Bài 5 : PHÉP TỊNH TIẾN VÀ TÂM ĐỐI XỨNG

5.1 TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Điểm uốn của đồ thị :

Giả sử hàm số f có đạo hàm cấp một liên tục trên khoảng $(a;b)$ chứa điểm x_0 và có đạo hàm cấp hai trên khoảng $(a;x_0)$ vì $(x_0;b)$ .Nếu f'' đổi dấu khi x qua điểm x_0 thì $I(x_0;f(x_0))$ là một điểm uốn của đồ thị của hàm số $y=f(x)$.

Nếu hàm số f có đạo hàm cấp hai tại điểm x_0 thì $I(x_0;f(x_0))$ là một điểm uốn của đồ thị hàm số thì $f''(x_0)=0$

2. Phép tịnh tiến hệ tọa độ :

Công thức chuyển hệ tọa độ trong phép tình tiến theo vectơ $\overrightarrow{OI}$ là

$$\begin{cases} x = X + x_o \\ y = Y + y_0 \end{cases}, \ I(x_0;f(x_0)).$$

5.2 DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

Dạng 1 : Chuyển hệ tọa độ trong phép tịnh tuyến theo vectơ $\overrightarrow{OI}$.

Ví dụ 1: Tìm tham số thực m để điểm I thuộc đồ thị $(C): y = x^3 + 3mx^2 + (m+2)x + 1$ nằm trên trục hoành , biết rằng hoành độ của điểm I nghiệm đúng phương trình $f''(x) = 0$.

Giải :

* Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$.

* Ta có : $y' = 3x^2 + 6mx + m + 2$

$y'' = 6x + 6m$ và $y'' = 0 \Leftrightarrow x = -m$.

Dễ thấy y'' đổi dấu khi x qua điểm $x_0 = -m$. Suy ra $I(-m;2m^3 - m^2 - 2m + 1)$ là điểm uốn của đồ thị đã cho.

Vì $I \in Ox \Leftrightarrow 2m^3 - m^2 - 2m + 1 = 0 \Leftrightarrow (m-1)(2m^2 + m - 1) = 0$

$\Leftrightarrow m = 1$ hoặc $m = -1$ hoặc $m = \dfrac{1}{2}$.

Ví dụ 2:Cho hàm số $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - \dfrac{1}{2}x^2 - 4x + 6$

1. Giải phương trình $f'(\sin x) = 0$
2. Giải phương trình $f''(\cos x) = 0$
3. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số đã cho tại điểm có hoành độ là nghiệm của phương trình $f''(x) = 0$.

Giải :

* Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$.

1. $f'(x) = x^2 - x - 4 \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1 \pm \sqrt{17}}{2}$.

Cả hai nghiệm x đều nằm ngoài đoạn $[-1;1]$. Do đó phương trình $f'(\sin x) = 0$ vô nghiệm.

2. $f''(x) = 2x - 1 \Rightarrow f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2}$. Do đó phương trình

$f''(\cos x) = 0 \Leftrightarrow \cos x = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

3. $f''(x) = 2x - 1 \Rightarrow f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2}, f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{47}{12}, f'\left(\dfrac{1}{2}\right) = -\dfrac{17}{4}$

Phương trình tiếp tuyến cần tìm là :

$$y = -\frac{17}{4}\left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{47}{12} \quad hay \quad y = -\frac{17}{4}x + \frac{145}{24}$$

Ví dụ 3 : Cho hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$có đồ thị là (C)

1. Xác định điểm I thuộc đồ thị (C)của hàm số đã cho , biết rằng hoành độ của điểm I nghiệm đúng phương trình $f''(x) = 0$.
2. Viết công thức chuyển hệ tọa độ trong phép tịnh tuyến theo vectơ $\overrightarrow{OI}$ và viết phương trình đường cong (C)đối với hệ IXY . Từ đó suy ra rằng I là

tâm đối xứng của đường cong (C).

3. Viết phương trình tiếp tuyến của đường cong (C) tại điểm I đối với hệ tọa độ Oxy .Chứng minh rằng trên khoảng $(-\infty;1)$ đường cong (C) nằm phía dưới tiếp tuyến tại điểm I của (C) và trên khoảng $(1;+\infty)$ đường cong (C) nằm phía trên tiếp tuyến đó.

