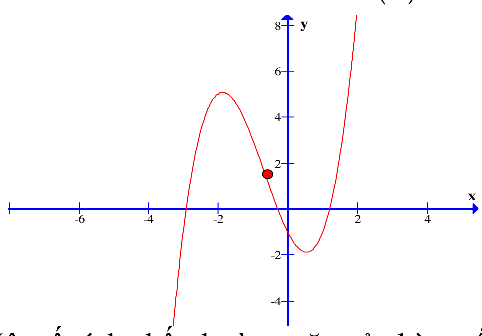
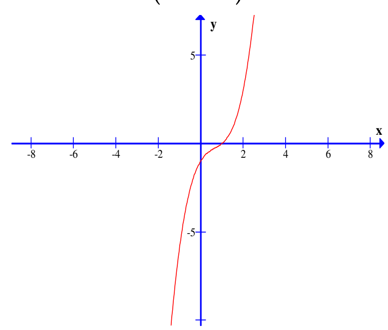
Bài 6: KHẢO SÁT SỰ BIẾN THIÊN VÀ VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ

6.1 TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Hàm số bậc ba $f\left(x\right) = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad \left(a \neq 0\right)$

Dáng điệu đồ thị của hàm số $f\left(x\right) = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad \left(a \neq 0\right)$





Một số tính chất thường gặp của hàm số bậc ba

1. Đồ thị cắt Ox tại 3 điểm phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 : \text{có 2 nghiem phan biet } x_1, x_2 \\ f(x_1).f(x_2) < 0 \end{cases}$$

2. Giả sử $a > 0$ ta có :

$a)$ Đồ thị cắt Ox tại 3 điểm phân biệt có hoành độ $> \alpha$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 \text{ có 2 nghiem phan biet } \alpha < x_1 < x_2 \\ f(\alpha) < 0 \\ f(x_1).f(x_2) < 0 \end{cases}$$

$b)$ Đồ thị cắt Ox tại 3 điểm phân biệt có hoành độ $< \alpha$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 \text{ có 2 nghiem phan biet } x_1 < x_2 < \alpha \\ f(\alpha) > 0 \\ f(x_1).f(x_2) < 0 \end{cases}$$

Tương tự cho trường hợp $a < 0$.

Ví dụ 1:Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = x^3 + 3x^2 + 1$.

Giải:

* Hàm số đã cho xác định trên $\mathbb{R}$

* Giới hạn : $\lim\limits_{x \to -\infty} y = -\infty$ $\lim\limits_{x \to +\infty} y = +\infty$ hàm số không có tiệm cận.

* Đạo hàm : $y' = 3x^2 + 6x$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2, f\left(-2\right) = 5 \\ x = 0, f\left(0\right) = 1 \end{array} \right.$$

Hàm số đồng biến trên các khoảng $\left(-\infty;-2\right)$ và $\left(0;+\infty\right)$, nghịch biến trên khoảng $\left(-2;0\right)$

Hàm số có điểm cực đại tại $x = -2, f\left(-2\right) = 5$ và có điểm cực tiểu tại $x = 0, f\left(0\right) = 1$

* Bảng biến thiên :

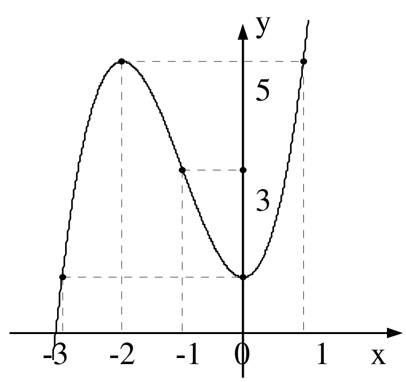
x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
y'		$+$		0		$-$	
	0		$+$				
y	$-\infty$	↗	5	↘	1	↗	$+\infty$

* $f''\left(x\right) = 6x + 6$

$f''\left(x\right) = 0 \Leftrightarrow x = -1, f\left(-1\right) = 3$, $f''\left(x\right)$ đổi dấu một lần qua nghiệm $x = -1$ nên $I\left(-1;3\right)$ là điểm uốn của đồ thị .

* Đồ thị :

Đồ thị hàm số đi qua các điểm $\left(-3;1\right),\left(-2;5\right),\left(-1;3\right),\left(0;1\right),\left(1;5\right)$ và nhận điểm $I\left(-1;3\right)$ là điểm uốn của đồ thị .



Ví dụ 2: Cho hàm số $y = -x^3 - 3x^2 + mx + 4$, trong đó m là tham số thực.
1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số đã cho, với $m = 0$
2. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $\left(0;+\infty\right)$.

Giải :

1. Với $m = 0$, ta có hàm số $y = -x^3 - 3x^2 + 4$

* Hàm số đã cho xác định trên $\mathbb{R}$

* Giới hạn : $\lim\limits_{x\to-\infty} y = -\infty$ $\lim\limits_{x\to+\infty} y = +\infty$ hàm số không có tiệm cận.

* Đạo hàm : $y' = -3x^2 - 6x$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2, y\left(-2\right) = 0 \\ x = 0, y\left(0\right) = 4 \end{array}\right.$$

Hàm số đồng biến trên khoảng $\left(-2;0\right)$, nghịch biến trên các khoảng

$\left(-\infty;2\right)$ và $\left(0;+\infty\right)$

Hàm số có điểm cực đại tại $x = 0, y\left(0\right) = 4$ và có điểm cực tiểu tại $x = -2, y\left(-2\right) = 0$

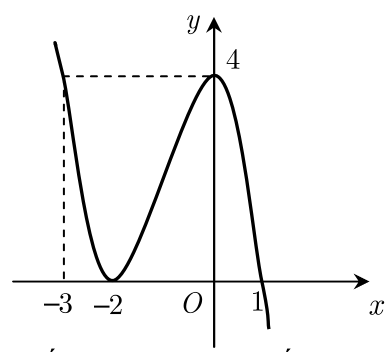
* Bảng biến thiên :

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
y'		$-$		0		$+$	
	0		$-$				
y	$+\infty$	↘	0	↗	4	↘	$-\infty$

* Đồ thị :

Giao điểm của đồ thị với trục Oy $A\left(0;4\right)$

Giao điểm của đồ thị với trục Ox $B\left(-2;0\right), C\left(1;0\right)$



2. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $\left(0;+\infty\right)$.

Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $\left(0;+\infty\right)$ khi và chỉ khi

$y' = -3x^2 - 6x + m \le 0, \forall x > 0 \Leftrightarrow m \le 3x^2 + 6x = f\left(x\right)$

Hàm số $f\left(x\right) = 3x^2 + 6x$ liên tục trên $\left(0;+\infty\right)$

Ta có $f'\left(x\right) = 6x + 6 > 0, \forall x > 0$ và $f\left(0\right) = 0$.

Bảng biến thiên

x	0		$+\infty$
y'		$+$	
y	0	$\nearrow$	$+\infty$

Từ đó ta được : $m \le 0$.

Bài tập tự luyện

1. $a)$ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị $\left(C\right)$ của hàm số

$f\left(x\right) = -x^3 + \dfrac{3}{2}x^2 + 6x - 3$.Chứng minh rằng phương trình

$-x^3 + \dfrac{3}{2}x^2 + 6x - 3 = 0$ có ba nghiệm phân biệt , trong đó có một nghiệm dương nhỏ hơn $\dfrac{1}{2}$.

$b)$ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị $\left(C\right)$ của hàm số

$f\left(x\right) = \dfrac{1}{3}x^3 - 2x^2 + \dfrac{17}{3}$.Chứng minh rằng phương trình $f\left(x\right) = 0$ có 3 nghiệm phân biệt.

$c)$ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị $\left(C\right)$ của hàm số

$f\left(x\right) = -x^3 + 3x^2 + 9x + 2$. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị $\left(C\right)$ tại điểm có hoành độ x_0, biết rằng $f''\left(x_0\right) = -6$. Giải bất phương trình

$f'\left(x - 1\right) > 0$

$d)$ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$ .Tìm tất cả các đường thẳng đi qua điểm $M\left(4;4\right)$ và cắt đồ thị $\left(C\right)$ tại 3 điểm phân biệt.

2. Tìm hệ số a, b, c sao cho đồ thị của hàm số $f\left(x\right) = x^3 + ax^2 + bx + c$ cắt trục tung tại điểm có tung
độ bằng 2 và tiếp xúc với đường thẳng $y = 1$ tại điểm có hoành độ là -1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số với giá trị a, b, c vừa tìm được

3. Tìm các hệ số m, n, p sao cho hàm số $f\left(x\right) = -\frac{1}{3}x^3 + mx^2 + nx + p$ đạt cực đại tại điểm $x = 3$ và đồ thị $\left(C\right)$ tiếp xúc với đường thẳng $\left(d\right): y = 3x - \frac{1}{3}$ tại giao điểm của $\left(C\right)$ với trục tung .

Hướng dẫn :

1. $a)$ Từ bảng biến thiên ta thấy phương trình cho có ba nghiệm phân biệt $x_1 < -1 < x_2 < 2 < x_3$ và $\begin{cases} f\left(0\right) = -3 < 0 \\ f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} > 0 \end{cases} \Rightarrow f\left(0\right).f\left(\frac{1}{2}\right) < 0 \Rightarrow x \in \left(0;\frac{1}{2}\right)$.

