



Tải eBook, Đề thi, Tài liệu học tập...

Book.Key.To

CHƯƠNG IV:

PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT THEO SIN VÀ COSIN (PHƯƠNG TRÌNH CỔ ĐIỂN)

$$a \sin u + b \cos u = c (*) \cdot (a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$$

Cách 1 : Chia 2 vế phương trình cho $\sqrt{a^2 + b^2} \neq 0$

$$\text{Đặt } \cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \text{ và } \sin \alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \text{ với } \alpha \in [0, 2\pi]$$

$$\text{Thì } (*) \Leftrightarrow \sin u \cos \alpha + \cos u \sin \alpha = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\Leftrightarrow \sin(u + \alpha) = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Cách 2 :

Nếu $u = \pi + k2\pi$ là nghiệm của (*) thì :

$$a \sin \pi + b \cos \pi = c \Leftrightarrow -b = c$$

Nếu $u \neq \pi + k2\pi$ đặt $t = \tan \frac{u}{2}$ thì (*) thành :

$$a \frac{2t}{1+t^2} + b \frac{1-t^2}{1+t^2} = c$$

$$\Leftrightarrow (b+c)t^2 - 2at + c - b = 0 \quad (1) \quad (\text{với } b+c \neq 0)$$

Phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta' = a^2 - (c+b)(c-b) \geq 0$

$$\Leftrightarrow a^2 \geq c^2 - b^2 \Leftrightarrow a^2 + b^2 \geq c^2$$

Giải phương trình (1) tìm được t. Từ $t = \tan \frac{u}{2}$ ta tìm được u.

Bài 87 : Tìm $x \in \left(\frac{2\pi}{5}, \frac{6\pi}{7}\right)$ thỏa phương trình : $\cos 7x - \sqrt{3} \sin 7x = -\sqrt{2} (*)$

Chia hai vế của (*) cho 2 ta được :

$$(*) \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cos 7x - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 7x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow -\sin \frac{\pi}{6} \cos 7x + \cos \frac{\pi}{6} \sin 7x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin \left(7x - \frac{\pi}{6}\right) = \sin \frac{\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow 7x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{4} + k2\pi \text{ hay } 7x - \frac{\pi}{6} = \frac{3\pi}{4} + h2\pi, \quad (k, h \in \mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{5\pi}{84} + \frac{k2\pi}{7} \text{ hay } x = \frac{11\pi}{84} + \frac{h2\pi}{7}, k, h \in \mathbb{Z}$$

Do $x \in \left(\frac{2\pi}{5}, \frac{6\pi}{7}\right)$ nên ta phải có :

$$\frac{2\pi}{5} < \frac{5\pi}{84} + \frac{k2\pi}{7} < \frac{6\pi}{7} \text{ hay } \frac{2\pi}{5} < \frac{11\pi}{84} + \frac{h2\pi}{7} < \frac{6\pi}{7} \quad (k, h \in \mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{5} < \frac{5}{84} + \frac{k2}{7} < \frac{6}{7} \text{ hay } \frac{2}{5} < \frac{11}{84} + \frac{h2}{7} < \frac{6}{7} \quad (k, h \in \mathbb{Z})$$

Suy ra $k = 2, h = 1, 2$

$$\text{Vậy } x = \frac{5\pi}{84} + \frac{4\pi}{7} = \frac{53}{84}\pi \vee x = \frac{11\pi}{84} + \frac{2\pi}{7} = \frac{35}{84}\pi$$

$$\vee x = \frac{11\pi}{84} + \frac{4\pi}{7} = \frac{59}{84}\pi$$

Bài 88 : Giải phương trình

$$3 \sin 3x - \sqrt{3} \cos 9x = 1 + 4 \sin^3 3x (*)$$

$$\text{Ta có : } (*) \Leftrightarrow (3 \sin 3x - 4 \sin^3 3x) - \sqrt{3} \cos 9x = 1$$

$$\Leftrightarrow \sin 9x - \sqrt{3} \cos 9x = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \sin 9x - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 9x = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin \left(9x - \frac{\pi}{3} \right) = \frac{1}{2} = \sin \frac{\pi}{6}$$

$$\Leftrightarrow 9x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} + k2\pi \text{ hay } 9x - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{18} + \frac{k2\pi}{9} \text{ hay } x = \frac{7\pi}{54} + \frac{k2\pi}{9}, k \in \mathbb{Z}$$

