CHƯƠNGV

PHƯƠNG TRÌNH ĐỐI XỨNG THEO SINX, COSX

$a(\sin x + \cos x) + b\sin x\cos x = c \quad (1)$

Cách giải

Đặt $t = \sin x + \cos x$ với điều kiện $|t| \le \sqrt{2}$

Thì $t = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

Ta có : $t^2 = 1 + 2\sin x\cos x$ nên (1) thành

$at + \frac{b}{2}\left(t^2 - 1\right) = c$

$\Leftrightarrow bt^2 + 2at - b - 2c = 0$

Giải (2) tìm được t, rồi so với điều kiện $|t| \le \sqrt{2}$

giải phương trình $\sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = t$ ta tìm được x

Bài 106 : Giải phương trình $\sin x + \sin^2 x + \cos^3 x = 0(*)$

$(*) \Leftrightarrow \sin x(1 + \sin x) + \cos x\left(1 - \sin^2 x\right) = 0$

$\Leftrightarrow (1 + \sin x) = 0$ hay $\sin x + \cos x(1 - \sin x) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \sin x = -1 & (1) \\ \sin x + \cos x - \sin x\cos x = 0 & (2) \end{array}\right.$$

$\bullet(1) \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi (k \in Z)$

$\bullet$Xét(2) : đặt $t = \sin x + \cos x = \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

điều kiện $|t| \le \sqrt{2}$ thì $t^2 = 1 + 2\sin x\cos x$

Vậy (2) thành $t - \frac{t^2 - 1}{2} = 0$

$\Leftrightarrow t^2 - 2t - 1 = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 - \sqrt{2} \\ t = 1 + \sqrt{2}\,(\text{loại}) \end{array}\right.$$

Do đó $(2) \Leftrightarrow \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1 - \sqrt{2}$

$$\Leftrightarrow \cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}-1=\cos\varphi \text{ với } 0<\varphi<2\pi$$

$$\Leftrightarrow x-\frac{\pi}{4}=\pm\varphi+h2\pi, h\in\mathbb{Z}\text{, với} \cos\varphi=\frac{\sqrt{2}}{2}-1$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}\pm\varphi+h2\pi, h\in\mathbb{Z}\text{, với} \cos\varphi=\frac{\sqrt{2}}{2}-1$$

Bài 107 : Giải phương trình $-1+\sin^3 x+\cos^3 x=\frac{3}{2}\sin 2x (*)$

$$(*)\Leftrightarrow -1+(\sin x+\cos x)(1-\sin x\cos x)=\frac{3}{2}\sin 2x$$

Đặt $t=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$

Với điều kiện $|t|\le\sqrt{2}$

Thì $t^2=1+2\sin x\cos x$

Vậy (*) thành : $-1+t\left(1-\frac{t^2-1}{2}\right)=\frac{3}{2}\left(t^2-1\right)$

$$\Leftrightarrow -2+t\left(3-t^2\right)=3\left(t^2-1\right)$$

$$\Leftrightarrow t^3+3t^2-3t-1=0$$

$$\Leftrightarrow (t-1)\left(t^2+4t+1\right)=0$$

$$\Leftrightarrow t=1\vee t=-2+\sqrt{3}\vee t=-2-\sqrt{3}\,(\text{loại})$$

với $t=1$ thì $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}=\sin\frac{\pi}{4}$

$$\Leftrightarrow x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}=k2\pi\vee x+\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x=k2\pi\vee x=\frac{\pi}{2}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$$

với $t=\sqrt{3}-2$ thì $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{3}-2}{\sqrt{2}}=\sin\varphi$

$$\Leftrightarrow x+\frac{\pi}{4}=\varphi+m2\pi\vee x+\frac{\pi}{4}=\pi-\varphi+m2\pi, m\in\mathbb{Z}\text{, với} \frac{\sqrt{3}-2}{\sqrt{2}}=\sin\varphi$$

$$\Leftrightarrow x=\varphi-\frac{\pi}{4}+m2\pi\vee x=\frac{3\pi}{4}-\varphi+m2\pi, m\in\mathbb{Z}\text{, với } \frac{\sqrt{3}-2}{\sqrt{2}}=\sin\varphi$$

Bài 108 :Giải phương trình $\sqrt{2}(\sin x+\cos x)=tgx+\cot gx (*)$

Điều kiện $\begin{cases}\sin x\ne 0\\ \cos x\ne 0\end{cases}\Leftrightarrow \sin 2x\ne 0$

Lúc đó (*) $\Leftrightarrow \sqrt{2}(\sin x+\cos x)=\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\cos x}{\sin x}$

$\Leftrightarrow \sqrt{2}(\sin x + \cos x) = \dfrac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cos x} = \dfrac{1}{\sin x \cos x}$

Đặt $t = \sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$

Thì $t^2 = 1 + 2\sin x \cos x$ với $|t| \le \sqrt{2}$ và $t^2 \ne 1$

(*) thành $\sqrt{2}t = \dfrac{2}{t^2 - 1}$

$\Leftrightarrow \sqrt{2}t^3 - \sqrt{2}t - 2 = 0$

(Hiển nhiên $t = \pm 1$ không là nghiệm)

$\Leftrightarrow \left(t - \sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2}t^2 + 2t + \sqrt{2}\right) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \sqrt{2} \\ t^2 + \sqrt{2}t + 1 = 0 (\text{vô nghiệm}) \end{array}\right.$

Vậy $(*) \Leftrightarrow \sqrt{2}\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$

$\Leftrightarrow \sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = 1$

$\Leftrightarrow x + \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

<u>Bài 109</u> : Giải phương trình $3(\cot gx - \cos x) - 5(tgx - \sin x) = 2 (*)$

Với điều kiện $\sin 2x \ne 0$, nhân 2 vế phương trình cho sinxcosx $\ne 0$ thì :