Giải :

* Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$.

1. Ta có $f'(x) = 3x^2 - 6x$, $f''(x) = 6x - 6$ $\quad f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Hoành độ điểm I thuộc (C) là $x = 1, f(1) = -1$. Vậy $I(1;-1) \in (C)$.

2. Công thức chuyển hệ tọa độ trong phép tịnh tuyến theo vectơ $\overrightarrow{OI}$ là

$$\begin{cases} x = X + 1 \\ y = Y - 1 \end{cases}$$

Phương trình của (C) đối với hệ tọa độ IXY là :

$$Y - 1 = (X+1)^3 - 3(X+1)^2 + 1 \Leftrightarrow Y = X^3 - 3X.$$

Vì đây là một hàm số lẻ nên đồ thị (C) của nó nhận gốc toạ độ I làm tâm đối xứng .

3. $f'(x) = 3x^2 - 6x \Rightarrow f'(1) = -3$. Phương trình tiếp tuyến của đường cong (C) tại điểm I đối với hệ tọa độ Oxy :

$$y = f'(1)(x-1) + f(1) = -3(x-1) - 1 \Leftrightarrow y = g(x) = -3x + 2.$$

Xét hàm $h(x) = f(x) - g(x) = (x^3 - 3x^2 + 1) - (-3x + 2) = (x-1)^3$ trên $\mathbb{R}$

Dễ thấy $\begin{cases} h(x) < 0, x < 1 \\ h(x) > 0, x > 1 \end{cases}$. Điều này chứng tỏ trên khoảng $(-\infty;1)$ đường cong (C) nằm phía dưới tiếp tuyến tại điểm I của (C) và trên khoảng $(1;+\infty)$ đường cong (C) nằm phía trên tiếp tuyến đó.

Ví dụ 4 : Cho hàm số $y = x^3 - (m+3)x^2 + (2+3m)x - 2m$ có đồ thị là (C_m), m là tham số thực. Gọi I là điểm có hoành độ là nghiệm đúng phương trình $f''(x) = 0$ .Tìm tham số m để đồ thị của hàm số có cực trị và điểm I nằm trên trục Ox .

Giải:

Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$.

Ta có : $y' = 3x^2 - 2(m+3)x + 2 + 3m$ và $y'' = 6x - 2(m+3)$

Đồ thị của hàm số có cực trị và điểm I nằm trên trục Ox

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta'_{y'} > 0 \\ y_{(x_u)} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m+3)^2 - 3(2+3m) > 0 \\ \left(\dfrac{m+3}{3}\right)^3 - (m+3).\left(\dfrac{m+3}{3}\right)^2 + (2+3m).\left(\dfrac{m+3}{3}\right) - 2m = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 3m + 3 > 0 \\ 2m^3 - 9m^2 + 9 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 0 \vee m = 3 \vee m = \frac{3}{2}.$$

Dạng 2 : Tâm đối xứng của đồ thị.

Ví dụ 1 :Cho hàm số $y = x^4 - mx^3 + 4x + m + 2$. Tìm tất cả tham số thực m để hàm số đã cho có 3 cực trị A, B, C
và trọng tâm G của tam giác ABC trùng với tâm đối xứng của đồ thị hàm số $y = \dfrac{4x}{4x - m}$.

Giải :

Đồ thị của hàm số $y = \dfrac{4x}{4x - m}$ có tâm đối xứng là $I(\dfrac{m}{4}\ ; 1)$

Hàm số : $y = x^4 - mx^3 + 4x + m + 2$, liên tục trên R.

Ta có : $y' = 4x^3 - 3mx^2 + 4$

Hàm số đã cho có 3 cực trị khi và chỉ khi phương trình $y' = 0$ có 3 nghiệm phân biệt , nghĩa là phương trình $4x^3 - 3mx^2 + 4 = 0$ có 3 nghiệm phân biệt.