Bài 89 : Giải phương trình

$$\operatorname{tg} x - \sin 2x - \cos 2x + 2 \left(2 \cos x - \frac{1}{\cos x} \right) = 0 (*)$$

Điều kiện : $\cos x \neq 0$

$$\text{Lúc đó : } (*) \Leftrightarrow \frac{\sin x}{\cos x} - \sin 2x - \cos 2x + 4 \cos x - \frac{2}{\cos x} = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin x - \sin 2x \cos x - \cos x \cos 2x + 4 \cos^2 x - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin x (1 - 2 \cos^2 x) - \cos x \cos 2x + 2 \cos 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow -\sin x \cos 2x - \cos x \cos 2x + 2 \cos 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x = 0 \text{ hay } -\sin x - \cos x + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x = 0 \text{ (nhận do } \cos 2x = 2 \cos^2 x - 1 = 0 \text{ thì } \cos x \neq 0) \\ \sin x + \cos x = 2 \text{ (vô nghiệm vì } 1^2 + 1^2 < 2^2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 2x = (2k + 1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

Bài 90 : Giải phương trình $8 \sin x = \frac{\sqrt{3}}{\cos x} + \frac{1}{\sin x}$ (*)

Điều kiện : $\sin 2x \neq 0$

$$\text{Lúc đó (*)} \Leftrightarrow 8 \sin^2 x \cos x = \sqrt{3} \sin x + \cos x$$

$$\Leftrightarrow 4(1 - \cos 2x) \cos x = \sqrt{3} \sin x + \cos x$$

$$\Leftrightarrow -4 \cos 2x \cos x = \sqrt{3} \sin x - 3 \cos x$$

$$\Leftrightarrow -2(\cos 3x + \cos x) = \sqrt{3} \sin x - 3 \cos x$$

$$\Leftrightarrow \cos 3x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \sin x + \frac{1}{2} \cos x$$

$$\Leftrightarrow \cos 3x = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow 3x = x + \frac{\pi}{3} + k2\pi \vee 3x = -x - \frac{\pi}{3} + k2\pi$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k\pi \vee x = -\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

Nhận so với điều kiện $\sin 2x \neq 0$

Cách khác :

$$(*) \Leftrightarrow 8 \sin^2 x \cos x = \sqrt{3} \sin x + \cos x$$

(hiển nhiên $\cos x = 0$ hay $\sin x = 0$ không là nghiệm của pt này)

$$\Leftrightarrow 8(1 - \cos^2 x) \cos x = \sqrt{3} \sin x + \cos x$$

$$\Leftrightarrow 8 \cos x - 8 \cos^3 x = \sqrt{3} \sin x + \cos x$$

$$\Leftrightarrow 6 \cos x - 8 \cos^3 x = \sqrt{3} \sin x - \cos x$$

$$\Leftrightarrow 4 \cos^3 x - 3 \cos x = \frac{1}{2} \cos x - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x$$

$$\Leftrightarrow \cos 3x = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow 3x = x + \frac{\pi}{3} + k2\pi \vee 3x = -x - \frac{\pi}{3} + k2\pi$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k\pi \vee x = -\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