$(*) \Leftrightarrow 3\cos^2 x(1 - \sin x) - 5\sin^2 x(1 - \cos x) = 2\sin x \cos x$

$\Leftrightarrow 3\cos^2 x(1 - \sin x) - 5\sin^2 x(1 - \cos x) = 5\sin x \cos x - 3\sin x \cos x$

$\Leftrightarrow 3\cos x\left[\cos x(1 - \sin x) + \sin x\right] - 5\sin x\left[\sin x(1 - \cos x) + \cos x\right] = 0$

$\Leftrightarrow 3\cos x(\cos x - \sin x \cos x + \sin x) - 5\sin x(\sin x - \sin x \cos x + \cos x) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \sin x + \cos x - \sin x \cos x = 0 & (1) \\ 3\cos x - 5\sin x = 0 & (2) \end{array}\right.$

(**<u>Ghi chú:</u>** A.B + A.C = A.D $\Leftrightarrow$ A = 0 hay B + C = D)

Giải (1) Đặt $t = \sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$

Thì $t^2 = 1 + 2\sin x \cos x$ với điều kiện : $|t| \le \sqrt{2}$ và $t \ne \pm 1$

(1) thành : $t - \dfrac{t^2 - 1}{2} = 0 \Leftrightarrow t^2 - 2t - 1 = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 + \sqrt{2} \left(\text{loại do } |t| \le \sqrt{2}\right) \\ t = 1 - \sqrt{2} (\text{nhận so với điều kiện}) \end{array}\right.$

Vậy $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1-\sqrt{2}}{2}=\sin\alpha\ \ (0<\alpha<2\pi)$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+\frac{\pi}{4}=\alpha+k2\pi \\ x+\frac{\pi}{4}=\pi-\alpha+k2\pi, k\in\mathbb{Z} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\alpha-\frac{\pi}{4}+k2\pi \\ x=\frac{3\pi}{4}-\alpha+k2\pi, k\in\mathbb{Z} \end{array}\right.$$

$(2)\Leftrightarrow \operatorname{tg}x=\frac{3}{5}=\operatorname{tg}\beta \Leftrightarrow x=\beta+h\pi, h\in\mathbb{Z}\ \ (\text{với } 0<\beta<\pi)$

Bài 110 : Giải phương trình

$$3\operatorname{tg}^3x-\operatorname{tg}x+\frac{3(1+\sin x)}{\cos^2 x}=8\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)\ (*)$$

Điều kiện : $\cos x\neq 0\Leftrightarrow \sin x\neq \pm 1$

Lúc đó : (*) $\Leftrightarrow \operatorname{tg}x\left(3\operatorname{tg}^2x-1\right)+3(1+\sin x)\left(1+\operatorname{tg}^2x\right)=4\left[1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right]$

$=4(1+\sin x)$

$\Leftrightarrow \operatorname{tg}x\left(3\operatorname{tg}^2x-1\right)+(1+\sin x)\left[3\left(1+\operatorname{tg}^2x\right)-4\right]=0$

$\Leftrightarrow \left(3\operatorname{tg}^2x-1\right)(\operatorname{tg}x+1+\sin x)=0$

$\Leftrightarrow \left(3\operatorname{tg}^2x-1\right)(\sin x+\cos x+\sin x\cos x)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} 3\operatorname{tg}^2x=1 & (1) \\ \sin x+\cos x+\sin x\cos x=0 & (2) \end{array}\right.$$

$\bullet(1)\Leftrightarrow \operatorname{tg}^2x=\frac{1}{3}\Leftrightarrow \operatorname{tg}x=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}\Leftrightarrow x=\pm\frac{\pi}{6}+k\pi$

$\bullet$Giải (2) đặt $t=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$

Với điều kiện $|t|\leq\sqrt{2}$ và $t\neq\pm 1$

Thì $t^2=1+2\sin x\cos x$

(2) thành : $t+\frac{t^2-1}{2}=0\Leftrightarrow t^2+2t-1=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-1-\sqrt{2}\ \left(\text{loại do điều kiện } |t|\leq\sqrt{2}\right) \\ t=-1+\sqrt{2}\ \left(\text{nhận so với điều kiện}\right) \end{array}\right.$$

Vậy $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}=\sin\varphi$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+\frac{\pi}{4}=\varphi+k2\pi, k\in ¢ \\ x+\frac{\pi}{4}=\pi-\varphi+k2\pi, k\in ¢ \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\varphi-\frac{\pi}{4}+k2\pi, k\in ¢ \\ x=\frac{3\pi}{4}-\varphi+k2\pi, k\in ¢ \end{array}\right.$$

<u>Bài 111</u> : Giải phương trình $2\sin^3 x - \sin x = 2\cos^3 x - \cos x + \cos 2x\,(*)$

$(*) \Leftrightarrow 2\left(\sin^3 x - \cos^3 x\right) - \left(\sin x - \cos x\right) + \sin^2 x - \cos^2 x = 0$

$\Leftrightarrow \sin x - \cos x = 0$ hay $2\left(1 + \sin x \cos x\right) - 1 + \left(\sin x + \cos x\right) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x - \cos x = 0\,(1) \\ \sin x + \cos x + \sin 2x + 1 = 0\,(2) \end{array}\right.$$

$\bullet (1) \Leftrightarrow \mathrm{tg}x = 1$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi, k \in ¢$

$\bullet$xét (2) đặt $t = \sin x + \cos x = \sqrt{2}\cos x\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$

Với điều kiện : $|t| \le \sqrt{2}$

$t^2 = 1 + \sin 2x$

Vậy (2) thành $t + \left(t^2 - 1\right) + 1 = 0$

$\Leftrightarrow t\left(t + 1\right) = 0 \Leftrightarrow t = 0 \vee t = -1$

Khi t = 0 thì $\cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = 0$

$\Leftrightarrow x - \dfrac{\pi}{4} = \left(2k + 1\right)\dfrac{\pi}{2}, k \in ¢$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{3\pi}{4} + k\pi, k \in ¢$

