CHƯƠNG VI: PHƯƠNG TRÌNH ĐẲNG CẤP

$a\sin^2 u + b\sin u\cos u + c\cos^2 u = d$

Cách giải :

• Tìm nghiệm $u = \frac{\pi}{2} + k\pi$ (lúc đó $\cos u = 0$ và $\sin u = \pm 1$)

• Chia hai vế phương trình cho $\cos^2 u \neq 0$ ta được phương trình :

$atg^2u + btgu + c = d\left(1 + tg^2u\right)$

Đặt $t = tgu$ ta có phương trình :

$(a-d)t^2 + bt + c - d = 0$

Giải phương trình tìm được $t = tgu$

Bài 127 : Giải phương trình

$$\cos^2 x - \sqrt{3}\sin 2x = 1 + \sin^2 x \ (*)$$

Vì $\cos x = 0$ không là nghiệm nên

Chia hai vế của (*) cho $\cos^2 \neq 0$ ta được

$(*) \Leftrightarrow 1 - 2\sqrt{3}tgx = \left(1 + tg^2x\right) + tg^2x$

Đặt $t = tgx$ ta có phương trình :

$2t^2 + 2\sqrt{3}t = 0$

$\Leftrightarrow t = 0 \vee t = -\sqrt{3}$

Vậy $(*) \Leftrightarrow tgx = 0$ hay $tgx = -\sqrt{3} \Leftrightarrow x = k\pi$ hay $x = -\frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Bài 128 : Giải phương trình

$$\cos^3 x - 4\sin^3 x - 3\cos x\sin^2 x + \sin x = 0 \ (*)$$

• Khi $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ thì $\cos x = 0$ và $\sin x = \pm 1$

thì (*) vô nghiệm

• Do $\cos x = 0$ không là nghiệm nên chia hai vế của (*) cho $\cos^3 x$

ta có $(*) \Leftrightarrow 1 - 4tg^3x - 3tg^2x + tgx\left(1 + tg^2x\right) = 0$

$\Leftrightarrow 3tg^3x + 3tg^2x - tgx - 1 = 0$

$\Leftrightarrow (tgx + 1)\left(3tg^2x - 1\right) = 0$

$\Leftrightarrow tgx = -1 \vee tgx = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$

$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \vee x = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Bài 129 : Giải phương trình

$$3\cos^4 x - 4\sin^2 x\cos^2 x + \sin^4 x = 0 \, (*)$$

Do cosx = 0 không là nghiệm nên chia hai vế của (*) cho $\cos^4 x \neq 0$

Ta có : (*) $\Leftrightarrow 3 - 4tg^2x + tg^4x = 0$

$\Leftrightarrow tg^2x = 1 \vee tg^2x = 3$

$\Leftrightarrow tgx = \pm 1 = tg\left(\pm\frac{\pi}{4}\right) \vee tgx = tg\left(\pm\frac{\pi}{3}\right)$

$\Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{4} + k\pi \vee x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Bài 130 : Giải phương trình $\sin 2x + 2tgx = 3 \, (*)$

Chia hai vế của (*) cho $\cos^2 x \neq 0$ ta được

$(*) \Leftrightarrow \frac{2\sin x\cos x}{\cos^2 x} + \frac{2tgx}{\cos^2 x} = \frac{3}{\cos^2 x}$

$\Leftrightarrow 2tgx + 2tgx\left(1 + tg^2x\right) = 3\left(1 + tg^2x\right)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} t = tgx \\ 2t^3 - 3t^2 + 4t - 3 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} t = tgx \\ (t-1)\left(2t^2 - t + 3\right) = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow tgx = 1$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Bài 131 : Giải phương trình

$$\sin x\sin 2x + \sin 3x = 6\cos^3 x \, (*)$$

$(*) \Leftrightarrow 2\sin^2 x\cos x + 3\sin x - 4\sin^3 x = 6\cos^3 x$

• Khi $\cos x = 0$ ($\sin x = \pm 1$) thì $(*)$ vô nghiệm

• Chia hai vế phương trình (*) cho $\cos^3 x \neq 0$ ta được

$(*) \Leftrightarrow \frac{2\sin^2 x}{\cos^2 x} + \frac{3\sin x}{\cos x}.\frac{1}{\cos^2 x} - 4\frac{\sin^3 x}{\cos^3 x} = 6$