$b)$ $f\left(-2\right)f\left(0\right) < 0$ .Hàm số f liên tục trên đoạn $\left[0;2\right]$ và theo định lý về giá trị trung gian của hàm số liên tục , tồn tại một số thực $\alpha \in \left(-2;0\right)$ sao cho $f\left(\alpha\right) = 0$. Số α là một nghiệm của phương trình $f\left(x\right) = 0$. Mặt khác hàm số f đồng biến trên khoảng $\left(0;+\infty\right)$ nên phương trình có nghiệm duy nhất $\alpha \in \left(-2;0\right)$.

$f\left(0\right)f\left(4\right) < 0$. Hàm số f liên tục trên đoạn $\left[0;4\right]$ và theo định lý về giá trị trung gian của hàm số liên tục , tồn tại một số thực $\beta \in \left(0;4\right)$ sao cho $f\left(\beta\right) = 0$. Số β là một nghiệm của phương trình $f\left(x\right) = 0$. Mặt khác hàm số f đồng biến trên khoảng $\left(0;4\right)$ nên phương trình có nghiệm duy nhất $\beta \in \left(0;4\right)$.

Tương tự phương trình có nghiệm duy nhất thuộc khoảng $\left(4;+\infty\right)$.

Đồ thị cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt , do đó phương trình $f\left(x\right) = 0$ có 3 nghiệm phân biệt.

$c)$ $f''\left(x\right) = -6x + 6 \Rightarrow x_0 = 2, f\left(2\right) = 24 \Rightarrow \left(t\right): y = 9x + 6$

$f'\left(x-1\right) = -3\left(x-1\right)^2 + 6\left(x-1\right) + 9 = -3x^2 + 12x$

$\Rightarrow f'\left(x\right) > 0 \Leftrightarrow 0 < x < 4$

2.

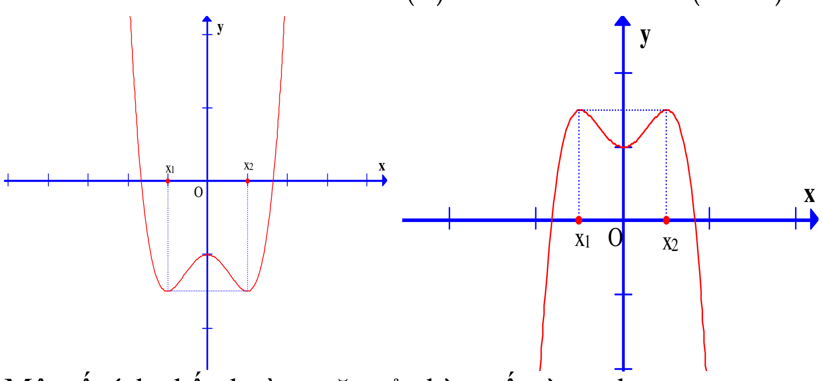
$$\begin{cases} 2 = c \\ f(-1) = -1 + a - b + c = 1 \\ f'(-1) = 3 - 2a + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 3 \\ c = 2 \end{cases}$$

3.

$$\begin{cases} (d) \cap Oy = \left\{ A\left(0; -\dfrac{1}{3}\right) \right\} \\ f(0) = p = -\dfrac{1}{3} \\ f'(0) = n = 3 \\ f'(3) = 6m - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p = -\dfrac{1}{3} \\ n = 3 \\ m = 1 \end{cases}$$

Hàm số trùng phương $f(x) = ax^4 + bx^2 + c \quad (a \neq 0)$

Dáng điệu đồ thị của hàm số $f(x) = ax^4 + bx^2 + c \quad (a \neq 0)$



Một số tính chất thường gặp của hàm số trùng phương

1. Đồ thị của hàm số $f(x) = ax^4 + bx^2 + c \ (a \neq 0)$ cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt lập thành cấp số cộng khi phương trình: $aX^2 + bX + c = 0, \left(X = x^2 \geq 0\right)$ có 2 nghiệm dương phân biệt thỏa $X_1 = 9X_2$.

2. Phương trình trùng phương: $ax^4 + bx^2 + c = 0 \quad (1)$

Đặt $t = x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{t}$, ta có phương trình: $at^2 + bt + c = 0 \ (2)$ Một nghiệm dương của (2) ứng với 2 nghiệm của (1).

Vậy điều kiện cần và đủ để phương trình (1) có nghiệm là phương trình (1) có ít nhất một nghiệm không âm.

(1) có 4 nghiệm $\Leftrightarrow$ (2) có 2 nghiệm dương $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0 \\ \dfrac{S}{2} > 0 \end{cases}$

(1) có 3 nghiệm $\Leftrightarrow$ (2) có 1 nghiệm dương và 1 nghiệm bằng 0 $\Leftrightarrow \begin{cases} P = 0 \\ \dfrac{S}{2} > 0 \end{cases}$

(1) có 2 nghiệm $\Leftrightarrow$ (2) có 1 nghiệm dương $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} P < 0 \\ \begin{cases} \Delta = 0 \\ \dfrac{S}{2} > 0 \end{cases} \end{array}\right.$

(1) có 1 nghiệm $\Leftrightarrow$ (2) có nghiệm thỏa $\left[\begin{array}{l} t_1 < 0 = t_2 \\ t_1 = t_2 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} P = 0 \\ \dfrac{S}{2} < 0 \end{cases} \\ \begin{cases} \Delta = 0 \\ \dfrac{S}{2} = 0 \end{cases} \end{array}\right.$

(1) vô nghiệm $\Leftrightarrow$ (2) vô nghiệm hoặc có 2 nghiệm âm $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \Delta < 0 \\ \begin{cases} \Delta \ge 0 \\ P > 0 \\ \dfrac{S}{2} < 0 \end{cases} \end{array}\right.$

(1) có 4 nghiệm tạo thành cấp số cộng $\Leftrightarrow \begin{cases} 0 < t_1 < t_2 \\ \sqrt{t_2} = 3\sqrt{t_1} \end{cases}$. Ta giải hệ pt:

$$\begin{cases} t_2 = 9t_1 \\ S = t_1 + t_2 \\ P = t_1 t_2 \end{cases}$$

3. Phương trình bậc 4 có tính đối xứng: $ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0 \quad (1)$

- Nếu $a = 0$, ta có phương trình: $x(bx^2 + cx + b) = 0$
- Nếu $a \ne 0$, ta có phương trình tương đương:

$$a\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + b\left(x + \frac{1}{x}\right) + c = 0$$

Đặt $t = x + \frac{1}{x}$, phương trình được viết thành:

$a(t^2 - 2) + bt + c = 0, \left|t\right| \geq 2 \ \left(2\right)$

Chú ý:

Khi khảo sát hàm số $t = x + \frac{1}{x}$, ta có:

* Một nghiệm lớn hơn 2 của phương trình $\left(2\right)$ tương ứng với 2 nghiệm dương của phương trình $\left(1\right)$.

* Một nghiệm nhỏ hơn 2 của phương trình $\left(2\right)$ tương ứng với 2 nghiệm âm của phương trình $\left(1\right)$.

* Một nghiệm $t = -2$ của phương trình $\left(2\right)$ tương ứng với nghiệm $x = -1$ của phương trình $\left(1\right)$.

* Một nghiệm $t = 2$ của phương trình $\left(2\right)$ tương ứng với nghiệm $x = 1$ của phương trình $\left(1\right)$.

* Phương trình $t = x + \frac{1}{x}$ vô nghiệm khi $\left|t\right| < 2$

4. Phương trình bậc 4 có tính đối xứng: $ax^4 + bx^3 + cx^2 - bx + a = 0 \quad \left(1\right)$

- Nếu $a = 0$, ta có phương trình: $x(bx^2 + cx - b) = 0$
- Nếu $a \neq 0$, ta có phương trình tương đương:

$a\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + b\left(x - \frac{1}{x}\right) + c = 0$

Đặt $t = x - \frac{1}{x}$, phương trình được viết thành:

$a(t^2 + 2) + bt + c = 0, t \in \mathbb{R} \quad \left(2\right)$

Chú ý: Phương trình $t = x - \frac{1}{x}$ có 2 nghiệm trái dấu với mọi t

5. $(x + a)(x + b)(x + c)(x + d) = e$, với $a + b = c + d$.
Đặt $t = x^2 + (a + b)x$.

6. $(x + a)^4 + (x + b)^4 = c$, với $\alpha = \frac{a - b}{2}$. Đặt $t = x + \frac{a + b}{2}$, $t \in \mathbb{R}$

Ví dụ 1: Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = x^4 - 2x^2 - 3$.

Giải:

* Hàm số đã cho xác định trên $\mathbb{R}$

* Giới hạn : $\lim\limits_{x\to-\infty} y = \lim\limits_{x\to+\infty} y = +\infty$ hàm số không có tiệm cận.

* Đạo hàm : $f'(x) = 4x^3 - 4x = 4x(x^2-1)$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0, f(0) = -3 \\ x = -1, f(-1) = -4 \\ x = 1, f(-1) = -4 \end{array}\right.$$

* Bảng biến thiên :

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$		0		$+$		0	
	$-$	0	$+$						
y	$+\infty$	$\searrow$	-4	$\nearrow$	-3	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-1;0)$ và $(1;+\infty)$, nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-1)$ và $(0;1)$

Hàm số có điểm cực đại tại $x = 0, f(0) = -3$ và có điểm cực tiểu tại

$x = -1, f(-1) = -4$ và $x = 1, f(1) = -4$

* $f''(x) = 12x^2 - 4$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}, f\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right) = -3\dfrac{5}{9} \\ x_2 = \dfrac{\sqrt{3}}{3}, f\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right) = -3\dfrac{5}{9} \end{array}\right., f''(x) \text{ đổi dấu hai lần qua nghiệm}$$

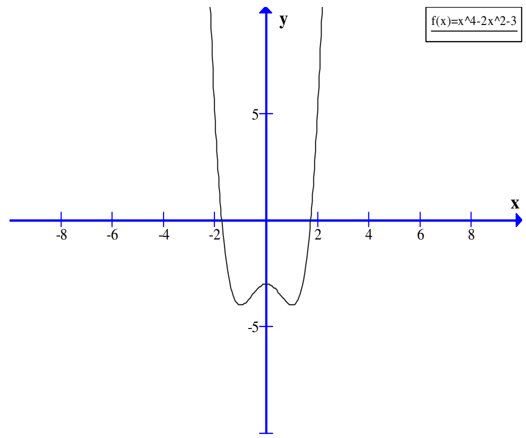
$x = x_1 = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ và $x = x_2 = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ nên $U_1\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3};-3\dfrac{5}{9}\right)$ và $U_2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3};-3\dfrac{5}{9}\right)$ là hai điểm uốn của đồ thị .