Khi $t = -1$ thì $\cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \cos\dfrac{3\pi}{4}$

$\Leftrightarrow x - \dfrac{\pi}{4} = \pm\dfrac{3\pi}{4} + k2\pi, k \in ¢$

$\Leftrightarrow x = \pi + k2\pi$ hay $x = -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi, k \in ¢$

<u>Bài 112</u> : Giải phương trình

$$\sin x + \sin^2 x + \sin^3 x + \sin^4 x = \cos x + \cos^2 x + \cos^3 x + \cos^4 x\,(*)$$

Ta có : (*)

$\Leftrightarrow \left(\sin x - \cos x\right) + \left(\sin^2 x - \cos^2 x\right) + \left(\sin^3 x - \cos^3 x\right) + \left(\sin^4 x - \cos^4 x\right) = 0$

$\Leftrightarrow \left(\sin x - \cos x\right) = 0$ hay $1 + \left(\sin x + \cos x\right) + \left(1 + \sin x.\cos x\right) + \left(\sin x + \cos x\right) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x - \cos x = 0\,(1) \\ 2\left(\sin x + \cos x\right) + \sin x \cos x + 2 = 0\,(2) \end{array}\right.$$

Ta có : (1) $\Leftrightarrow \mathrm{tg}x = 1$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi, k \in ¢$

Xét (2) : đặt $t = \sin x + \cos x = \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

Với điều kiện $|t| \le \sqrt{2}$

Thì $t^2 = 1 + 2\sin x\cos x$

(2) thành $2t + \frac{t^2 - 1}{2} + 2 = 0$

$\Leftrightarrow t^2 + 4t + 3 = 0$

$\Leftrightarrow t = -1 \vee t = -3(\text{loại})$

khi t = -1 thì $\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}} = \cos\frac{3\pi}{4}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \\ x - \frac{\pi}{4} = -\frac{3\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \\ x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$$

<u>Bài 113</u> : Giải phương trình $tg^2x\left(1 - \sin^3 x\right) + \cos^3 x - 1 = 0(*)$

Điều kiện : $\cos x \ne 0 \Leftrightarrow \sin x \ne \pm 1$

Lúc đó (*) $\Leftrightarrow \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\left(1 - \sin^3 x\right) + \cos^3 x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow \left(1 - \cos^2 x\right)\left(1 - \sin^3 x\right) - \left(1 - \cos^3 x\right)\left(1 - \sin^2 x\right) = 0$

$\Leftrightarrow (1 - \cos x)(1 - \sin x) = 0$

hay $(1 + \cos x)\left(1 + \sin x + \sin^2 x\right) - \left(1 + \cos x + \cos^2 x\right)(1 + \sin x) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = 1(\text{nhận do điều kiện}) \\ \sin x = 1(\text{loại do điều kiện}) \\ \sin^2 x + \sin^2 x\cos x - \cos^2 x - \sin x\cos^2 x = 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = 1 \\ \sin^2 x - \cos^2 x + \sin x\cos x(\sin x - \cos x) = 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = 1 \\ \sin x - \cos x = 0 \text{ hay } \sin x + \cos x + \sin x\cos x = 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = 1 \vee tgx = 1 \\ \sin x + \cos x + \sin x\cos x = 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k2\pi, k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \sin x + \cos x + \sin x\cos x = 0 \end{array}\right.$$

xét pt $\sin x + \cos x + \sin x \cos x = 0$

đặt

$t = \sin x + \cos x = \sqrt{2}\cos x\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ (điều kiện $|t| \le \sqrt{2}$ và $t \ne \pm 1$)

$\Rightarrow t^2 = 1 + 2\sin x \cos x$

Ta được phương trình $t + \frac{t^2 - 1}{2} = 0 \Leftrightarrow t^2 + 2t - 1 = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1 - \sqrt{2}\ (\text{loại}) \\ t = -1 + \sqrt{2}\ (\text{nhận so với đk}) \end{array}\right.$$

Vậy $\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2}} = \cos\varphi$

$\Leftrightarrow x - \frac{\pi}{4} = \pm\varphi + k2\pi, k \in ¢ \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} \pm \varphi + k2\pi, k \in ¢$

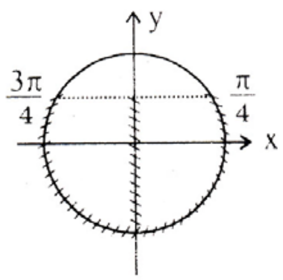
Bài 114 : Cho phương trình $m(\sin x + \cos x + 1) = 1 + \sin 2x\ (*)$

Tìm m để phương trình có nghiệm thuộc đoạn $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

Đặt $t = \sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$, điều kiện $|t| \le \sqrt{2}$

Thì $t^2 = 1 + \sin 2x$

Vậy (*) thành : $m(t + 1) = t^2$



Nếu $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$ thì $\frac{\pi}{4} \le x + \frac{\pi}{4} \le \frac{3\pi}{4}$

Do đó $\frac{\sqrt{2}}{2} \le \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \le 1$

$\Leftrightarrow 1 \le t \le \sqrt{2}$

ta có $m(t + 1) = t^2$

$\Leftrightarrow m = \frac{t^2}{t + 1}$ (do t = -1 không là nghiệm của phương trình)

Xét $y = \frac{t^2}{t + 1}$ trên $\left[1, \sqrt{2}\right]$

Thì $y' = \frac{t^2 + 2t}{(t + 1)^2} > 0\ \forall t \in \left[1, \sqrt{2}\right]$

Vậy y tăng trên $\left[1, \sqrt{2}\right]$

Vậy (*) có nghiệm trên $\left[1, \frac{\pi}{2}\right] \Leftrightarrow y(1) \le m \le y\left(\sqrt{2}\right)$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \le m \le 2\left(\sqrt{2} - 1\right)$