Bài 91 : Giải phương trình

$$9 \sin x + 6 \cos x - 3 \sin 2x + \cos 2x = 8 (*)$$

Ta có : $(*) \Leftrightarrow 9 \sin x + 6 \cos x - 6 \sin x \cos x + (1 - 2 \sin^2 x) = 8$

$$\Leftrightarrow 6 \cos x - 6 \sin x \cos x - 2 \sin^2 x + 9 \sin x - 7 = 0$$

$$\Leftrightarrow 6 \cos x (1 - \sin x) - 2 (\sin x - 1) \left(\sin x - \frac{7}{2} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow 1 - \sin x = 0 \text{ hay } 6 \cos x + 2 \left(\sin x - \frac{7}{2} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 1 \\ 6 \cos x + 2 \sin x = 7 \text{ (vô nghiệm do } 6^2 + 2^2 < 7^2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Bài 92 : Giải phương trình: $\sin 2x + 2 \cos 2x = 1 + \sin x - 4 \cos x$ (*)

Ta có : (*) $\Leftrightarrow 2 \sin x \cos x + 2(2 \cos^2 x - 1) = 1 + \sin x - 4 \cos x$

$$\Leftrightarrow 2 \sin x \cos x - \sin x + 4 \cos^2 x + 4 \cos x - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2 \sin x \left(\cos x - \frac{1}{2} \right) + 4 \left(\cos x - \frac{1}{2} \right) \left(\cos x + \frac{3}{2} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos x - \frac{1}{2} = 0 \text{ hay } 2 \sin x + 4 \cos x + 6 = 0 \text{ (vô nghiệm do } 2^2 + 4^2 < 6^2)$$

$$\Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi$$

Bài 93 : Giải phương trình

$$2 \sin 2x - \cos 2x = 7 \sin x + 2 \cos x - 4$$
 (*)

Ta có : (*) $\Leftrightarrow 4 \sin x \cos x - (1 - 2 \sin^2 x) = 7 \sin x + 2 \cos x - 4$

$$\Leftrightarrow 2 \cos x (2 \sin x - 1) + 2 \sin^2 x - 7 \sin x + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2 \cos x (2 \sin x - 1) + 2 \left(\sin x - \frac{1}{2} \right) (\sin x - 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2 \cos x (2 \sin x - 1) + (2 \sin x - 1) (\sin x - 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2 \sin x - 1 = 0 \text{ hay } 2 \cos x + \sin x - 3 = 0 \text{ (vô nghiệm vì } 1^2 + 2^2 < 3^2)$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \vee x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Bài 94 : Giải phương trình

$$\sin 2x - \cos 2x = 3 \sin x + \cos x - 2$$
 (*)

Ta có (*) $\Leftrightarrow 2 \sin x \cos x - (1 - 2 \sin^2 x) = 3 \sin x + \cos x - 2$

$$\Leftrightarrow \cos x (2 \sin x - 1) + 2 \sin^2 x - 3 \sin x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos x (2 \sin x - 1) + (\sin x - 1) (2 \sin x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2 \sin x - 1 = 0 \text{ hay } \cos x + \sin x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2} \text{ hay } \sqrt{2} \cos x \left(x - \frac{\pi}{4} \right) = 1$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \vee x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \text{ hay } x - \frac{\pi}{4} = \pm \frac{\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \vee x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \text{ hay } x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \vee x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Bài 95 : Giải phương trình

$$\left(\sin 2x + \sqrt{3} \cos 2x \right)^2 - 5 = \cos \left(2x - \frac{\pi}{6} \right) (*)$$

Đặt $t = \sin 2x + \sqrt{3} \cos 2x$, Điều kiện $-\sqrt{a^2+b^2} = -2 \leq t \leq 2 = \sqrt{a^2+b^2}$

$$\text{Thì } t = 2 \left(\frac{1}{2} \sin 2x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 2x \right) = 2 \cos \left(2x - \frac{\pi}{6} \right)$$