$\Leftrightarrow 2tg^2x + 3tgx\left(1 + tg^2x\right) - 4tg^3x = 6$

$\Leftrightarrow tg^3x - 2tg^2x - 3tgx + 6 = 0$

$\Leftrightarrow (tgx - 2)\left(tg^2x - 3\right) = 0$

$\Leftrightarrow tgx = 2 = tg\alpha \vee tgx = \pm\sqrt{3}$

$\Leftrightarrow x = \alpha + k\pi \vee x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ (với $tg\alpha = 2$)

Bài 132 : (Đề thi tuyển sinh Đại học khối A, năm 2003)
Giải phương trình
$$\cot gx - 1 = \frac{\cos 2x}{1 + tgx} + \sin^2 x - \frac{1}{2}\sin 2x \ (*)$$

Điều kiện $\sin 2x \neq 0$ và $tgx \neq -1$

Ta có : $\dfrac{\cos 2x}{1 + tgx} = \dfrac{\cos^2 x - \sin^2 x}{1 + \dfrac{\sin x}{\cos x}} = \dfrac{\cos x\left(\cos^2 x - \sin^2 x\right)}{\cos x + \sin x}$

$= \cos x\left(\cos x - \sin x\right)$ $\left(\text{do } tgx = -1 \text{ nên, } \sin x + \cos x \neq 0\right)$

Do đó : $(*) \Leftrightarrow \dfrac{\cos x}{\sin x} - 1 = \left(\cos^2 x - \sin x \cos x\right) + \sin^2 x - \dfrac{1}{2}\sin 2x$

$\Leftrightarrow \dfrac{\cos x - \sin x}{\sin x} = 1 - \sin 2x$

$\Leftrightarrow \left(\cos x - \sin x\right) = \sin x\left(\cos x - \sin x\right)^2$

$\Leftrightarrow \cos x - \sin x = 0$ hay $1 = \sin x\left(\cos x - \sin x\right)$ (**)

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} tgx = 1\left(\text{nhận so với } tgx \neq -1\right) \\ \dfrac{1}{\cos^2 x} = \dfrac{\sin x}{\cos x} - tg^2 x \ \ \left(\text{do } \cos x \neq 0\right) \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ 2tg^2 x - tgx + 1 = 0\left(\text{vô nghiệm}\right) \end{array}\right.$$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ $\left(\text{nhận do } \sin 2x \neq 0\right)$

<u>Lưu ý</u> : có thể làm cách khác

$(**) \Leftrightarrow 1 - \dfrac{1}{2}\sin 2x + \dfrac{1}{2}\left(1 - \cos 2x\right) = 0$

$\Leftrightarrow 3 = \sin 2x + \cos 2x$

$\Leftrightarrow 3 = \sqrt{2}\sin\left(2x + \dfrac{\pi}{4}\right)$: vô nghiệm

Bài 133 : Giải phương trình $\sin 3x + \cos 3x + 2\cos x = 0 \ (*)$

$(*) \Leftrightarrow \left(3\sin x - 4\sin^3 x\right) + \left(4\cos^3 x - 3\cos x\right) + 2\cos x = 0$

$\Leftrightarrow 3\sin x - 4\sin^3 x + 4\cos^3 x - \cos x = 0$

Vì cosx = 0 không là nghiệm nên chia hai vế phương trình cho $\cos^3 x \neq 0$ ta được