Bài 115 : Cho phương trình $\cos^3 x + \sin^3 x = m\sin x\cos x\left(*\right)$

a/ Giải phương trình khi $m = \sqrt{2}$

b/ Tìm m để (*) có nghiệm

Ta có : (*) $\Leftrightarrow \left(\cos x + \sin x\right)\left(1 - \sin x\cos x\right) = m\sin x\cos x$

Đặt $t = \sin x + \cos x = \sqrt{2}\cos x\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

Với điều kiện $\left(\left|t\right| \le \sqrt{2}\right)$

Thì $t^2 = 1 + 2\sin x\cos x$

Vậy (*) thành $t\left(1 - \frac{t^2 - 1}{2}\right) = m\left(\frac{t^2 - 1}{2}\right)$

$\Leftrightarrow t\left(3 - t^2\right) = m\left(t^2 - 1\right)$

a/ Khi $m = \sqrt{2}$ ta có phương trình

$t\left(3 - t^2\right) = \sqrt{2}\left(\left(t^2 - 1\right)\right)$

$\Leftrightarrow t^3 + \sqrt{2}t^2 - 3t - \sqrt{2} = 0$

$\Leftrightarrow \left(t - \sqrt{2}\right)\left(t^2 + 2\sqrt{2}t + 1\right) = 0$

$\Leftrightarrow t = \sqrt{2}$ hay $t = -\sqrt{2} + 1$ hay $t = -\sqrt{2} - 1$(loại)

Vậy • $\cos x\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow x - \frac{\pi}{4} = k2\pi, k \in \text{¢} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k2\pi, k \in \text{¢}$

• $\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1 - \sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \cos\alpha$

$\Leftrightarrow x - \frac{\pi}{4} = \pm\alpha + k2\pi, k \in \text{¢} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} \pm \alpha + k2\pi, k \in \text{¢}$

b/ Xét phương trình $t\left(3 - t^2\right) = k\left(t^2 - 1\right)\left(**\right)$

Do $t = \pm 1$ không là nghiệm của (**) nên

$\left(**\right) \Leftrightarrow m = \frac{3t - t^3}{t^2 - 1}$

Xét $y = \frac{3t - t^3}{t^2 - 1}\left(C\right)$ trên $\left[-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right] \backslash \left\{\pm 1\right\}$

Ta có $y' = \frac{-t^4 - 3}{\left(t^2 - 1\right)^2} < 0 \forall t = \pm 1$

suy ra y giảm trên$\left(-1, 1\right)$ và

$\lim\limits_{x \to -1^+} y = +\infty, \lim\limits_{x \to 1^-} y = -\infty$

Do đó trên$\left(-1, 1\right) \subset \left[-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right] \backslash \left\{\pm 1\right\}$ ta có

(d) y = m cắt (C) $y = \frac{3t - t^3}{t^2 - 1}$ với $\forall m \in R$

Vậy (*) có nghiệm $\forall m \in R$

Bài 116 : Cho phương trình

$$m(\sin x+\cos x)+1+\frac{1}{2}\left(tgx+\cot gx+\frac{1}{\sin x}+\frac{1}{\cos x}\right)=0(*)$$

a/ Giải phương trình khi $m=\frac{1}{2}$

b/ Tìm m để (*) có nghiệm trên $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$

Với điều kiện $\sin 2x\neq 0$ ta có

$(*)\Leftrightarrow m(\sin x+\cos x)+1+\frac{1}{2}\left(\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\cos x}{\sin x}+\frac{1}{\sin x}+\frac{1}{\cos x}\right)=0$

$\Leftrightarrow m\sin 2x(\sin x+\cos x)+\sin 2x+(1+\cos x+\sin x)=0$

$\Leftrightarrow m\sin 2x(\sin x+\cos x)+\sin 2x+1+\cos x+\sin x=0$

$\Leftrightarrow m\sin 2x(\sin x+\cos x)+(\sin x+\cos x)^2+\sin x+\cos x=0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin x+\cos x=0(1)\\ m\sin 2x+\sin x+\cos x+1=0(2)\end{array}\right.$

Xét (2) đặt $t=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$

Thì $t^2=1+\sin 2x$

Do $\sin 2x\neq 0$ nên $|t|\leq\sqrt{2}$ và $t=\pm 1$

Vậy (*) thành : $\left[\begin{array}{l}t=0\\ m(t^2-1)+t+1=0\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}t=0\ (\text{nhận so điều kiện})\\ m(t-1)+1=0 & (\text{ do } t\neq -1)\end{array}\right.$

a/ Khi $m=\frac{1}{2}$ thì ta được :

$\left[\begin{array}{l}t=0\\ t=-1\ (\text{loại do điều kiện})\end{array}\right.$

Vậy sinx + cosx = 0

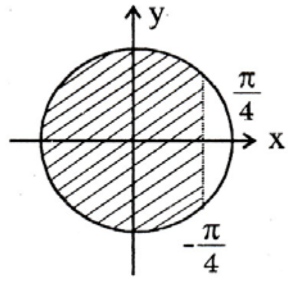
$\Leftrightarrow tgx=-1$

$\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{4}+k\pi,k\in ¢$

b/ Ta có : $0<x<\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow -\frac{\pi}{4}<x-\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{4}$

Lúc đó

$\frac{\sqrt{2}}{2}<\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\leq 1\Rightarrow 1<t\leq\sqrt{2}$



Do $t=0\notin\left(1,\sqrt{2}\right]$

Nên ta xét phương trình : $m(t-1)+1=0(**)$

$(**) \Leftrightarrow mt = m-1$

$\Leftrightarrow t = 1-\frac{1}{m}$ (do m = 0 thì (**) vô nghiệm)