* Đồ thị :

Giao điểm của đồ thị với trục Oy $A(0;-3)$

Giao điểm của đồ thị với trục Ox $B(-\sqrt{3};0), C(\sqrt{3};0)$

Đồ thị là hàm số chẵn nên nhận trục Oy làm trục đối xứng



Ví dụ 2: Chứng minh rằng phương trình: $x^4 - 2(m^2+2)x^2 + m^4 + 3 = 0$ luôn có 4 nghiệm phân biệt x_1, x_2, x_3, x_4 với mọi giá trị của m.

Tìm giá trị m sao cho $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 = 11$.

Giải:

$x^4 - 2(m^2+2)x^2 + m^4 + 3 = 0 \ (1)$

Đặt : $t = x^2$, ta có : $t^2 - 2(m^2+2)t + m^4 + 3 = 0 (2) \quad (t \geq 0)$

Ta chứng tỏ (2) luôn có hai nghiệm : $0 < t_1 < t_2$.

$\Delta' = (m^2+2)^2 - (m^4+3) = 4m^2 + 1 > 0$ với mọi m.

Vậy (2) luôn có hai nghiệm phân biệt t_1, t_2 và $t_1 \cdot t_2 = m^4 + 3 > 0$

$t_1 + t_2 = 2(m^2+2) > 0$

Do đó phương trình (1) có 4 nghiệm : $-\sqrt{t_1}, \sqrt{t_1}, -\sqrt{t_2}, \sqrt{t_2}$

$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4$

$= (-\sqrt{t_1})^2 + (\sqrt{t_1})^2 + (-\sqrt{t_2})^2 + (\sqrt{t_2})^2 + (-\sqrt{t_1})\cdot(\sqrt{t_1})\cdot(-\sqrt{t_2})\cdot(\sqrt{t_2}) = 2(t_1+t_2) + t_1 \cdot t_2$

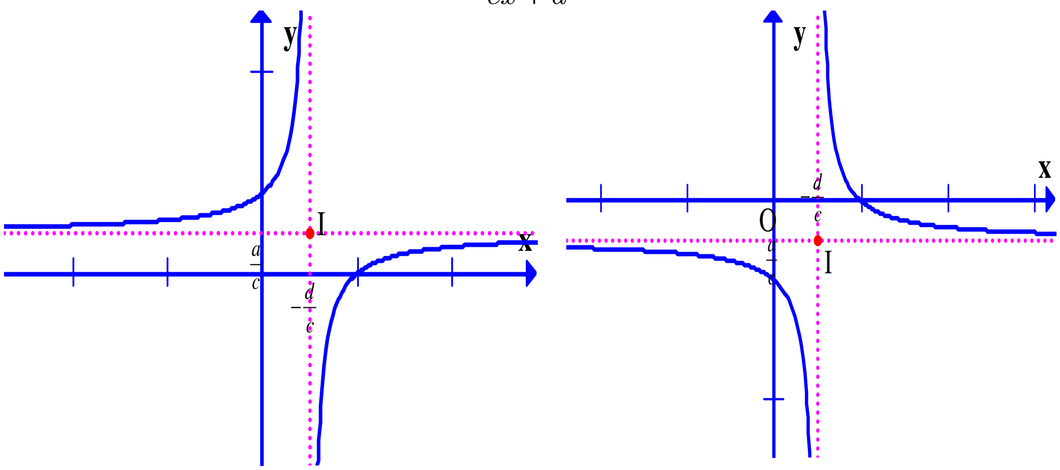
$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 = 4(m^2+2) + m^4 + 3 = m^4 + 4m^2 + 11$

$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 = 11 \Leftrightarrow m^4 + 4m^2 + 11 = 11 \Leftrightarrow m^4 + 4m^2 = 0 \Leftrightarrow m = 0$

Hàm số hữu tỷ $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d} \quad (c \neq 0, ad-bc \neq 0) \Rightarrow f'(x) = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$$

Dáng điệu đồ thị của hàm số $f\left(x\right) = \dfrac{ax + b}{cx + d}$ $\left(c \neq 0, ad - bc \neq 0\right)$



Ví dụ: Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = \dfrac{2x - 1}{x - 1}$

Giải :

* Hàm số đã cho xác định $D = \mathbb{R} \setminus \left\{1\right\}$

* Giới hạn :

$\lim\limits_{x \to 1^-} y = -\infty$ $\lim\limits_{x \to 1^+} y = +\infty \Rightarrow x = 1$ là tiệm cận đứng

$\lim\limits_{x \to -\infty} y = \lim\limits_{x \to +\infty} y = 2 \Rightarrow y = 2$ là tiệm cận ngang.

* Đạo hàm : $y' = \dfrac{-1}{(x-1)^2} < 0, x \neq 1$.

Đồ thị của hàm số nghịch biến trên các khoảng $\left(-\infty; 1\right)$ và $\left(1; +\infty\right)$.

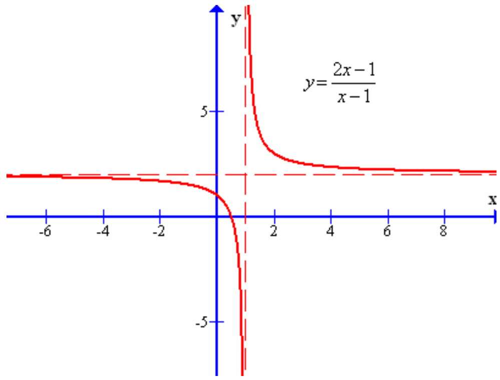
* Bảng biến thiên :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		$-$	||	$-$	
y	2 ↘		$-\infty$ || $+\infty$		↘ 2

* Đồ thị : Giao điểm của đồ thị với trục Oy $A\left(0;1\right)$

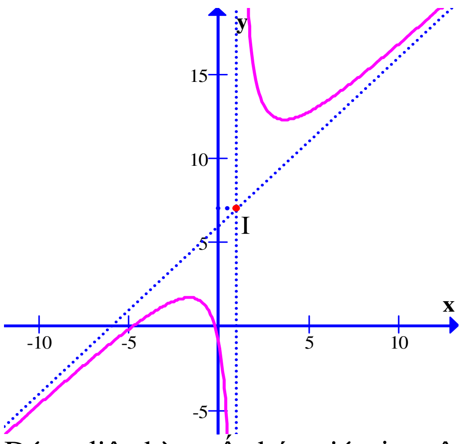
Giao điểm của đồ thị với trục Ox $B\left(\dfrac{1}{2};0\right)$

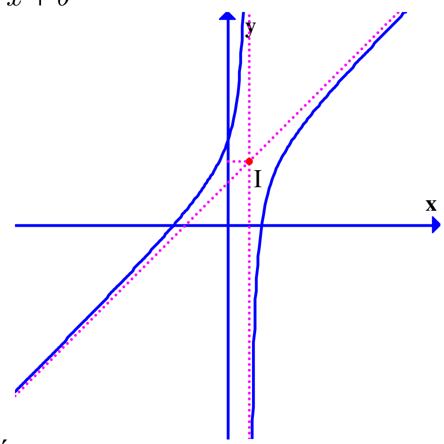
Đồ thị của hàm số nhận $I\left(1;2\right)$ giao điểm hai đường tiệm cận làm tâm đối xứng.



Hàm số hữu tỷ $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{a'x+b'}\Rightarrow y'=\dfrac{aa'x^2+2ab'x+bb'-ca'}{\left(a'x+b'\right)^2}$

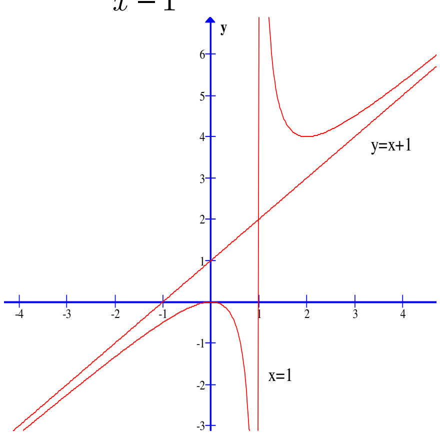
Dáng điệu đồ thị của hàm số $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{a'x+b'}$