Vậy (*) thành:

$$t^2 - 5 = \frac{t}{2} \Leftrightarrow 2t^2 - t - 10 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{5}{2} \text{ (loại)} \vee t = -2$$

$$\text{Do đó } (*) \Leftrightarrow \cos \left(2x - \frac{\pi}{6} \right) = -1$$

$$\Leftrightarrow 2x - \frac{\pi}{6} = \pi + k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{7\pi}{12} + k\pi$$

Bài 96 : Giải phương trình $2 \cos^3 x + \cos 2x + \sin x = 0 (*)$

$$\text{Ta có } (*) \Leftrightarrow 2 \cos^3 x + 2 \cos^2 x - 1 + \sin x = 0$$

$$\Leftrightarrow 2 \cos^2 x (\cos x + 1) - 1 + \sin x = 0$$

$$\Leftrightarrow 2(1 - \sin^2 x)(1 + \cos x) - (1 - \sin x) = 0$$

$$\Leftrightarrow 1 - \sin x = 0 \text{ hay } 2(1 + \sin x)(1 + \cos x) - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 1 - \sin x = 0 \text{ hay } 1 + 2 \sin x \cos x + 2(\sin x + \cos x) = 0$$

$$\Leftrightarrow 1 - \sin x = 0 \text{ hay } (\sin x + \cos x)^2 + 2(\sin x + \cos x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin x = 1 \text{ hay } \sin x + \cos x = 0 \text{ hay } \sin x + \cos x + 2 = 0 \text{ (vô nghiệm do: } 1^2 + 1^2 < 2^2)$$

$$\Leftrightarrow \sin x = 1 \text{ hay } \operatorname{tg} x = -1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \text{ hay } x = -\frac{\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Bài 97 : Giải phương trình $1 + \cot g 2x = \frac{1 - \cos 2x}{\sin^2 2x} (*)$

Điều kiện : $\sin 2x \neq 0 \Leftrightarrow \cos 2x \neq \pm 1$

Ta có (*)

$$\Leftrightarrow 1 + \cot g 2x = \frac{1 - \cos 2x}{1 - \cos^2 2x} = \frac{1}{1 + \cos 2x}$$

$$\Leftrightarrow \cot g 2x = \frac{1}{1 + \cos 2x} - 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos 2x}{\sin 2x} = \frac{-\cos 2x}{1 + \cos 2x}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x = 0 \text{ (nhận do } \neq \pm 1) \\ \frac{1}{\sin 2x} = \frac{-1}{1 + \cos 2x} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x = 0 \vee 1 + \cos 2x = -\sin 2x$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x = 0 \vee \sin 2x + \cos 2x = -1$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x = 0 \vee \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}} = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi \vee 2x + \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4} + k2\pi \vee 2x + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathcal{C}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \vee x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \vee 2x = \pi + k2\pi \text{ (loại)}, k \in \mathcal{C}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathcal{C}$$

Bài 98 : Giải phương trình $4(\sin^4 x + \cos^4 x) + \sqrt{3} \sin 4x = 2$ (*)

Ta có : (*)

$$\Leftrightarrow 4\left[(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x\right] + \sqrt{3} \sin 4x = 2$$

$$\Leftrightarrow 4\left[1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x\right] + \sqrt{3} \sin 4x = 2$$

$$\Leftrightarrow \cos 4x + \sqrt{3} \sin 4x = -1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\cos 4x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 4x = -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(4x - \frac{\pi}{3}\right) = \cos \frac{2\pi}{3}$$

$$\Leftrightarrow 4x - \frac{\pi}{3} = \pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi$$

$$\Leftrightarrow 4x = \pi + k2\pi \text{ hay } 4x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathcal{C}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \text{ hay } x = -\frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathcal{C}$$

Cách khác :

$$(*) \Leftrightarrow 2(1 - \sin^2 2x) + \sqrt{3} \sin 4x = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\cos^2 2x + 2\sqrt{3} \sin 2x \cos 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x = 0 \vee \cos 2x + \sqrt{3} \sin 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x = 0 \vee \cot 2x = -\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi \vee 2x = -\frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathcal{C}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \vee x = -\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathcal{C}$$