Do đó : yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow 1 < 1-\frac{1}{m} \le \sqrt{2}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{m} > 0 \\ 1-\sqrt{2} \le \frac{1}{m} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ m \le \frac{1}{1-\sqrt{2}} = -\sqrt{2}-1 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow m \le -\sqrt{2}-1$

<u>Bài 117</u> : Cho $f(x) = \cos^2 2x + 2(\sin x + \cos x)^3 - 3\sin 2x + m$

a/ Giải phương trình f(x) = 0 khi m = -3

b/ Tính theo m giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của f(x)

Tìm m cho $[f(x)]^2 \le 36 \ \ \forall x \in R$

Đặt $t = \sin x + \cos x = \sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$ (điều kiện $|t| \le \sqrt{2}$)

Thì $t^2 = 1 + \sin 2x$

Và $\cos^2 2x = 1 - \sin^2 2x = 1-(t^2-1)^2 = -t^4 + 2t^2$

Vậy $f(x)$ thành $g(t) = -t^4 + 2t^2 + 2t^3 - 3(t^2-1) + m$

a/ Khi m = -3 thì g(t) = 0

$\Leftrightarrow -t^2(t^2-2t+1) = 0$

$\Leftrightarrow t = 0 \vee t = 1$

vậy khi m = -3 thì f(x) = 0

$\Leftrightarrow \cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right) = 0$ hay $\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\Leftrightarrow x-\frac{\pi}{4} = (2k+1)\frac{\pi}{2}$ hay $x-\frac{\pi}{4} = \pm\frac{\pi}{4} + k2\pi,\ k \in ¢$

$\Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{4} + k\pi$ hay $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \vee x = k2\pi,\ k \in ¢$

b/ Ta có $g'(t) = -4t^3 + 6t^2 - 2t = -2t(2t^2-3t+1)$

Vậy $\begin{cases} g'(t) = 0 \\ t \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}] \end{cases} \Leftrightarrow t = 0 \vee t = 1 \vee t = \frac{1}{2}$

Ta có : $g(0) = 3 + m = g(1)$, $\quad g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{47}{16} + m$

$g(\sqrt{2}) = 4\sqrt{2} - 3 + m$, $\quad g(\sqrt{2}) = m - 3 - 4\sqrt{2}$

Vậy : $\underset{x\in R}{\text{Max}} f(x) = \underset{t\in[-\sqrt{2},\sqrt{2}]}{\text{Max}} g(t) = m + 3$

$\underset{x\in R}{\text{Min}} f(x) = \underset{t\in[-\sqrt{2},\sqrt{2}]}{\text{Min}} g(t) = m - 3 - 4\sqrt{2}$

Do đó : $[f(x)]^2 \le 36,\ \forall x\in R \Leftrightarrow -6 \le f(x) \le 6,\ \forall x \in R$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \underset{R}{\text{Max}}\, f(x) \le 6 \\ \underset{R}{\text{Min}}\, f(x) \ge -6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m + 3 \le 6 \\ m - 3 - 4\sqrt{2} \ \ge -6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 4\sqrt{2} - 3 \le m \le 3$$

<u>Cách khác</u> : Ta có $g(t) = -t^2(t^2 - 2t + 1) + 3 + m = -[t(t-1)]^2 + 3 + m$

Đặt $u = t^2 - t$

Khi $t \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ thì $u \in \left[-\frac{1}{4}, 2 + \sqrt{2}\right] = D$

Vậy $g(t) = h(u) = -u^2 + 3 + m$

$\underset{R}{\text{Max}}\, f(x) = \underset{t\in[-\sqrt{2},\sqrt{2}]}{\text{Max}} g(t) = \underset{u\in D}{\text{Max}}\, h(u) = m + 3$

$\underset{R}{\text{Min}}\, f(x) = \underset{t\in[-\sqrt{2},\sqrt{2}]}{\text{Min}} g(t) = \underset{u\in D}{\text{Min}}\, h(u) = m - 3 - 4\sqrt{2}$

<u>Chú ý 1</u> : Phương trình giả đối xứng

$a(\sin x - \cos x) + b(\sin x \cos x) = 0$

đặt $t = \sin x - \cos x$

thì $t = \sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

với điều kiện $|t| \le \sqrt{2}$ thì $t^2 = 1 - 2\sin x \cos x$

<u>Bài 118</u> : Giải phương trình $2\sin x + \cot g x = 2\sin 2x + 1\ (*)$

Điều kiện : $\sin x \ne 0 \Leftrightarrow \cos x = \pm 1$

Lúc đó (*) $\Leftrightarrow 2\sin x + \dfrac{\cos x}{\sin x} = 4\sin x\cos x + 1$

$\Leftrightarrow 2\sin^2 x + \cos x = 4\sin^2 x\cos x + \sin x$

$\Leftrightarrow 2\sin^2 x - \sin x - \cos x(4\sin^2 x - 1) = 0$

$\Leftrightarrow \sin x(2\sin x - 1) - \cos x(2\sin x - 1)(2\sin x + 1) = 0$

$\Leftrightarrow 2\sin x - 1 = 0$ hay $\sin x - \cos x(2\sin x + 1) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} 2\sin x - 1 = 0 & (1) \\ \sin x - \cos x - \sin 2x = 0 & (2) \end{array}\right.$$

- Ta có $(1) \Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2}$ (nhận do $\sin x \neq 0$)

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \vee x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

- Xét (2) Đặt $t = \sin x - \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

Với điều kiện $|t| \leq \sqrt{2}$ và $t \neq \pm 1$

Thì $t^2 = 1 - \sin 2x$

Vậy (2) thành : $t - \left(1 - t^2\right) = 0$

$\Leftrightarrow t^2 + t - 1 = 0$

$\Leftrightarrow t = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \vee t = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ (loại)

Do đó : $\sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ (nhận do $|t| \leq \sqrt{2}$ và $t \neq \pm 1$)