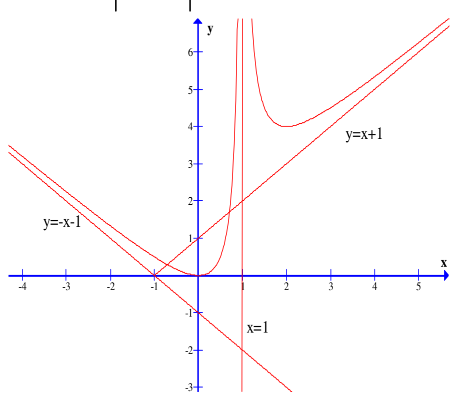




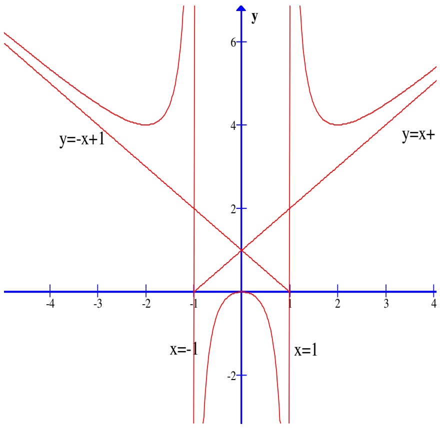
Dáng điệu hàm số chứa giá trị tuyệt đối

$f\left(x\right)=\dfrac{x^2}{x-1}$ $\left(C\right)$ $\qquad$ $f\left(x\right)=\left|\dfrac{x^2}{x-1}\right|$ $\left(C_1\right)$

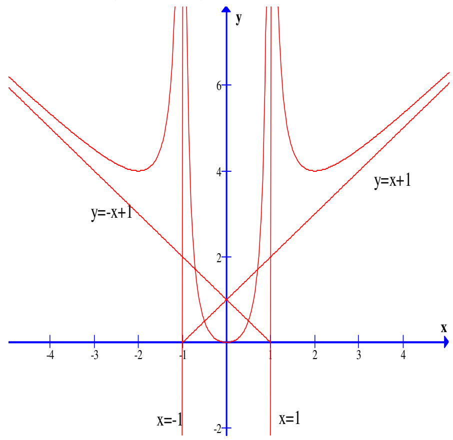




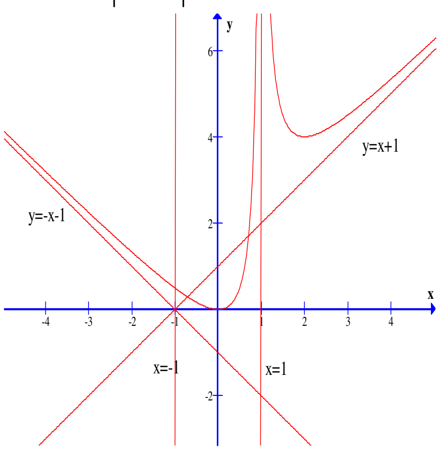
$f\left(x\right) = \dfrac{x^2}{\left|x\right| - 1}$ $\left(C_2\right)$



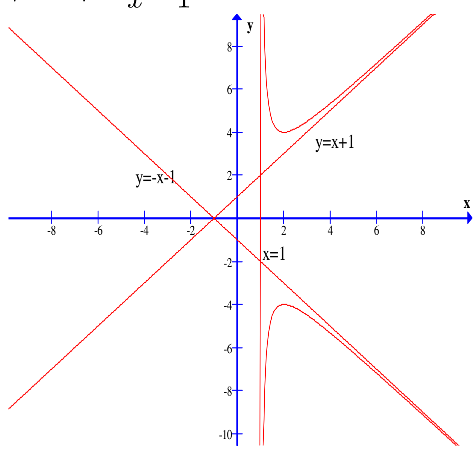
$f\left(x\right) = \left|\dfrac{x^2}{\left|x\right| - 1}\right|$ $\left(C_3\right)$



$f\left(x\right) = \dfrac{x^2}{\left|x - 1\right|}$ $\left(C_4\right)$



$\left|f\left(x\right)\right| = \dfrac{x^2}{x - 1}$ $\left(C_5\right)$



Ví dụ 1: Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = \dfrac{x^2 - 3x + 6}{x - 1}$

Giải :

* Hàm số đã cho xác định $D = \mathbb{R} \setminus \left\{1\right\}$

* Giới hạn :

$\lim\limits_{x \to 1^-} y = -\infty$ $\lim\limits_{x \to 1^+} y = +\infty$ $\lim\limits_{x \to -\infty} y = -\infty$ $\lim\limits_{x \to +\infty} y = +\infty \Rightarrow x = 1$ là tiệm cận đứng

$\lim\limits_{x \to -\infty} \left[y - \left(x - 2\right)\right] = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{4}{x - 1} = 0, \lim\limits_{x \to +\infty} \left[y - \left(x - 2\right)\right] = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{4}{x - 1} = 0$ là

$\Rightarrow y = x - 2$ tiệm cận xiên.

* Đạo hàm : $y' = \dfrac{x^2 - 2x - 3}{(x-1)^2}, x \neq 1$.

$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1, f(-1) = -5 \\ x = 3, f(3) = 3 \end{array}\right.$

* Bảng biến thiên :

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	||	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$		$\searrow$ $-\infty$	|| $+\infty$	$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$ *và* $(3;+\infty)$, nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$ *và* $(1;3)$

Hàm số có điểm cực đại tại $x = -1, f(-1) = -5$ và có điểm cực tiểu tại $x = 3, f(3) = 3$

* Đồ thị : Dành cho bạn đọc

Ví dụ 2: Cho hàm số $y = \dfrac{mx^2 + (2m-1)x - 1}{x+2}$ có đồ thị là (C_m), m là tham số .

1.Chứng minh rằng với mọi $m > 0$ hàm số luôn có cực đại , cực tiểu .

2.Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số với $m = 1$.

3.Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị (C) của hàm số biết tiếp tuyến đi qua $A(1;0)$.

Giải :

$y = mx - 1 + \dfrac{1}{x+2}$. Hàm số cho xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$

1. $y' = m - \dfrac{1}{(x+2)^2} = \dfrac{m(x+2)^2 - 1}{(x+2)^2}$.

Với $m > 0$ thì phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt khác -2. Vậy hàm số luôn có cực đại và cực tiểu khi $m > 0$.

2.Với $m = 1, y = x - 1 + \dfrac{1}{x+2}$

* Hàm số cho xác định $D = \mathbb{R} \setminus \left\{-2\right\}$

* $\lim\limits_{x\to-\infty} y = -\infty$ và $\lim\limits_{x\to+\infty} y = +\infty$

Vì $\lim\limits_{x\to(-2)^-} y = -\infty$ và $\lim\limits_{x\to(-2)^+} y = +\infty$ nên đường thẳng $x = -2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Vì $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[y-\left(x-1\right)\right] = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x+2} = 0$ và $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[y-\left(x-1\right)\right] = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x+2} = 0$ nên đường $y = x-1$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số.

* $y' = 1 - \dfrac{1}{\left(x+2\right)^2} = \dfrac{\left(x+2\right)^2-1}{\left(x+2\right)^2}, x \neq -2$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \left(x+2\right)^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1, y\left(-1\right) = -1 \\ x = -3, y\left(-3\right) = -5 \end{array}\right.$$

* Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-3		-2		-1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	||	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	-5	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Đồ thị của hàm số đồng biến trên các khoảng : $\left(-\infty;-3\right),\left(-1;+\infty\right)$ và nghịch biến trên các khoảng $\left(-3;-2\right),\left(-2;-1\right)$

Đồ thị của hàm số đạt điểm cực đại tại $x = -3, y\left(-3\right) = -5$ và đạt điểm cực tiểu tại $x = -1, y\left(-1\right) = -1$.

Đồ thị: Học sinh tự vẽ

3.Xét $\left(d\right)$ đi qua $A\left(1;0\right)$ và có hệ số góc k. Nên $\left(d\right): y = k\left(x-1\right)$

$\left(d\right)$ tiếp xúc với đồ thị $\left(C\right)$ của hàm số khi hệ sau có nghiệm:

$$\begin{cases} x-1+\dfrac{1}{x+2} = k(x-1) \\ 1-\dfrac{1}{\left(x+2\right)^2} = k \end{cases} \Rightarrow k = \frac{5}{9}.\text{Vậy tiếp tuyến là: } \left(d\right): y = \frac{5}{9}(x-1)$$

Ví dụ 3: Cho hàm số $y = \dfrac{x^2+3}{x-1}$ $\left(1\right)$

1. Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số (1)

2. Tìm trên đường thẳng $y = 4$ các điểm mà từ đó kẻ được đúng 2 tiếp tuyến đến đồ thị hàm số.

Giải :

1. Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số $y = \dfrac{x^2+3}{x-1} \quad (1)$

Hàm số cho xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

* $y' = \dfrac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}, x \neq 1 \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1, y(-1)=-2 \\ x=3, y(3)=6 \end{array}\right.$

Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-1;1),(1;\ 3)$ đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-1),(3;+\infty)$.

Đồ thị của hàm số đạt điểm cực đại tại $(-1;-2)$ và đạt điểm cực tiểu tại $(3;6)$.

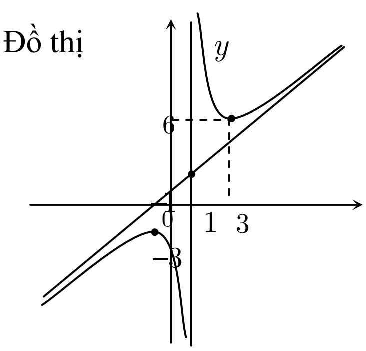
* $\lim\limits_{x\to1^-} y = -\infty, \lim\limits_{x\to1^+} y = +\infty \Rightarrow x = 1$ là tiệm cận đứng.

* $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[y-(x+1)\right] = 0, \lim\limits_{x\to+\infty}\left[y-(x+1)\right] = 0 \Rightarrow y = x+1$ là tiệm cận xiên.

* Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	-2	↘ $-\infty$	‖ $+\infty$	↘	6	↗	$+\infty$

Đồ thị



Đồ thị : Nhận $\mathrm{I}(1;2)$ làm tâm đối xứng.