Bài 99 : Giải phương trình $1 + \sin^3 2x + \cos^3 2x = \frac{1}{2} \sin 4x$ (*)

$$\text{Ta có (*)} \Leftrightarrow 1 + (\sin 2x + \cos 2x)(1 - \sin 2x \cos 2x) = \frac{1}{2} \sin 4x$$

$$\Leftrightarrow 1 - \frac{1}{2} \sin 4x + (\sin 2x + \cos 2x) \left(1 - \frac{1}{2} \sin 4x\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow 1 - \frac{1}{2} \sin 4x = 0 \text{ hay } 1 + \sin 2x + \cos 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin 4x = 2 \text{ (loại)} \\ \sin 2x + \cos 2x = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2} \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = -1$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4} + k2\pi \\ 2x + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \vee x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Bài 100 : Giải phương trình

$$\text{tgx} - 3 \cot gx = 4(\sin x + \sqrt{3} \cos x) (*)$$

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} \sin x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \sin 2x \neq 0$$

$$\text{Luc đó : (*)} \Leftrightarrow \frac{\sin x}{\cos x} - 3 \frac{\cos x}{\sin x} = 4(\sin x + \sqrt{3} \cos x)$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 x - 3 \cos^2 x = 4 \sin x \cos x (\sin x + \sqrt{3} \cos x)$$

$$\Leftrightarrow (\sin x + \sqrt{3} \cos x) (\sin x - \sqrt{3} \cos x - 2 \sin 2x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = -\sqrt{3} \cos x \\ \frac{1}{2} \sin x - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x = \sin 2x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{tgx} = -\sqrt{3} = \text{tg}\left(-\frac{\pi}{3}\right) \\ \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \sin 2x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{3} + k\pi \vee x - \frac{\pi}{3} = 2x + k2\pi \vee x - \frac{\pi}{3} = \pi - 2x + k2\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{3} + k\pi \vee x = -\frac{\pi}{3} - k2\pi \vee x = \frac{4\pi}{9} + \frac{k2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{3} + k\pi \vee x = \frac{4\pi}{9} + \frac{k2\pi}{3} \text{ (nhận do } \sin 2x \neq 0)$$

Bài 101 : Giải phương trình $\sin^3 x + \cos^3 x = \sin x - \cos x$ (*)

Ta có : (*) $\Leftrightarrow \sin^3 x - \sin x + \cos^3 x + \cos x = 0$

$$\Leftrightarrow \sin x(\sin^2 x - 1) + \cos^3 x + \cos x = 0$$

$$\Leftrightarrow -\sin x \cos^2 x + \cos^3 x + \cos x = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos x = 0 \text{ hay } -\sin x \cos x + \cos^2 x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ -\sin 2x + \cos 2x = -3 \text{ (vô nghiệm do } 1+1 < 9) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = (2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

Bài 102 : Giải phương trình $\cos^4 x + \sin^4 \left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{4}$ (*)

Ta có : (*) $\Leftrightarrow \frac{1}{4}(1 + \cos 2x)^2 + \frac{1}{4} \left[1 - \cos \left(2x + \frac{\pi}{2}\right)\right]^2 = \frac{1}{4}$

$$\Leftrightarrow (1 + \cos 2x)^2 + (1 + \sin 2x)^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x + \sin 2x = -1$$

$$\Leftrightarrow \cos \left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}} = \cos \frac{3\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow 2x - \frac{\pi}{4} = \pm \frac{3\pi}{4} + k2\pi$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi \vee x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Bài 103 : Giải phương trình $4\sin^3 x \cdot \cos 3x + 4\cos^3 x \cdot \sin 3x + 3\sqrt{3} \cos 4x = 3$ (*)