$\Leftrightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{2}} = \sin\varphi$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - \frac{\pi}{4} = \varphi + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z} \\ x - \frac{\pi}{4} = \pi - \varphi + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \varphi + \frac{\pi}{4} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{5\pi}{4} - \varphi + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$$

Bài 119 : Giải phương trình

$$\cos 2x + 5 = 2(2 - \cos x)(\sin x - \cos x)\ (*)$$

Ta có : $(*) \Leftrightarrow \left(\cos^2 x - \sin^2 x\right) + 5 = 2(2 - \cos x)(\sin x - \cos x)$

$\Leftrightarrow (\sin x - \cos x)\left[2(2 - \cos x) + (\sin x + \cos x)\right] - 5 = 0$

$\Leftrightarrow (\sin x - \cos x)\left[\sin x - \cos x + 4\right] - 5 = 0$

Đặt $t = \sin x - \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

Với điều kiện $|t| \leq \sqrt{2}$

(*) thành : $t(t+4) - 5 = 0$

$\Leftrightarrow t^2 + 4t - 5 = 0$

$\Leftrightarrow t = 1 \vee t = -5$ (loại)

Vậy $(*) \Leftrightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \sin\frac{\pi}{4}$

$\Leftrightarrow x-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}+k2\pi \vee x-\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}+k2\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k2\pi \vee x=\pi+k2\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

Bài 120 : Giải phương trình $\cos^3 x+\sin^3 x=\cos 2x\,(*)$

Ta có (*) $\Leftrightarrow (\cos x+\sin x)(1-\sin x\cos x)=\cos^2 x-\sin^2 x$

$\Leftrightarrow \cos x+\sin x=0$ hay $1-\sin x\cos x=\cos x-\sin x$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll}\sin x+\cos x=0 & (1)\\ \sin x-\cos x-\sin x\cos x+1=0 & (2)\end{array}\right.$$

Ta có : $(1)\Leftrightarrow \text{tg}x=-1$

$\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{4}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

Xét (2) đặt $t=\sin x-\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$

Với điều kiện $|t|\le\sqrt{2}$

Thì $t^2=1-2\sin x\cos x$

(2) thành $t-\frac{1-t^2}{2}+1=0\Leftrightarrow t^2+2t+1=0$

$\Leftrightarrow t=-1$

vậy $(2)\Leftrightarrow \sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{\sqrt{2}}=\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x-\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{4}+k2\pi,\ k\in\mathbb{Z}\\ x-\frac{\pi}{4}=\frac{5\pi}{4}+k2\pi,\ k\in\mathbb{Z}\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=k2\pi,\ k\in\mathbb{Z}\\ x=\frac{3\pi}{2}+k2\pi,\ k\in\mathbb{Z}\end{array}\right.$$

Bài 121 : Cho phương trình $\cos^3 x-\sin^3 x=m\quad(1)$

a/ Giải phương trình (1) khi m = 1 bằng cách đặt ẩn phụ $t=\cos x-\sin x$

b/ Tìm m sao cho (1) có đúng hai nghiệm $x\in\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$

Ta có (1) $\Leftrightarrow (\cos x-\sin x)(1+\sin x\cos x)=m$

Đặt $t=\cos x-\sin x=\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$

Với điều kiện $|t|\le\sqrt{2}$

Thì $t^2=1-2\sin x\cos x$

Vậy (1) thành : $t\left(1+\frac{1-t^2}{2}\right)=m$

$\Leftrightarrow t\left(3-t^2\right)=2m\quad(2)$

a/ Khi m = 1 thì (2) thành $t^3 - 3t + 2 = 0$

$\Leftrightarrow (t-1)(t^2 + t - 2) = 0$

$\Leftrightarrow t = 1 \vee t = -2$ (loại)

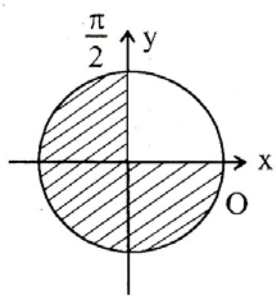
Vậy $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x + \frac{\pi}{4} = \pm\frac{\pi}{4} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow x = k2\pi \vee x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

b/ Nếu $x \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ thì $0 \le x + \frac{\pi}{4} \le \frac{\pi}{2}$

nên $0 \le \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \le 1$

$\Leftrightarrow 0 \le t = \sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \le \sqrt{2}$



nhận xét rằng với mỗi t tìm được trên $\left[0, \sqrt{2}\right]$

ta tìm duy nhất một $x \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$

xét $f(t) = -t^3 + 3t$ trên $\left[0, \sqrt{2}\right]$

$\Rightarrow f'(t) = -3t^2 + 3$

t		−1		0		1		$\sqrt{2}$	
f'(t)	−	0	+	‖	+	0	−	‖	−
f(t)				0	↗	2	↘	$\sqrt{2}$	

vậy (1) có đúng hai nghiệm $x \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$

$\Leftrightarrow (d)\ y = 2m$ cắt $(C)\ y = -t^3 + 3t$ trên $\left[0, \sqrt{2}\right]$ tại 2 điểm phân biệt

$\Leftrightarrow \sqrt{2} \le 2m < 2$

$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} \le m < 1$

<u>Bài 122</u> : Cho phương trình

$$2\cos 2x + \sin^2 x\cos x + \sin x\cos^2 x = m(\sin x + \cos x)\ (*)$$

a/ Giải phương trình khi m = 2

b/ Tìm m để phương trình (*) có ít nhất một nghiệm trên $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

Ta có : $(*) \Leftrightarrow 2(\cos^2 x - \sin^2 x) + \sin x\cos x(\sin x + \cos x) = m(\sin x + \cos x)$

$\Leftrightarrow \cos x + \sin x = 0$ (1) hay $2(\cos x - \sin x) + \sin x\cos x = m$ (2)