2. Tìm trên đường thẳng $y = 4$ các điểm mà từ đó kẻ được đúng 2 tiếp tuyến đến đồ thị hàm số.

Gọi $\mathrm{M}(a;4) \in (d) : y = 4$ là điểm cần tìm .

Khi đó tiếp tuyến với (C) kẻ từ M có phương trình : $(\Delta) : y = k(x-a)+4$.

Để $\left(\Delta\right)$ tiếp xúc với $\left(C\right) \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2+3}{x-1} = k\left(x-a\right)+4 & \left(1\right) \\ \dfrac{x^2-2x-3}{\left(x-1\right)^2} = k & \left(2\right) \end{cases}$ có nghiệm $x \neq 1$

Từ $\left(1\right),\left(2\right) \Rightarrow \left(3-a\right)x^2 + 2\left(a-7\right)x + 3a + 7 = 0\left(3\right)$

Để từ M kẻ được đúng 2 tiếp tuyến đến đồ thị hàm số. Khi phương trình $\left(3\right)$ có 2 nghiệm phân biệt $x \neq 1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3-a \neq 0 \\ \Delta = \left(a-7\right)^2 - \left(3a+7\right).\left(3-a\right) > 0 \\ 3-a+2\left(a-7\right)+3a+7 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 3 \\ a^2 - 4a + 7 > 0 \\ a \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 3 \\ a \neq 1 \end{cases}$$

Vậy tập hợp các điểm cần tìm là đường thẳng $\left(d\right): y = 4$ bỏ đi các điểm $\left(1;\ 4\right),\left(3;\ 4\right)$.

Bài 7: GIAO ĐIỂM CỦA HAI ĐỒ THỊ

Phương pháp :

- Lập phương trinh hoành độ giao điểm của hai đồ thị $\left(C\right): y = f\left(x\right)$ và $\left(C'\right): y = g\left(x\right)$ là : $f\left(x\right) = g\left(x\right)$ $\left(*\right)$.
- Biện luận số nghiệm của phương trình $\left(*\right)$, số nghiệm phương trình $\left(*\right)$ là số giao điểm của $\left(C\right)$ và $\left(C'\right)$.

Ví dụ 1 : Cho hàm số $y = \dfrac{x-3}{x-2}$ có đồ thị là $\left(C\right)$. Tìm tất cả tham số thực m để đường thẳng $\left(d\right): y = mx+1$ cắt đồ thị của hàm số tại 2 điểm phân biệt.

Giải :

Đồ thị là $\left(C\right)$ cắt $\left(d\right)$ tại 2 điểm phân biệt khi và chỉ khi phương trình :

$\dfrac{x-3}{x-2} = mx+1$ có 2 nghiệm phân biệt khi đó phương trình

$g(x) = mx^2 - 2mx + 1 = 0$ có 2 nghiệm phân biệt $x \neq 2$ hay

$$\begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta' = m^2 - m > 0 \\ g(2) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m < 0 \vee m > 1 \\ 4m - 4m + 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < 0 \\ m > 1 \end{array}\right.$$

Bài tập tương tự:

1. Tìm tất cả tham số thực m để đường thẳng $(d): y = mx + 4$ cắt đồ thị của hàm số $y = \dfrac{x^2}{x-1}$ tại 2 điểm phân biệt.

2. Giả sử (d) là đường thẳng đi qua $A(-3;1)$ và có hệ số góc m. Tìm tất cả tham số thực m để đường thẳng (d) cắt đồ thị của hàm số $y = x^3 + 3x^2 + 1$ tại 3 điểm phân biệt.

Ví dụ 2 :Cho hàm số $y = \dfrac{2x-1}{x+1}$ có đồ thị (C). Gọi (d_m) là đường thẳng đi qua điểm $A(-2;2)$ và có hệ số góc m. Tìm m để đường thẳng (d_m) cắt đồ thị (C)

- Tại hai điểm phân biệt?.
- Tại hai điểm thuộc hai nhánh của đồ thị ?.

Giải :

$(d_m): y = mx + 2(m+1)$

$(d_m) \cap (C): g(x) = mx^2 + 3mx + 2m + 3 = 0, x \neq -1 (*)$

- Để $(d_m) \cap (C)$ tại hai điểm phân biệt khi phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt khác -1. Khi đó ta có hệ : $\begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta > 0 \\ g(-1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < 0 \\ m > 12 \end{array}\right.$

- Để $(d_m) \cap (C)$ tại hai điểm thuộc hai nhánh khi phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt $x_1 < -1 < x_2 \Leftrightarrow mg(-1) < 0 \Leftrightarrow m < 0$.

Cách khác : Để $(d_m) \cap (C)$ tại hai điểm thuộc hai nhánh khi phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt $x_1 < -1 < x_2$. Đặt $x = t - 1$ khi đó phương trình $(*)$ trở thành tìm m để phương trình $mt^2 + mt + 3 = 0$ có hai nghiệm trái dấu.

Ví dụ 3 : Tìm tham số m để đường thẳng $\left(d_m\right): y = m\left(x+1\right) - 2$ cắt đồ thị hàm số $\left(C\right): y = \dfrac{x+1}{x-1}$ tại hai điểm phân biệt A, B sao cho hai điểm A, B đối xứng nhau qua $M\left(1;0\right)$.

Giải :

- Điều kiện cần: đường thẳng $\left(d_m\right)$ cắt đồ thị hàm số $\left(C\right)$ tại hai điểm phân biệt A, B sao cho hai điểm A, B đối xứng nhau qua $M\left(1;0\right)$ thì điểm M thuộc đường thẳng $\left(d_m\right)$, do đó $0 = m\left(1+1\right) - 2 \Leftrightarrow m = 1$.
- $m = 1$ thì $\left(d_m\right) \equiv \left(d\right): y = x - 1$, phương trình hoành độ giao điểm $\left(d\right)$ và

$\left(C\right)$ là $\dfrac{x+1}{x-1} = x - 1 \Leftrightarrow x^2 - 3x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \Rightarrow y = -1 \Rightarrow A\left(0;-1\right) \\ x = 3 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow B\left(3;2\right) \end{array}\right.$

Vì trung điểm AB là $\left(\dfrac{3}{2};\dfrac{1}{2}\right) \neq M$ nên A, B không đối xứng qua M.

Do đó không có giá trị nào của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Ví dụ 4: Cho hàm số $y = x^3 - 3m^2x + 2m$ có đồ thị là $\left(C_m\right)$. Tìm m để $\left(C_m\right)$ cắt Ox tại đúng 2 điểm phân biệt.

Giải:

* Hàm số đã cho xác định trên $\mathbb{R}$.

* Ta có : $y' = 3x^2 - 3m^2$

Để $\left(C_m\right)$ cắt Ox tại đúng 2 điểm phân biệt khi $\left(C_m\right)$ có 2 cực trị đồng thời $y_{CĐ} = 0$ hoặc $y_{CT} = 0$.

* $\left(C_m\right)$ có 2 cực trị $\Leftrightarrow y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow 3x^2 - 3m^2 = 0$ có 2 nghiệm phân biệt .Khi $m \neq 0$ thì $y' = 0 \Leftrightarrow x = \pm m$.

Bảng xét dấu y':

x		$-m$		m	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$

$y_{CĐ} = y(-m) = 0 \Leftrightarrow 2m^3 + 2m = 0 \Leftrightarrow m = 0$ (loại)

$y_{CT} = y(m) = 0 \Leftrightarrow -2m^3 + 2m = 0 \Leftrightarrow m = 0 \vee m = \pm 1$

Vậy, $m = \pm 1$ thì $\left(C_m\right)$ cắt Ox tại đúng 2 điểm phân biệt.

Ví dụ 5: Tìm m để đồ thị $\left(C_m\right): y = x^3 - 3mx^2 - 3x + 3m + 2$ cắt trục Ox

tại 3 điểm phân biệt có hoành độ là x_1, x_2, x_3 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \geq 15$.

Giải :

(C_m) cắt trục Ox : $x^3 - 3mx^2 - 3x + 3m + 2 = 0$

$\Leftrightarrow (x-1)[x^2 - (3m-1)x - 3m - 2] = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x^2 - (3m-1)x - 3m - 2 = 0 \quad (2) \end{array}\right.$

(C_m) cắt trục Ox tại 3 điểm phân biệt có hoành độ là x_1, x_2, x_3 với $x_3 = 1$ thì x_1, x_2 là nghiệm khác 1 của phương trình (2).Theo định lý Vi-et ta có:

$\begin{cases} x_1 + x_2 = 3m - 1 \\ x_1 x_2 = -3m - 2 \end{cases}$

Theo bài toán ta có : $\begin{cases} \Delta_{(2)} > 0 \\ 1^2 - (3m-1).1 - 3m - 2 \neq 0 \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \geq 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9m^2 + 6m + 9 > 0 \\ m \neq 0 \\ 9m^2 - 9 \geq 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow m \in (-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$.

Ví dụ 6: Tìm các giá trị của tham số m sao cho $(d) : y = x + 4$ cắt đồ thị $(C_m) : y = x^3 + 2mx^2 + (m+3)x + 4$ tại ba điểm phân biệt $A(0;4)$, B, C sao cho tam giác KBC có diện tích bằng $8\sqrt{2}$ (đvdt), biết $K(1;3)$.