$(*) \Leftrightarrow 3tgx\left(1 + tg^2 x\right) - 4tg^3 x + 4 - \left(1 + tg^2 x\right) = 0$

$$\Leftrightarrow -tg^3x - tg^2x + 3tgx + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = tgx \\ t^3 + t^2 - 3t - 3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = tgx \\ (t+1)\left(t^2 - 3\right) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow tgx = -1 \vee tgx = \pm\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \vee x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Bài 134 : Giải phương trình $6\sin x - 2\cos^3 x = \dfrac{5\sin 4x.\cos x}{2\cos 2x}(*)$

Điều kiện : $\cos 2x \neq 0 \Leftrightarrow \cos^2 x - \sin^2 x \neq 0 \Leftrightarrow tgx \neq \pm 1$

Ta có : (*) $\Leftrightarrow \begin{cases} 6\sin x - 2\cos^3 x = \dfrac{10\sin 2x\cos 2x\cos x}{2\cos 2x} \\ \cos 2x \neq 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6\sin x - 2\cos^3 x = 5\sin 2x\cos x \\ tgx \neq \pm 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6\sin x - 2\cos^3 x = 10\sin x\cos^2 x\,(**) \\ tgx \neq \pm 1 \end{cases}$$

Do cosx = 0 không là nghiệm của (**), chia hai vế phương trình (**) cho $\cos^3 x$ ta được

$$(**) \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{6tgx}{\cos^2 x} - 2 = 10tgx \\ tgx \neq \pm 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = tgx \text{ với } t \neq \pm 1 \\ 6t\left(1 + t^2\right) - 2 = 10t \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = tgx \text{ với } t \neq \pm 1 \\ 3t^3 - 2t - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = tgx \text{ với } t \neq \pm 1 \\ (t-1)(3t^2 + 3t + 1) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = tgx \text{ với } t \neq \pm 1 \\ t = 1 \end{cases} \text{ : vô nghiệm}$$

Bài 135 : Giải phương trình $\sin x - 4\sin^3 x + \cos x = 0(*)$

- Vì cosx = 0 không là nghiệm nên chia hai vế phương trình cho $\cos^3 x$ thì $(*) \Leftrightarrow tgx\left(1 + tg^2x\right) - 4tg^3x + 1 + tg^2x = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = tgx \\ -3t^3 + t^2 + t + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = tgx \\ (t-1)\left(3t^2 + 2t + 1\right) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow tgx = 1$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Bài 136 : Giải phương trình $tgx\sin^2 x - 2\sin^2 x = 3(\cos 2x + \sin x\cos x)(*)$

Chia hai vế của phương trình (*) cho $\cos^2 x$

$$(*) \Leftrightarrow tg^3x - 2tg^2x = \frac{3\left(\cos^2 x - \sin^2 x + \sin x\cos x\right)}{\cos^2 x}$$

$$\Leftrightarrow tg^3x - 2tg^2x = 3\left(1 - tg^2x + tgx\right)$$

$$\Leftrightarrow tg^3x + tg^2x - 3tgx - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = tgx \\ t^3 + t^2 - 3t - 3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = tgx \\ (t+1)\left(t^2 - 3\right) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow tgx = -1 \vee tgx = \pm\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \vee x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Bài 137 : Cho phương trình

$$(4 - 6m)\sin^3 x + 3(2m - 1)\sin x + 2(m - 2)\sin^2 x\cos x - (4m - 3)\cos x = 0(*)$$

a/ Giải phương trình khi m = 2

b/ Tìm m để phương trình (*) có duy nhất một nghiệm trên $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$

Khi $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ thì cosx = 0 và $\sin x = \pm 1$ nên

(*) thành : $\pm(4 - 6m) \pm 3(2m - 1) = 0$

$$\Leftrightarrow 1 = 0 \text{ vô nghiệm}$$

chia hai về (*) cho $\cos^3 x \neq 0$ thì

$$(*) \Leftrightarrow (4 - 6m)tg^3x + 3(2m - 1)tgx\left(1 + tg^2x\right) + 2(m - 2)tg^2x - (4m - 3)\left(1 + tg^2x\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = tgx \\ t^3 - (2m + 1)t^2 + 3(2m - 1)t - 4m + 3 = 0(**) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = tgx \\ (t-1)(t^2 - 2mt + 4m - 3) = 0 \end{cases}$$

a/ Khi m = 2 thì (*) thành $\begin{cases} t = tgx \\ (t-1)(t^2 - 4t + 5) = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow tgx = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

b/ Ta có : $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$ thì $tgx = t \in [0,1]$