Đặt $t = \cos x - \sin x = \sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ (điều kiện $|t| \le \sqrt{2}$)

Thì $t^2 = 1 - 2\sin x\cos x$

Ta có : $(1) \Leftrightarrow \sin x = -\cos x$

$\Leftrightarrow tgx = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

Ta có : (2) thành $2t + \frac{1-t^2}{2} = m$

$\Leftrightarrow -t^2 + 4t + 1 = 2m(**)$

a/ Khi m = 2 thì (**) thành $t^2 - 4t + 3 = 0$

$\Leftrightarrow t = 1 \vee t = 3 \quad (\text{loại})$

vậy $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x + \frac{\pi}{4} = \pm\frac{\pi}{4} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow x = k2\pi \vee x = -\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

Do đó :

$(*) \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \vee x = k2\pi \vee x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

b/ Ta có $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \Leftrightarrow x + \frac{\pi}{4} \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$

vậy $-\frac{\sqrt{2}}{2} \le \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \le \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\Rightarrow -1 \le t \le 1$

Do nghiệm $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \notin \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\forall\ k \in \mathbb{Z}$

Nên yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow (**)$ có nghiệm trên $[-1, 1]$

Xét $y = -t^2 + 4t + 1$ thì $y' = -2t + 4 > 0\ \forall t \in [-1, 1]$

$\Rightarrow$ y tăng trên $[-1, 1]$

Do đó : yêu cầu bài toán

$\Leftrightarrow -4 = y(-1) \le 2m \le y(1) = 4$

$\Leftrightarrow -2 \le m \le 2$

* **Chú ý 2 :** Phương trình lượng giác dạng

$a(tgx \pm \cot gx) + b(tg^2x + \cot g^2x) = 0$

ta đặt $t = tgx \pm \cot gx$ thì $t^2 = tg^2x + \cot g^2x \pm 2$

khi $t = tgx + \cot gx = \frac{2}{\sin 2x}$ thì $|t| \ge 2$ $(\text{do } |\sin 2x| \le 1)$

Bài 123 : Giải phương trình

$3tg^2x + 4tgx + 4\cot gx + 3\cot g^2x + 2 = 0(*)$

Đặt $t = tgx + \cot gx = \frac{2}{\sin 2x}$

Với điều kiện $|t| \ge 2$

Thì $t^2 = tg^2x + \cot g^2x + 2$

(*) thành : $3(t^2 - 2) + 4t + 2 = 0$

$\Leftrightarrow 3t^2 + 4t - 4 = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \frac{2}{3}(\text{loại do điều kiện}) \\ t = -2 \end{array}\right.$

Ta có : $t = -2 \Leftrightarrow \frac{2}{2\sin x} = -2 \Leftrightarrow \sin 2x = -1$

$\Leftrightarrow 2x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

<u>Bài 124</u> : Giải phương trình

$$tgx + tg^2x + tg^3x + cotgx + cotg^2x + cotg^3x = 6(*)$$

Ta có (*) $\Leftrightarrow (tgx + \cot gx) + (tg^2x + \cot g^2x) + (tg^3x + \cot g^3x) = 6$

$\Leftrightarrow (tgx + \cot gx) + (tgx + \cot gx)^2 - 2 + (tgx + \cot gx)(tg^2x + \cot g^2x - 1) = 6$

$\Leftrightarrow (tgx + \cot gx) + (tgx + \cot gx)^2 + (tgx + \cot gx)\left[(tgx + \cot gx)^2 - 3\right] = 8$

Đặt $t = tgx + \cot gx = \frac{2}{\sin 2x}(\text{điều kiện } |t| \ge 2)$

Vậy (*) thành : $t + t^2 + t(t^2 - 3) = 8$

$\Leftrightarrow t^3 + t^2 - 2t - 8 = 0$

$\Leftrightarrow (t - 2)(t^2 + 3t + 4) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 2 \\ t^2 + 3t + 4 = 0(\text{vô nghiệm}) \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow t = 2$

Vậy $\frac{2}{\sin 2x} = 2 \Leftrightarrow \sin 2x = 1$

$\Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

<u>Bài 125</u> : Giải phương trình

$$\frac{2}{\sin^2 x} + 2tg^2x + 5tgx + 5\cot gx + 4 = 0(*)$$

Cách 1 : (*) $\Leftrightarrow 2(1 + \cot g^2x) + 2tg^2x + 5(tgx + \cot gx) + 4 = 0$

$\Leftrightarrow 2\left(tg^2x + \cot g^2x\right) + 5\left(tgx + \cot gx\right) + 6 = 0$

$\Leftrightarrow 2\left[\left(tgx + \cot gx\right)^2 - 2\right] + 5\left(tgx + \cot gx\right) + 6 = 0$

Đặt $t = tgx + \cot gx = \dfrac{2}{\sin 2x}$, với $|t| \ge 2$

Ta được phương trình : $2t^2 + 5t + 2 = 0$

$\Leftrightarrow t = -2 \vee t = -\dfrac{1}{2}(\text{loại})$

Vậy $(*) \Leftrightarrow \dfrac{2}{\sin 2x} = -2 \Leftrightarrow \sin 2x = -1$

$\Leftrightarrow 2x = -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

Cách 2 : Đặt $u = tgx$ (với điều kiện $u \ne 0$)

Vậy (*) thành : $2 + \dfrac{2}{u^2} + 2u^2 + 5u + \dfrac{5}{u} + 4 = 0$

$\Leftrightarrow 2 + 2u^4 + 5u^3 + 5u + 6u^2 = 0$

$\Leftrightarrow (u+1)\left(2u^3 + 3u^2 + 3u + 2\right) = 0$

$\Leftrightarrow (u+1)^2\left(2u^2 + u + 2\right) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = -1(\text{nhận}) \\ 2u^2 + u + 2 = 0(\text{vô nghiệm}) \end{array}\right.$