Ta có : (*)

$$\Leftrightarrow 4\sin^3 x(4\cos^3 x - 3\cos x) + 4\cos^3 x(3\sin x - 4\sin^3 x) + 3\sqrt{3} \cos 4x = 3$$

$$\Leftrightarrow -12\sin^3 x \cos x + 12\sin x \cos^3 x + 3\sqrt{3} \cos 4x = 3$$

$$\Leftrightarrow 4\sin x \cos x(-\sin^2 x + \cos^2 x) + \sqrt{3} \cos 4x = 1$$

$$\Leftrightarrow 2\sin 2x \cdot \cos 2x + \sqrt{3} \cos 4x = 1$$

$$\Leftrightarrow \sin 4x + \frac{\sin \frac{\pi}{3}}{\cos \frac{\pi}{3}} \cos 4x = 1$$

$$\Leftrightarrow \sin 4x \cdot \cos \frac{\pi}{3} + \sin \frac{\pi}{3} \cos 4x = \cos \frac{\pi}{3}$$

$$\Leftrightarrow \sin \left(4x + \frac{\pi}{3} \right) = \sin \frac{\pi}{6}$$

$$\Leftrightarrow 4x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} + k2\pi \vee 4x + \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{24} + \frac{k\pi}{2} \vee x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

Bài 104 : Cho phương trình : $2 \sin^2 x - \sin x \cos x - \cos^2 x = m (*)$

a/ Tìm m sao cho phương trình có nghiệm

b/ Giải phương trình khi $m = -1$

Ta có : $(*) \Leftrightarrow (1 - \cos 2x) - \frac{1}{2} \sin 2x - \frac{1}{2} (1 + \cos 2x) = m$

$$\Leftrightarrow \sin 2x + 3 \cos 2x = -2m + 1$$

a/ $(*)$ có nghiệm $\Leftrightarrow a^2 + b^2 \geq c^2$

$$\Leftrightarrow 1 + 9 \geq (1 - 2m)^2$$

$$\Leftrightarrow 4m^2 - 4m - 9 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1 - \sqrt{10}}{2} \leq m \leq \frac{1 + \sqrt{10}}{2}$$

b/ Khi $m = -1$ ta được phương trình

$$\sin 2x + 3 \cos 2x = 3 \quad (1)$$

• Nếu $x = (2k + 1) \frac{\pi}{2}$ thì $\sin 2x = 0$ và $\cos 2x = -1$ nên phương trình (1) không

thỏa.

• Nếu $x \neq (2k + 1) \frac{\pi}{2}$ thì $\cos x \neq 0$, đặt $t = \tan x$

(1) thành $\frac{2t}{1+t^2} + \frac{3(1-t^2)}{1+t^2} = 3$

$$\Leftrightarrow 2t + 3(1-t^2) = 3(t^2 + 1)$$

$$\Leftrightarrow 6t^2 - 2t = 0$$

$$\Leftrightarrow t = 0 \vee t = 3$$

Vậy (1) $\Leftrightarrow \tan x = 0$ hay $\tan x = 3 = \tan \varphi \Leftrightarrow x = k\pi$ hay $x = \varphi + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Bài 105 : Cho phương trình $\frac{5 + 4 \sin \left(\frac{3\pi}{2} - x \right)}{\sin x} = \frac{6 \tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} (*)$

a/ Giải phương trình khi $\alpha = -\frac{\pi}{4}$

b/ Tìm α để phương trình $(*)$ có nghiệm

Ta có : $\sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\cos x$

$$\frac{6\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{6\sin\alpha}{\cos\alpha} \cdot \cos^2\alpha = 3\sin 2\alpha \text{ với } \cos\alpha \neq 0$$