Xét phương trình : $t^2 - 2mt + 4m - 3 = 0\,(2)$

$\Leftrightarrow t^2 - 3 = 2m(t-2)$

$\Leftrightarrow \dfrac{t^2-3}{t-2} = 2m$ (do t = 2 không là nghiệm)

Đặt $y = f(t) = \dfrac{t^2-3}{t-2}\,(C)$ và (d) $y = 2m$

Ta có : $y' = f(t) = \dfrac{t^2-4t+3}{(t-2)^2}$

t		0		1		2		3	
y'	+		+	0	−	‖	−	0	+
y		$\frac{3}{2}$	↗	2		‖			

Do (**) luôn có nghiệm $t = 1 \in [0,1]$ trên yêu cầu bài toán

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (d)\ y = 2m \text{ không có điểm chung với } (C) \\ (d) \text{ cắt } (C) \text{ tại 1 điểm duy nhất } t = 1 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow 2m < \dfrac{3}{2} \vee 2m \geq 2$

$\Leftrightarrow m < \dfrac{3}{4} \vee m \geq 1$

<u>Cách khác :</u>

Y C B T $\Leftrightarrow f(t) = t^2 - 2mt + 4m - 3 = 0\,(2)$ vô nghiệm trên $[0,1)$.

Ta có (2) có nghiệm $\in [0,1] \Leftrightarrow f(0).f(1) \leq 0$ *hay* $\begin{cases} \Delta \geq 0 \\ af(0) \geq 0 \\ af(1) \geq 0 \\ 0 \leq \dfrac{S}{2} \leq 1 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow (4m-3)(2m-2)\le 0 \; hay \begin{cases} m^2-4m+3\ge 0 \\ 4m-3>0 \\ 2m-2>0 \\ 0\le m\le 1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \frac{3}{4}\le m\le 1$$

Do đó (2) vô nghiệm trên $[0,1) \Leftrightarrow m<\frac{3}{4} \; hay \; m>1 \; hay \; f(1)=0$

$$\Leftrightarrow m<\frac{3}{4} \vee m\ge 1$$

BÀI TẬP

1. Giải các phương trình sau :

a/ $\cos^3 x + \sin x - 3\sin^2 x\cos x = 0$

b/ $\sin^2 x(\mathrm{tg}x + 1) = 3\sin x(\cos x - \sin x) + 3$

c/ $2\cos^2 x + \cos 2x + \sin x = 0$

d/ $\mathrm{tg}^2 x = \dfrac{1-\cos^3 x}{1-\sin^3 x}$

e/ $\sin^3 x - 5\sin^2 x\cos x - 3\sin x\cos^2 x + 3\cos^3 x = 0$

f/ $\cos^3 x + \sin x - 3\sin^2 x\cos x = 0$

g/ $1 + \mathrm{tg}x = 2\sqrt{2}\sin x$

h/ $\sin^3 x + \cos^3 x = \sin x - \cos x$

k/ $3\mathrm{tg}^2 x + 4\mathrm{tg}x + 4\cot gx + 3\cot g^2 x + 2 = 0$

m/ $3tg^2 x - tgx + \dfrac{3(1+\sin x)}{\cos^2 x} - 8\cos^2(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{x}{2}) = 0$

n/ $\dfrac{\sin x + \cos x}{\sin 2x} = 1$

2. Cho phương trình : $\sin^2 x + 2(m-1)\sin x\cos x - (m+1)\cos^2 x = m$

a/ Tìm m để phương trình có nghiệm

b/ Giải phương trình khi m = -2 $\quad (\text{ĐS}: m \in [-2,1])$

Th.S Phạm Hồng Danh
TT luyện thi đại học CLC Vĩnh Viễn