Xét hàm số $g(x) = 4x^3 - 3mx^2 + 4$ liên tục trên R và

$\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = -\infty$

Ta có : $g'(x) = 12x^2 - 6mx \Rightarrow g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0, g(0) = 4 > 0 \\ x = \dfrac{m}{2}, g(\dfrac{m}{2}) = \dfrac{16 - m^3}{4} \end{array}\right.$

$g'\left(x\right)$ đổi dấu 2 lần qua nghiệm , và $g\left(x\right) = 0$ có 3 nghiệm phân biệt khi

$$\begin{cases} \dfrac{m}{2} > 0 \\ \dfrac{16 - m^3}{4} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > 2\sqrt[3]{2}$$

Giả sử $A(x_1;y_1), B(x_2;y_2), C(x_3;y_3)$ là tọa độ 3 cực trị thỏa mãn đề bài, khi đó $y = y'(\dfrac{x}{4} - \dfrac{m}{16}) + (-\dfrac{3m^2x^2}{16} + 3x + \dfrac{5m}{4} + 2)$

$\Rightarrow y_i = -\dfrac{3m^2x_i^2}{16} + 3x_i + \dfrac{5m}{4} + 2, y_i' = 0 \ \ (i = 1,2,3)$.

Vì G là trọng tâm tam giác ABC , nên $G\left(\dfrac{x_1 + x_2 + x_3}{3}; \dfrac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)$

$$G\left(\dfrac{x_1 + x_2 + x_3}{3}; -\dfrac{m^2}{16}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + (x_1 + x_2 + x_3) + \dfrac{5m}{4} + 2\right)$$

Do x_1, x_2, x_3 là nghiệm của phương trình $4x^3 - 3mx^2 + 4 = 0$, theo định lý Vi-et ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = \dfrac{3m}{4} \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x_1 + x_2 + x_3}{3} = \dfrac{m}{4} \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1) = \dfrac{9m^2}{16} \end{cases}$$

Khi đó $G\left(\dfrac{m}{4}; -\dfrac{9m^4}{16^2} + \dfrac{5m}{4} + 2\right)$ và trọng tâm G của tam giác ABC trùng với tâm đối xứng của đồ thị hàm số $y = \dfrac{4x}{4x - m}$ khi và chỉ khi

$G\left(\dfrac{m}{4};-\dfrac{9m^4}{16^2}+\dfrac{5m}{4}+2\right)\equiv I(\dfrac{m}{4};1)$

$\Leftrightarrow -\dfrac{9m^4}{16^2}+\dfrac{5m}{4}+2=1 \Leftrightarrow (m-4)(9m^3+36m^2+144m+64)=0$

$\Leftrightarrow m=4$

Vậy $m=4$ thỏa mãn đề bài .

Chú ý : Ngoài cách giải trên ta có thể trình bày :

Hàm số đã cho có 3 cực trị khi và chỉ khi phương trình $y'=0$ có 3 nghiệm phân biệt , nghĩa là phương trình $4x^3-3mx^2+4=0$ có 3 nghiệm phân biệt.

Khi đó phương trình $\dfrac{4x^3+4}{x^2}=3m$ có 3 nghiệm phân biệt khác 0. Nói khác hơn đường thẳng $y=3m$ cắt đồ thị của hàm số $h(x)=\dfrac{4x^3+4}{x^2}$, tại 3 giao điểm . Đến đây đã dễ dàng.

Ví dụ 2 : Cho hàm số : $y=\dfrac{x^2-x+1}{x-1}$ có đồ thị là (C). Gọi (C') là đồ thị đối xứng với (C) qua điểm $A(3;4)$. Tìm phương trình đồ thị (C').

Giải :

Gọi $M(x,y)\in(C)$ và $M'(x',y')\in(C')$ đối xứng qua đồ thị (C) qua điểm $A(3;4)$.

Ta có $\begin{cases}\dfrac{x+x'}{2}=3\\ \dfrac{y+y'}{2}=4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=6-x'\\ y=4-y'\end{cases}$

Thay vào đồ thị $(C): 8-y'=\dfrac{(6-x')^2-(6-x')+1}{6-x'-1}=\dfrac{x'^2-11x'+31}{5-x'}$

Hay $y'=8-\dfrac{x'^2-11x'+31}{5-x'}=\dfrac{9+3x'-x'^2}{5-x'}$.

Vậy phương trình đồ thị $(C'): y=\dfrac{-x^2+3x+9}{-x+5}=\dfrac{x^2-3x-9}{x-5}$.