Vậy (*) $\Leftrightarrow tgx = -1$

$\Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

Bài 126 : Cho phương trình

$$\frac{1}{\cos^2 x} + \cot g^2x + m\left(tgx + \cot gx\right) + 2 = 0 \qquad (1)$$

a/ Giải phương trình khi $m = \dfrac{5}{2}$

b/ Tìm m để phương trình có nghiệm

Ta có : (1) $\Leftrightarrow tg^2x + \cot g^2x + m\left(tgx + \cot gx\right) + 3 = 0$

Đặt $t = tgx + \cot gx = \dfrac{2}{\sin 2x}\left(\text{điều kiện } |t| \ge 2\right)$

$\Rightarrow t^2 = tg^2x + \cot g^2x + 2$

Vậy (1) thành : $t^2 + mt + 1 = 0 \qquad (2)$

a/ Khi $m = \dfrac{5}{2}$ ta được phương trình $2t^2 + 5t + 2 = 0$

$\Leftrightarrow t = -2 \vee t = -\frac{1}{2}$ (loại)

Do đó $\frac{2}{\sin 2x} = -2 \Leftrightarrow \sin 2x = -1$

$\Leftrightarrow 2x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

b/ **Cách 1** :

Ta có : (2) $\Leftrightarrow mt = -1 - t^2$

$\Leftrightarrow m = -\frac{1}{t} - t$ (do t = 0 không là nghiệm của (2))

Xét $y = -\frac{1}{t} - t$ với $|t| \geq 2$

Thì $y' = \frac{1}{t^2} - 1 = \frac{1 - t^2}{t^2}$

Ta có : $y' = 0 \Leftrightarrow t = \pm 1$

t	$-\infty$		-2		-1		0		1		2		$+\infty$
y'		$-$	|	$-$	0	$+$	||	$+$	0	$-$	|	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{5}{2}$				||				$-\frac{5}{2}$	$\searrow$	$-\infty$

Do đó (1) có nghiệm $\Leftrightarrow$ (d) cắt (C) trên $(-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$

$\Leftrightarrow m \leq -\frac{5}{2} \vee m \geq \frac{5}{2}$

$\Leftrightarrow |m| \geq \frac{5}{2}$

Cách 2 : Yêu cầu bài toán

$\Leftrightarrow f(t) = t^2 + mt + 1 = 0$ có nghiệm t thỏa $|t| \geq 2$

Nhận xét rằng do P = 1 nên nếu f(t) có hai nghiệm t_1, t_2 (với $t_1 \leq t_2$) và có nghiệm thì ta có $\begin{cases} |t_1| \leq 1 \\ |t_2| \geq 1 \end{cases} \vee \begin{cases} |t_1| \geq 1 \\ |t_2| \leq 1 \end{cases}$

Do đó :

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow t_1 \leq -2 < t_1 < 2 \vee -2 < t_1 < 2 \leq t_2$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 1f(-2) \leq 0 \\ 1f(2) > 0 \end{cases} \vee \begin{cases} 1f(2) \leq 0 \\ 1f(-2) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2m + 5 \leq 0 \\ 2m + 5 > 0 \end{cases} \vee \begin{cases} -2m + 5 > 0 \\ 2m + 5 \leq 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow m \geq \frac{5}{2} \vee m \leq -\frac{5}{2}$

BÀI TẬP

1. Giải các phương trình :

   a/ $1 + \cos^3 x - \sin^3 x = \sin x$

   b/ $\cos^3 x + \cos^2 x + 2\sin x - 2 = 0$

   c/ $\cos 2x + 5 = 2(2 - \cos x)(\sin x - \cos x)$

   d/ $\cot gx - tgx = \sin x + \cos x$

   e/ $\sin^3 x - \cos^3 x = \sin x - \cos x$

   f/ $1 + tgx = \sin x + \cos x$

   g/ $\sin 2x + \sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1$

   k/ $\sin 2x - 12(\sin x - \cos x) + 12 = 0$

   l/ $\frac{\sin x + \cos x}{\sin 2x + 1} = 1$

   m/ $\frac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x} = \frac{1 - \cos^3 x}{1 - \sin^3 x}$

   n/ $5(\sin x + \cos x) + \sin 3x - \cos 3x = 2\sqrt{2}(2 + \sin 2x)$

   o/ $1 + \sin x + \cos x + \sin 2x + 2\cos 2x = 0$

   p/ $\sin^2 x\cos x - \cos 2x + \sin x = \cos^2 x\sin x + \cos x$

   r/ $\cos 2x + 5 = 2(2 - \cos x)(\sin x - \cos x)$

   s/ $\cos^2 x + \sin^3 x + \cos x = 0$

   t/ $4\sin^3 x - 1 = 3\sin x - \sqrt{3}\cos 3x$

2. Cho phương trình $\sin 2x(\sin x + \cos x) = m(1)$

   a/ Chứng minh nếu $|m| > \sqrt{2}$ thì (1) vô nghiệm

   b/ Giải phương trình khi $|m| = \sqrt{2}$

3. Cho phương trình $\sin 2x + 4(\cos x - \sin x) = m$

   a/ Giải phương trình khi $m = 4$

   b/ Tìm m để phương trình có nghiệm

4. Cho phương trình : $\sin x\cos x - m(\sin x + \cos x) + 1 = 0$

   a/ Giải phương trình khi $m = \sqrt{2}$

   b/ Tìm m để phương trình có nghiệm $\quad$ $(\text{ĐS}: |m| \geq 1)$

5. Cho phương trình $\frac{3}{\sin^2 x} + 3tg^2x = m(tgx + \cot gx) = 1$

   Tìm m để phương trình có nghiệm $\quad$ $(\text{ĐS}: |m| \geq 4)$

Th.S Phạm Hồng Danh
TT luyện thi ĐH CLC Vĩnh Viễn