức xảy ra khi $x = y = 0, z = 1$ thì $S = 2$.

Vậy: $\min S = 2$.

Tìm Max*S*:

Không mất t ính tổng quát giả sử: $0 \le x \le y \le z \le 1$.

Lúc đó: $z \ge \dfrac{1}{3}$; $x + y \le \dfrac{2}{3} < \dfrac{4}{5}$.

$S = \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}} + \sqrt{\dfrac{1-y}{1+y}} + \sqrt{\dfrac{1-z}{1+z}} \le$

$1 + \sqrt{\dfrac{1-(x+y)}{1+x+y}} + \sqrt{\dfrac{1-z}{1+z}} = 1 + \sqrt{\dfrac{z}{2-z}} + \sqrt{\dfrac{1-z}{1+z}}$

Đặt $h\left(z\right) = \sqrt{\dfrac{z}{2-z}} + \sqrt{\dfrac{1-z}{1+z}}$. Bài toán trở thành giá trị lớn nhất của $h\left(z\right)$ trên đoạn $\left[\dfrac{1}{3}; 1\right]$.

$h'(z) = 0 \Leftrightarrow z = \dfrac{1}{2}$. $Maxh(z) = \text{Max}\left\{h\left(\dfrac{1}{3}\right); h(1); h\left(\dfrac{1}{2}\right)\right\} = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$.

Do đó : $S = \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}} + \sqrt{\dfrac{1-y}{1+y}} + \sqrt{\dfrac{1-z}{1+z}} \le 1 + \dfrac{2}{\sqrt{3}}$.

Đẳng thức xảy ra khi $x = 0, y = z = \dfrac{1}{2}$ thì $S = 1 + \dfrac{2}{\sqrt{3}}$.

Vậy: $\max S = 1 + \dfrac{2}{\sqrt{3}}$

Ví dụ 18: Cho ba số thực dương a,b,c thoả mãn: $abc + a + c = b$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P = \frac{2}{a^2+1} - \frac{2}{b^2+1} + \frac{3}{c^2+1}$

Giải :

Ta có : $a + c = b\left(1 - ac\right) > 0$. Dễ thấy $ac \neq 1 \Rightarrow 0 < a < \frac{1}{c}$

nên $b = \frac{a+c}{1-ac}$ $\Rightarrow$ P$=\frac{2}{a^2+1} - \frac{2(1-ac)^2}{(a+c)^2+(1-ac)^2} + \frac{3}{c^2+1}$

$$P = \frac{2}{a^2+1} + \frac{2(a+c)^2}{(a^2+1)(c^2+1)} - 2 + \frac{3}{c^2+1}$$

Xét $f\left(x\right) = \frac{2}{x^2+1} + \frac{2(x+c)^2}{(x^2+1)(c^2+1)} + \frac{3}{c^2+1} - 2$

$$f\left(x\right) = \frac{2(x^2+2cx+2c^2+1)}{(x^2+1)(c^2+1)} + \frac{3}{c^2+1} - 2, 0 < x < \frac{1}{c}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{-4c(x^2+2cx-1)}{(x^2+1)^2(c^2+1)} \quad , 0 < x < \frac{1}{c}$$

Trên khoảng $\left(0;\frac{1}{c}\right)$: $f'\left(x\right) = 0$ có nghiệm $x_0 = -c + \sqrt{c^2+1}$ và $f'\left(x\right)$ đổi dấu từ dương sang âm khi x qua x_0, suy ra $f\left(x\right)$ đạt cực đại tại $x = x_0$

$$\Rightarrow \forall x \in \left(0;\frac{1}{c}\right): f\left(x\right) \leq \frac{2}{c^2+1-c\sqrt{c^2+1}} + \frac{3}{c^2+1} - 2 = \frac{2c}{\sqrt{c^2+1}} + \frac{3}{c^2+1}$$

Xét $g\left(c\right) = \frac{2c}{\sqrt{c^2+1}} + \frac{3}{c^2+1}$,c>0

$$g'(c) = \frac{2(1-8c^2)}{(c^2+1)^2(\sqrt{c^2+1}+3c)}$$

$$g'(c) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} c > 0 \\ 1 - 8c^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow c = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \forall c>0: g\left(c\right) \leq g\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right) = \frac{2}{3} + \frac{24}{9} = \frac{10}{3}$$

$\Rightarrow P \le \dfrac{10}{3}$. Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases} a = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ b = \sqrt{2} \\ c = \dfrac{1}{2\sqrt{2}} \end{cases}$

Vậy giá trị lớn nhất của P là $\dfrac{10}{3}$.