Vậy : (*) $\Leftrightarrow \frac{5-4\cos x}{\sin x} = 3\sin 2\alpha$ (điều kiện $\sin x \neq 0$ và $\cos\alpha \neq 0$)

$$\Leftrightarrow 3\sin 2\alpha \sin x + 4\cos x = 5$$

a/ Khi $\alpha = -\frac{\pi}{4}$ ta được phương trình

$$-3\sin x + 4\cos x = 5 \quad (1) \quad (\text{Hiển nhiên } \sin x = 0 \text{ không là nghiệm của (1)})$$

$$\Leftrightarrow -\frac{3}{5}\sin x + \frac{4}{5}\cos x = 1$$

Đặt $\cos\varphi = -\frac{3}{5}$ và $\sin\varphi = \frac{4}{5}$ với $0 < \varphi < 2\pi$

Ta có pt (1) thành :

$$\sin(\varphi + x) = 1$$

$$\Leftrightarrow \varphi + x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$$

$$\Leftrightarrow x = -\varphi + \frac{\pi}{2} + k2\pi$$

b/ (**) có nghiệm $\Leftrightarrow (3\sin 2\alpha)^2 + 16 \geq 25$ và $\cos\alpha \neq 0$

$$\Leftrightarrow \sin^2 2\alpha \geq 1 \text{ và } \cos\alpha \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 2\alpha = 1$$

$$\Leftrightarrow \cos 2\alpha = 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

BÀI TẬP

1. Giải các phương trình sau :

a/ $2\sqrt{2}(\sin x + \cos x)\cos x = 3 + \cos 2x$

b/ $(2\cos x - 1)(\sin x + \cos x) = 1$

c/ $2\cos 2x = \sqrt{6}(\cos x - \sin x)$

d/ $3\sin x = 3 - \sqrt{3}\cos x$

e/ $2\cos 3x + \sqrt{3}\sin x + \cos x = 0$

f/ $\cos x + \sqrt{3}\sin x = \sin 2x + \cos x + \sin x$

g/ $\cos x + \sqrt{3}\sin x = \frac{3}{\cos x + \sqrt{3}\sin x + 1}$

h/ $\sin x + \cos x = \cos 2x$

k/ $4\sin^3 x - 1 = 3\sin x - \sqrt{3}\cos 3x$

i/ $3\cos x + 4\sin x + \frac{6}{3\cos x + 4\sin x + 1} = 6$

$$j/ \cos 7x \cos 5x - \sqrt{3} \sin 2x = 1 - \sin 7x \sin 5x$$

$$m/ 4(\cos^4 x + \sin^4 x) + \sqrt{3} \sin 4x = 2$$

$$p/ \cos^2 x - \sqrt{3} \sin 2x = 1 + \sin^2 x$$

$$q/ 4 \sin 2x - 3 \cos 2x = 3(4 \sin x - 1)$$

$$r/ \operatorname{tg} x - \sin 2x - \cos 2x = -4 \cos x + \frac{2}{\cos x}$$

$$s/ \frac{(2 - \sqrt{3}) \cos x - 2 \sin^2 \left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4} \right)}{2 \cos x - 1} = 1$$

2. Cho phương trình $\cos x + m \sin x = 2$ (1)

a/ Giải phương trình $m = \sqrt{3}$

b/ Tìm các giá trị m để (1) có nghiệm (ĐS : $|m| \geq \sqrt{3}$)

3. Cho phương trình :

$$\frac{m \sin x - 2}{m - 2 \cos x} = \frac{m \cos x - 2}{m - 2 \sin x} \quad (1)$$

a/ Giải phương trình (1) khi $m = 1$

b/ Khi $m \neq 0$ và $m \neq \sqrt{2}$ thì (1) có bao nhiêu nghiệm trên $[20\pi, 30\pi]$?

(ĐS : 10 nghiệm)

4. Cho phương trình

$$\frac{2 \sin x + \cos x + 1}{\sin x - 2 \cos x + 3} = a \quad (1)$$

a/ Giải (1) khi $a = \frac{1}{3}$

b/ Tìm a để (1) có nghiệm

Th.S Phạm Hồng Danh
TT Luyện thi đại học CLC Vĩnh Viễn