Giải :

Phương trình hoành độ điểm chung của (C_m) và (d) là:

$x^3 + 2mx^2 + (m+3)x + 4 = x + 4 \quad (1) \Leftrightarrow x(x^2 + 2mx + m + 2) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ g(x) = x^2 + 2mx + m + 2 = 0 \quad (2) \end{array}\right.$

(d) cắt (C_m) tại ba điểm phân biệt $A(0;4)$, B, C $\Leftrightarrow$ phương trình (2) có 2 nghiệm phân biệt khác 0.

$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = m^2 - m - 2 > 0 \\ g(0) = m + 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -1 \vee m \geq 2 \\ m \neq -2 \end{cases} \qquad (*)$.

Mặt khác: $d(K, d) = \dfrac{|1 - 3 + 4|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

Do đó: $S_{\Delta KBC} = 8\sqrt{2} \Leftrightarrow \dfrac{1}{2} BC.d(K,d) = 8\sqrt{2} \Leftrightarrow BC = 16 \Leftrightarrow BC^2 = 256$

$\Leftrightarrow (x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2 = 256$ với x_B, x_C là hai nghiệm của phương trình (2).

$\Leftrightarrow (x_B - x_C)^2 + ((x_B + 4) - (x_C + 4))^2 = 256 \Leftrightarrow 2(x_B - x_C)^2 = 256$

$\Leftrightarrow (x_B + x_C)^2 - 4x_Bx_C = 128 \Leftrightarrow 4m^2 - 4(m+2) = 128$

$\Leftrightarrow m^2 - m - 34 = 0 \Leftrightarrow m = \dfrac{1 \pm \sqrt{137}}{2}$ (thỏa $(*)$).

Vậy $m = \dfrac{1 \pm \sqrt{137}}{2}$ thỏa yêu cầu bài toán.

Ví dụ 7 :Cho hàm số $y = \dfrac{ax+b}{x-1}$

1. Tìm a, b để đồ thị hàm số cắt trục tung tại $A(0;-1)$ và tiếp tuyến của đồ thị tại A có hệ số góc bằng -3. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số với a, b vừa tìm được .
2. Cho đường thẳng (d) có hệ số góc m và đi qua điểm $B(-2;2)$. Tìm m để (d) cắt (C) tại hai điểm phân biệt M_1, M_2. Các đường thẳng đi qua M_1, M_2 song song với các trục toạ độ tạo thành hình chữ nhật . Tính các cạnh của hình chữ nhật đó theo m, khi nào hình chữ nhật này trở thành hình vuông.

Giải :

1. $\begin{cases} A(0;-1) \in y = \dfrac{ax+b}{x-1} \\ y' = \dfrac{-a-1}{(x-1)^2} = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases} \Rightarrow y = \dfrac{2x+1}{x-1}$

2. (d) đi qua điểm $B(-2;2)$ có phương trình $y = m(x+2) + 2$

Để (d) cắt (C) tại hai điểm phân biệt M_1, M_2 khi phương trình

$m(x+2) + 2 = \dfrac{2x+1}{x-1}$ có hai nghiệm khác 1, hay phương trình

$mx^2 + mx - 2m - 3 = 0$ có hai nghiệm phân biệt khác 1, tức là

$$\begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta = m^2 + 4m(2m+3) > 0 \\ m1^2 + m1 - 2m - 3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ \left[\begin{array}{l} m < -\dfrac{4}{3} \\ m > 0 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < -\dfrac{4}{3} \\ m > 0 \end{array}\right. \quad (*)$$

Giả sử $M_1\left(x_1;y_1\right), M_2\left(x_2;y_2\right)$, hai cạnh hình chữ nhật M_1PM_2Q có độ dài là

$$M_1P = \left|x_2 - x_1\right| = \frac{\sqrt{9m^2+12m}}{\left|m\right|}, M_1Q = \left|y_2 - y_1\right| = \sqrt{9m^2+12m}$$

Hình chữ nhật M_1PM_2Q trở thành hình vuông khi và chỉ khi

$$M_1P = M_1Q \Leftrightarrow \frac{\sqrt{9m^2+12m}}{\left|m\right|} = \sqrt{9m^2+12m} \Leftrightarrow \left|m\right| = 1 \Leftrightarrow m = 1 \ \left(do\left(*\right)\right)$$

Bài tập tương tự :

1. Cho hàm số $f\left(x\right) = 2x^3 + 3x^2 + 1$ có đồ thị $\left(C\right)$ và parabol

$\left(P\right): g\left(x\right) = 2x^2 + 1$

$a)$ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số. Tùy theo giá trị của m, giải và biện luận phương trình $2x^3 + 3x^2 - m = 0$

$b)$ Chứng tỏ rằng trong số tiếp tuyến của đồ thị $\left(C\right)$ thì thiếp tuyến tại điểm uốn I có hệ số góc nhỏ nhất . Viết phương trình tiếp tuyến đó. Chứng tỏ I là tâm đối xứng của đồ thị $\left(C\right)$.

$c)$ Gọi A, B là giao điểm của đồ thị $\left(C\right)$ và parabol $\left(P\right)$. Viết phương trình tiếp tuyến của $\left(C\right)$ và parabol $\left(P\right)$ tại các giao điểm của chúng .

$d)$ Xác định trên khoảng đó $\left(C\right)$ nằm phía trên hoặc phía dưới $\left(P\right)$.

Hướng dẫn :

$c)$ $A\left(-\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right), B\left(0;1\right)$. Tiếp tuyến $\left(C\right)$ tại A, B là $y = -\frac{3}{2}x + \frac{3}{4}, y = 1$ .Tiếp tuyến $\left(P\right)$ tại A, B là $y = -2x + \frac{1}{2}, y = 1$.

$d)$ Xét $h\left(x\right) = f\left(x\right) - g\left(x\right) = 2x^3 + x^2$. Lập bảng xét dấu :

$h\left(x\right) < 0, x \in \left(-\infty;-\frac{1}{2}\right) \Rightarrow \left(C\right)$ nằm phía dưới

$\left(P\right)$. $h\left(x\right) > 0, x \in \left(-\frac{1}{2};0\right), \left(0;+\infty\right) \Rightarrow \left(C\right)$ nằm phía trên $\left(P\right)$.

2. Cho hàm số $f\left(x\right) = x^3 - 3x + 1$

$a)$ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số . Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị tại điểm uốn I của nó . Chứng minh rằng trong số tiếp tuyến của đồ thị thì tiếp tuyến tại I có hệ số góc nhỏ nhất .

$b)$ Gọi $\left(d_m\right)$ là đường thẳng đi qua điểm I có hệ số góc m . Tìm các giá trị m sao cho đường thẳng $\left(d_m\right)$ cắt đồ thị đã cho tại ba điểm phân biệt.

Hướng dẫn :

$a)$ $y = -3x + 1$ $\qquad$ $b)$ $m > -3$

3. Cho hàm số $f\left(x\right) = x^4 - \left(m+1\right)x^2 + m$

$a)$ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số với $m = 2$. Viết phương trình tiếp tuyến tại điểm uốn của đồ thị .

$b)$ Tìm các giá trị của m sao cho đồ thị của hàm số cắt trục hoành tại bốn điểm , tạo thành ba đoạn thẳng có độ dài bằng nhau .

Hướng dẫn :

$b)$ $x^4 - \left(m+1\right)x^2 + m = 0 \Leftrightarrow \left(x^2 - 1\right)\left(x^2 - m\right) = 0$. Để đồ thị của hàm số cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt , tạo thành ba đoạn thẳng có độ dài bằng nhau khi $0 < m \neq 1$.

- $m > 1, \sqrt{m} - 1 = 1 - \left(-1\right) \Leftrightarrow m = 9$
- $0 < m < 1, 1 - \sqrt{m} = \sqrt{m} - \left(-\sqrt{m}\right) \Leftrightarrow m = \dfrac{1}{9}$

Ngoài cách giải trên các bạn có thể dùng cấp số cộng (lớp 11) để giải .

4.

$a)$ Với giá trị nào của m , đường thẳng $y = m$ cắt đường cong $y = x^4 - 2x^2 - 3$ tại 4 điểm phân biệt?.

$b)$ Chứng minh rằng với mọi giá trị của m , đường thẳng $\left(d_m\right): y = x - m$ cắt đường cong $y = \dfrac{-x^2 + 2x}{x - 1}$ tại hai điểm phân biệt.

$c)$ Tìm k để đường thẳng $y = kx + 1$ cắt đồ thị hàm số $y = \dfrac{x^2 + 4x + 3}{x + 2}$ tại 2 điểm phân biệt A, B . Tìm quỹ tích trung điểm I của AB .

5. Cho hàm số $y = \dfrac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}, \left(C\right)$.

$a)$ Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số $\left(C\right)$.

$b)$ Tìm m để phương trình sau có 2 nghiệm phân biệt : $x^2 - 2x = m\left|x - 1\right| - 2$.

$c)$ Tìm m để đường thẳng $(d): y = -x + m$ cắt đồ thị (C) tại 2 điểm A, B đối xứng với nhau qua đường thẳng $y = x + 3$.

$d)$ Chứng minh rằng qua điểm $E(1;0)$ ta không thể kẻ được một tiếp tuyến nào đến đồ thị hàm số.

6. Cho hàm số $f(x) = \dfrac{x+2}{2x+1}$ có đồ thị (G)

$a)$ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số.

$b)$ Chứng minh rằng đường thẳng $(d_m): y = mx + m - 1$ luôn đi qua điểm cố định của đường cong (G) khi m thay đổi .

$c)$ Tìm các giá trị của m sao cho đường thẳng đã cho cắt đường cong (G) tại hai điểm thuộc cùng một nhánh của (G).

Hướng dẫn:

$b)$ $M(-1;-1)$ là điểm cố định mà (d_m) đi qua khi m biến thiên và $M(-1;-1) \in (G)$.