Ví dụ 19 : Cho tam giác ABC không tù. Tìm GTLN của biểu thức:
$P = \cos 2A + 2\sqrt{2}(\cos B + \cos C)$ (**Đại học Khối A – 2004**).

Giải:

Ta có $A \le 90 \Rightarrow \cos 2A = 2\cos^2 A - 1 \le 2\cos A - 1 = 1 - 4\sin^2 \dfrac{A}{2}$

Đẳng thức có $\Leftrightarrow \cos^2 A = \cos A$ (1).

$\cos B + \cos C = 2\sin \dfrac{C}{2}.\cos \dfrac{B-C}{2} \le 2\sin \dfrac{C}{2}$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \cos \dfrac{B-C}{2} = 1$ (2).

Đặt $t = \sin \dfrac{A}{2} \Rightarrow 0 < t \le \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Ta có: $P \le -4t^2 + 4\sqrt{2}t + 1 = f(t)$

Xét hàm số $f(t),\ t \in \left(0; \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right]$, có $f'(t) = -8t + 4\sqrt{2} \Rightarrow f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Lập bảng biến thiên ta có: $f(t) \le f\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = 3 \Rightarrow P \le 3$.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} \cos A = \cos^2 A \\ \cos \dfrac{B-C}{2} = 1 \\ \sin \dfrac{A}{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 90^0 \\ B = C = 45^0 \end{cases}$.

Vậy $\max P = 3$.

Ví dụ 20: Cho tam giác ABC có $A > B > C$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức : $M = \sqrt{\dfrac{x - \sin A}{x - \sin C}} + \sqrt{\dfrac{x - \sin B}{x - \sin C}} - 1$.

Giải :

Biểu thức xác định khi $D = \left(-\infty; \sin C\right) \cup \left[\sin A; +\infty\right)$.

$M' = \sqrt{\dfrac{x-\sin C}{x-\sin A}}.\dfrac{\sin A - \sin C}{\left(x-\sin C\right)^2} + \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{x-\sin C}{x-\sin B}}.\dfrac{\sin B - \sin C}{\left(x-\sin C\right)^2} > 0, \forall x \in D \Rightarrow M$ liên tục và đồng biến trên mỗi khoảng $\left(-\infty; \sin C\right), \left[\sin A; +\infty\right)$

Do đó $\min M = M\left(\sin A\right) = \sqrt{\dfrac{\sin A - \sin B}{\sin A - \sin C}} - 1$

Ví dụ 21: Cho một tam giác đều ABC cạnh a. Người ta dựng một hình chữ nhật $MNPQ$ có cạnh MN nằm trên cạnh BC, hai đỉnh P và Q theo thứ tự nằm trên hai cạnh AC và AB của tam giác . Xác định vị trí điểm M sao cho hình chữ nhật có diện tích lớn nhất và tìm giá trị lớn nhất đó.

Giải :

Đặt $BM = x, 0 < x < \dfrac{a}{2} \Rightarrow NM = BC - 2BM = a - 2x$

Trong tam giác vuông BMQ có

$\tan \widehat{QBM} = \dfrac{QM}{BM} \Rightarrow QM = BM.\tan \widehat{QBM} = x\sqrt{3}$

Diện tích hình chữ nhật $MNPQ$ là $S\left(x\right) = MN.QM = \left(a-2x\right)x\sqrt{3}$

Bài toán quy về : Tìm giá trị lớn nhất của $S\left(x\right) = \left(a-2x\right)x\sqrt{3}, x \in \left(0; \dfrac{a}{2}\right)$

$S'\left(x\right) = -4\sqrt{3}x + a\sqrt{3}, x \in \left(0; \dfrac{a}{2}\right)$ $\quad S'\left(x\right) = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{a}{4}$

Bảng biến thiên của $S\left(x\right)$ trên khoảng $\left(0; \dfrac{a}{2}\right)$

x	0		$\dfrac{a}{4}$		$\dfrac{a}{2}$
$S'(x)$		$+$	0	$-$	
$S(x)$	0	$\nearrow$	$\dfrac{a^2\sqrt{3}}{8}$	$\searrow$	0

Vậy diện tích hình chữ nhật lớn nhất là $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{8}$ khi $x = \dfrac{a}{4}$