$c)$ $(d_m) \cap (G): m(x+1) - 1 = \dfrac{x+2}{2x+1}, x \neq -\dfrac{1}{2}$

$\Leftrightarrow (x+1)(2mx + m - 3) = 0, x \neq -\dfrac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 < -\dfrac{1}{2} \\ k(x) = 2mx + m - 3 = 0 \end{array}\right.$$

Hai nhánh của (G) nằm về hai bên của tiệm cận đứng $x = -\dfrac{1}{2}$. Đường thẳng $(d_m) \cap (G)$ tại hai điểm thuộc cùng một nhánh của đồ thị khi phương trình $k(x) = 2mx + m - 3 = 0$ có nghiệm $x < -\dfrac{1}{2}$ và $x \neq -1$, khi đó ta có

$$\begin{cases} m \neq 0 \\ x = \dfrac{3-m}{2m} < -\dfrac{1}{2} \\ k(-1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ \dfrac{3}{2m} < 0 \\ -m - 3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -3 < m < 0 \\ m < -3 \end{array}\right. \Leftrightarrow -3 \neq m < 0$$

Bài 8 :SỰ TIẾP XÚC CỦA HAI ĐƯỜNG CONG

Bài toán 1 :

Hai đường cong $(C): y = f(x)$ và $(C'): y = g(x)$ tiếp xúc nhau khi và chỉ khi hệ phương trình sau: $\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f'(x) = g'(x) \end{cases}$ có nghiệm.

Ví dụ 1 : Tìm tham số thực m để đường thẳng $(d): y = m(x-3)$ tiếp xúc với đồ thị $(C): y = -\frac{1}{3}x^3 + 3x$.

Giải :

(d) tiếp xúc với (C) khi hệ sau : $\begin{cases} -\frac{1}{3}x^3 + 3x = m(x-3) \\ -x^2 + 3 = m \end{cases}$ $(*)$ có nghiệm.

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^3 - 9x^2 + 27 = 0 \\ m = -x^2 + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ 2x^2 - 3x - 9 = 0 \end{array}\right. \\ m = -x^2 + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \Rightarrow m = -6 \\ x = -\frac{3}{2} \Rightarrow m = \frac{3}{4} \end{array}\right.$$

Ví dụ 2 : Tìm trên trục hoành những điểm mà từ đó có thể kẻ đến đồ thị của hàm số : $y = \frac{x^2}{x-1}$ hai tiếp tuyến tạo với nhau 1 góc 45^0.

Giải :

Gọi $M \in Ox \Rightarrow M(x_0;0)$, đường thẳng đi qua M có hệ số góc là k, phương trình có dạng : $(d): y = k(x - x_0)$.

(d) là tiếp tuyến của đồ thị khi hệ sau có nghiệm : $\begin{cases} \frac{x^2}{x-1} = k(x - x_0) \\ \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} = k \end{cases}$

$$\frac{x^2}{x-1} = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}(x - x_0) \Leftrightarrow x\left[(x_0 + 1)x - 2x_0\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \frac{2x_0}{x_0 + 1} \end{array}\right. , x_0 \neq -1$$

- $x = 0 \Rightarrow k = \dfrac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} = 0$.
- $x = \dfrac{2x_0}{x_0 + 1} \Rightarrow k = \dfrac{-4x_0}{(x_0+1)^2}$
- Tiếp tuyến qua M tạo với đồ thị của hàm số : $y = \dfrac{x^2}{x-1}$ hai tiếp tuyến tạo

với nhau 1 góc 45^0 khi và chỉ khi

$\tan 45^0 = \left|\dfrac{k_1 - k_2}{1 + k_1k_2}\right| \Rightarrow \dfrac{4x_0}{(x_0+1)^2} = 1 \Rightarrow x_0 = 3 \pm 2\sqrt{2}$.

Vậy $M\left(3 - 2\sqrt{2};0\right),\left(3 + 2\sqrt{2};0\right)$

Ví dụ 3 :Tìm tất cả các điểm trên trục hoành những điểm M mà qua đó vẽ được đúng 3 tiếp tuyến đến đồ thị (C) : $y = x^3 + 3x^2$ mà trong đó có 2 tiếp tuyến vuông góc với nhau .

Giải :

Gọi $M(a;0) \in Ox$, đường thẳng (t) đi qua M và có hệ số góc

$k \Rightarrow (t) : y = k(x-a)$.

(t) tiếp xúc với (C) khi hệ sau có nghiệm : $\begin{cases} x^3 + 3x^2 = k(x-a) & (1) \\ 3x^2 + 6x = k & (2) \end{cases}$

Từ $(1),(2)$ suy ra : $x^3 + 3x^2 = 3x^2 + 6x(x-a) \Leftrightarrow 2x^3 + 3(a-1)x^2 - 6ax = 0$

$\Leftrightarrow x\left[2x^2 - 3(a-1)x - 6a\right] = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ 2x^2 - 3(a-1)x - 6a = 0 \ (3) \end{array}\right.$

- $x = 0 \Rightarrow k = 0 \Rightarrow 1$ tiếp tuyến.

Qua M kẻ được 3 tiếp tuyến đến đến đồ thị (C) mà trong đó có 2 tiếp tuyến vuông góc với nhau .

Khi đó (3) có 2 nghiệm phân biệt $x_1, x_2 \neq 0$ và $k_1k_2 = -1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \\ \left(3x_1^2 + 6x_1\right)\left(3x_2^2 + 6x_2\right) = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ 9\left(a-1\right)^2 + 48a > 0 \\ 9\left(x_1x_2\right)^2 + 18x_1x_2\left(x_1 + x_2\right) + 36x_1x_2 = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a < -3 \vee \ a > -\dfrac{1}{3} \ \text{ và } \ a \neq 0 \\ 81a^2 - 81a\left(a-1\right) - 108a + 1 = 0 \\ \left(\text{vì } x_1x_2 = -3a \ ; \ x_1 + x_2 = \dfrac{3(a-1)}{2}\right) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a < -3 \vee \ a > -\dfrac{1}{3} \ \text{ và } \ a \neq 0 \\ -27a + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = \frac{1}{27}$$

Vậy $M\left(\dfrac{1}{27}, 0\right) \in Ox$ thỏa bài toán .

Bài toán 2 :

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị $\left(C\right): y = f\left(x\right)$ tại điểm $M\left(x_0; f\left(x_0\right)\right)$ có dạng : $y = f'\left(x_0\right)\left(x - x_0\right) + f\left(x_0\right)$.

Ví dụ 1 :Tìm tọa độ tiếp điểm của đồ thị $(C): y = \dfrac{x-4}{x-1}$ với tiếp tuyến (t), biết rằng tiếp tuyến (t) tạo với đường thẳng $(d): y = -2x + 2010$ 1 góc 45^0.

Giải :

- $D = \mathbb{R} \setminus \left\{1\right\}$
- Ta có : $y' = \dfrac{3}{\left(x-1\right)^2}, x \neq 1$
- Gọi $M\left(x_0; f\left(x_0\right)\right)$ là tọa độ tiếp điểm cần tìm thì hệ số góc tiếp tuyến (t) là

$k = \dfrac{3}{\left(x_0 - 1\right)^2}, x_0 \neq 1$.

- Vì (t) và (d) tạo nhau 1 góc 45^0 khi $\tan 45^0 = \left|\dfrac{k+2}{1-2k}\right| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k = -\dfrac{1}{3} \\ k = 3 \end{array}\right.$

* $k=-\frac{1}{3}\Leftrightarrow \frac{3}{\left(x_0-1\right)^2}=-\frac{1}{3}$ điều này không xảy ra .

* $k=3\Leftrightarrow \frac{3}{\left(x_0-1\right)^2}=3\Leftrightarrow x_0^2-2x_0=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0=0\Rightarrow y_0=4\Rightarrow M\left(0;4\right)\\ x_0=2\Rightarrow y_0=-2\Rightarrow M\left(2;-2\right)\end{array}\right.$

Ví dụ 2 : Cho hàm số $y=\frac{2x+3}{x-2}$, có đồ thị (C) . Tìm tất cả các tham số m để đường thẳng $(t): y=2x+m$ cắt (C) tại hai điểm phân biệt mà hai tiếp tuyến tại đó song song với nhau.

Giải :

Đường thẳng $(t): y=2x+m$ cắt (C) tại hai điểm phân biệt mà hai tiếp tuyến tại đó song song với nhau khi và chỉ khi phương trình $\frac{2x+3}{x-2}=2x+m$ có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2 thỏa mãn điều kiện $y'\left(x_1\right)=y'\left(x_2\right)$. Khi đó phương trình $g\left(x\right)=2x^2+\left(m-6\right)x-2m-3=0$ có 2 nghiệm phân biệt x_1,x_2 khác 2 và thỏa mãn điều kiện $-\frac{7}{\left(x_1-2\right)^2}=-\frac{7}{\left(x_2-2\right)^2}\Leftrightarrow x_1+x_2=4$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta=\left(m-6\right)^2+8\left(2m+3\right)>0\\ g\left(2\right)=2.2^2+\left(m-6\right).2-2m-3\neq 0\\ -\frac{m-6}{2}=4\end{cases}\Leftrightarrow m=2.$$

Ví dụ 3: Cho hàm số $y=\frac{2x}{x+1}$ có đồ thị là (C). Tìm trên đồ thị (C) những điểm M , sao cho tiếp tuyến tại M cắt hai trục tọa độ Ox,Oy tại hai điểm phân biệt A,B sao cho diện tích tam giác AOB có diện tích bằng $\frac{1}{4}$.

Giải :

Gọi $M\left(x_0;y_0\right)\in\left(C\right)\Rightarrow y_0=\frac{2x_0}{x_0+1}\Rightarrow y'_0=\frac{2}{\left(x_0+1\right)^2}$

Phương trình tiếp tuyến (t) của (C) tại M là : $y_0=\frac{2}{\left(x_0+1\right)^2}x+\frac{2x_0^2}{\left(x_0+1\right)^2}$.

Tiếp tuyến (t) cắt hai trục tọa độ Ox, Oy tại hai điểm phân biệt $A\left(-x_0^2;0\right)$,

$B\left(0;\dfrac{2x_0^2}{\left(x_0+1\right)^2}\right)$ sao cho diện tích tam giác AOB có diện tích bằng $\dfrac{1}{4}$ khi đó

$$\frac{1}{2}.OA.OB=\frac{1}{4}\Leftrightarrow OA.OB=\frac{1}{2}\Leftrightarrow x_0^2.\frac{2x_0^2}{\left(x_0+1\right)^2}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow 4x_0^2-\left(x_0+1\right)^2=0$$

$$\left[\begin{array}{l}2x_0^2+x_0+1=0\\ 2x_0^2-x_0-1=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=-\dfrac{1}{2}\Rightarrow M\left(-\dfrac{1}{2};-2\right)\\ x_0=1\Rightarrow M\left(1;1\right)\end{array}\right..$$

Vậy có hai điểm thỏa mãn yêu cầu bài toán $M\left(-\dfrac{1}{2};-2\right), M\left(1;1\right)$.

Ví dụ 4 : Chứng minh rằng nếu các tiếp tuyến $(d),\left(t\right)$ của đồ thị (C) : $y=x^3-6x^2+9x$ song song với nhau thì hai tiếp điểm A,B đối xứng nhau qua $M(2;2)$.

Giải :

Gọi $A\left(x_1,y\left(x_1\right)=x_1^3-6x_1^2+9x_1\right),B\left(x_2,y\left(x_2\right)=x_2^3-6x_2^2+9x_2\right)$ là tọa độ tiếp điểm của $(d),\left(t\right)$ và đồ thị (C). (d) và $\left(t\right)$ song song với nhau khi

$$y'\left(x_1\right)=y'\left(x_2\right)\Leftrightarrow 3x_1^2-12x_1+9=3x_2^2-12x_2+9\Leftrightarrow x_1+x_2=4.$$

Với $x_1+x_2=4$ thì tồn tại $t>0$: $\begin{cases}x_1=2-t\Rightarrow y\left(x_1\right)=t^3-3t+2\\ x_2=2+t\Rightarrow y\left(x_2\right)=-t^3+3t+2\end{cases}$

Dễ thấy trung điểm đoạn AB có tọa độ $\begin{cases}x_0=\dfrac{x_1+x_2}{2}=2\\ y_0=\dfrac{y\left(x_1\right)+y\left(x_2\right)}{2}=2\end{cases}$.

Do đó hai tiếp điểm A,B đối xứng nhau qua $M(2;2)$.

Ví dụ 5 : Cho hàm số $y=\dfrac{2x^2}{x-1}$.Tìm $\alpha\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$ sao cho điểm $M\left(1+\sin\alpha;9\right)$ nằm trên đồ thị (C). Chứng minh rằng, tiếp tuyến của (C) tại điểm M cắt hai tiệm cận của (C) tại hai điểm A,B đối xứng nhau qua điểm M.

Giải :

Vì $M\left(1+\sin\alpha;9\right)$ nằm trên đồ thị (C) nên:

$$\frac{2(1+\sin\alpha)^2}{1+\sin\alpha-1}=9 \Leftrightarrow 2\sin^2\alpha-5\sin\alpha+2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin\alpha=\dfrac{1}{2}\\ \sin\alpha=2\end{array}\right.$$

Vì $\alpha\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$ nên $\sin\alpha=\dfrac{1}{2}\Rightarrow\alpha=\dfrac{\pi}{6}\Rightarrow M\left(\dfrac{3}{2};9\right)$

Tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm M là: $y=y'\left(\dfrac{3}{2}\right)\left(x-\dfrac{3}{2}\right)+9$

hay $(d): y=-6x+18$.

Tiếp tuyến (d) cắt tiệm cận đứng $x=1$ tại: $A(1;12)$

Tiếp tuyến (d) cắt tiệm cận xiên tai điểm B có tọa độ là nghiệm

$(x;y)$ hệ phương trình: $\begin{cases}y=-6x+18\\ y=2x+2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\ y=6\end{cases}\Rightarrow B(2;6)$

Dễ thấy: $\begin{cases}\dfrac{x_A+x_B}{2}=\dfrac{3}{2}=x_M\\ \dfrac{y_A+y_B}{2}=9=y_M\end{cases}$

Suy ra, A,B đối xứng nhau qua điểm M *(đpcm).*

Ví dụ 6: Gọi (d) là tiếp tuyến của đồ thị $(C): y=\dfrac{2x-3}{x-2}$ tại M cắt các đường tiệm cận tại hai điểm phân biệt A,B. Tìm tọa độ điểm M sao cho đường tròn ngoại tiếp tam giác IAB có diện tích nhỏ nhất , với I là giao điểm hai tiệm cận .

Giải :

Gọi $M(x_0;y_0)\in(C)\Rightarrow y_0=\dfrac{2x_0-3}{x_0-2}, y'_0=-\dfrac{1}{(x_0-2)^2}$

Phương trình tiếp tuyến (d) của (C) tại $M: y=\dfrac{-1}{(x_0-2)^2}(x-x_0)+\dfrac{2x_0-3}{x_0-2}$

(d) cắt hai đường tiệm cận tại hai điểm phân biệt $A\left(2;\dfrac{2x_0-2}{x_0-2}\right), B(2x_0-2;2)$.

Dễ thấy M là trung điểm AB và $I(2;2)$ là giao điểm hai đường tiệm cận.

Tam giác IAB vuông tại I nên đường tròn ngoại tiếp tam giác IAB có diện tích

$$S = \pi IM^2 = \pi\left[(x_0-2)^2 + \left(\frac{2x_0-3}{x_0-2}-2\right)^2\right] = \pi\left[(x_0-2)^2 + \frac{1}{(x_0-2)^2}\right] \ge 2\pi$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $(x_0-2)^2 = \dfrac{1}{(x_0-2)^2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = 1 \Rightarrow y_0 = 1 \\ x_0 = 3 \Rightarrow y_0 = 3 \end{array}\right.$

Vậy $M(1;1)$ $M(3;3)$ thỏa mãn bài toán.

Bài toán 3 :

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị $(C): y = f(x)$ đi qua điểm $M(x_1;y_1)$

Cách 1 :

- Phương trình đường thẳng (d) đi qua điểm M có hệ số góc là k có dạng :

$y = k(x - x_1) + y_1$.

- (d) tiếp xúc với đồ thị (C) khi hệ sau $\begin{cases} f(x) = k(x-x_1) + y_1 \\ f'(x) = k \end{cases}$ có nghiệm.

Cách 2 :

- Gọi $N(x_0;y_0)$ là tọa độ tiếp điểm của đồ thị (C) và tiếp tuyến (d) qua điểm M, nên (d) cũng có dạng $y = y'_0(x - x_0) + y_0$.
- (d) đi qua điểm M nên có phương trình : $y_1 = y'_0(x_1 - x_0) + y_0 \quad (*)$
- Từ phương trình $(*)$ ta tìm được tọa độ điểm $N(x_0;y_0)$, từ đây ta tìm được phương trình đường thẳng (d).

Ví dụ 2: Cho hàm số : $y = \dfrac{x^4}{2} - 3x^2 + \dfrac{5}{2}$ có đồ thị là (C). Giả sử $M \in (C)$ có hoành độ a. Với giá trị nào của a thì tiếp tuyến của (C) tại M cắt (C) tại 2 điểm phân biệt khác M.

Giải :

Vì $M \in (C)$ nên $M\left(a; y_M = \dfrac{a^4}{2} - 3a^2 + \dfrac{5}{2}\right)$

Tiếp tuyến tại M có hệ số góc $y'_M = 2a^3 - 6a$

Tiếp tuyến tại M có dạng :

$$y = y'_{x_M}(x - x_M) + y_M \Rightarrow (d): y = (2a^3 - 6a)(x - a) + \frac{a^4}{2} - 3a^2 + \frac{5}{2}$$

Tiếp tuyến (d) của (C) tại M cắt (C) tại 2 điểm phân biệt khác M khi phương trình sau có 3 nghiệm phân biệt :

$\frac{x^4}{2} - 3x^2 + \frac{5}{2} = (2a^3 - 6a)(x - a) + \frac{a^4}{2} - 3a^2 + \frac{5}{2}$ hay phương trình

$(x-a)^2(x^2 + 2ax + 3a^3 - 6) = 0$ có 3 nghiệm phân biệt , nghĩa là phương trình

$g(x) = x^2 + 2ax + 3a^3 - 6 = 0$ có hai nghiệm phân biệt và khác a .

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta'_{g(x)} = a^2 - (3a^2 - 6) > 0 \\ g(a) = 6a^2 - 6 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - 3 < 0 \\ a^2 \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |a| < \sqrt{3} \\ a \neq \pm 1 \end{cases}$$

Vậy giá trị a cần tìm $\begin{cases} |a| < \sqrt{3} \\ a \neq \pm 1 \end{cases}$

Bài tập tương tự :

1. Tìm m để tiếp tuyến đi qua điểm $M(2; m+2)$ của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x + m$ phải đi qua gốc tọa độ O .