



Tài eBook, Đề thi, Tài liệu học tập...

Book.Key.To

CHƯƠNG VIII

PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC KHÔNG MẪU MỤC

Trường hợp 1: TỔNG HAI SỐ KHÔNG ÂM

Áp dụng

$$\text{Nếu } \begin{cases} A \geq 0 \wedge B \geq 0 \\ A + B = 0 \end{cases} \text{ thì } A = B = 0$$

Bài 156 Giải phương trình:

$$4 \cos^2 x + 3 \operatorname{tg}^2 x - 4\sqrt{3} \cos x + 2\sqrt{3} \operatorname{tg} x + 4 = 0 \quad (*)$$

Ta có:

$$(*) \Leftrightarrow (2 \cos x - \sqrt{3})^2 + (\sqrt{3} \operatorname{tg} x + 1)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \operatorname{tg} x = -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm \frac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \operatorname{tg} x = -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Bài 157 Giải phương trình:

$$8 \cos 4x \cdot \cos^2 2x + \sqrt{1 - \cos 3x} + 1 = 0 \quad (*)$$

$$\text{Ta có: } (*) \Leftrightarrow 4 \cos 4x (1 + \cos 4x) + 1 + \sqrt{1 - \cos 3x} = 0$$

$$\Leftrightarrow (4 \cos^2 4x + 4 \cos 4x + 1) + \sqrt{1 - \cos 3x} = 0$$

$$\Leftrightarrow (2 \cos 4x + 1)^2 + \sqrt{1 - \cos 3x} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos 4x = -\frac{1}{2} \\ \cos 3x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 4x = -\frac{1}{2} \\ 3x = k2\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos 4x = -\frac{1}{2} \\ x = \frac{k2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \text{ (có 3 đầu ngọn cung)}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos 4x = -\frac{1}{2} \\ x = -\frac{2\pi}{3} + m2\pi \text{ hay } x = m2\pi \text{ hay } x = \frac{2\pi}{3} + m2\pi, m \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = \pm \frac{2\pi}{3} + m2\pi, m \in \mathbb{Z}$$

(ta nhận $k = \pm 1$ và loại $k = 0$)

Bài 158 Giải phương trình:

$$\sin^2 x + \frac{\sin^2 3x}{3 \sin 4x} (\cos 3x \sin^3 x + \sin 3x \cos^3 x) = \sin x \sin^2 3x \quad (*)$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } & \cos 3x \cdot \sin^3 3x + \sin 3x \cdot \cos^3 x \\ &= (4 \cos^3 x - 3 \cos x) \sin^3 x + (3 \sin x - 4 \sin^3 x) \cos^3 x \\ &= -3 \cos x \sin^3 x + 3 \sin x \cos^3 x = 3 \sin x \cos x (\cos^2 x - \sin^2 x) \\ &= \frac{3}{2} \sin 2x \cdot \cos 2x = \frac{3}{4} \sin 4x \end{aligned}$$

$$\text{Vậy: } (*) \Leftrightarrow \sin^2 x + \frac{1}{4} \sin^2 3x = \sin x \sin^2 3x \text{ và } \sin 4x \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2} \sin^2 3x - \sin x \right)^2 - \frac{1}{4} \sin^4 3x + \frac{1}{4} \sin^2 3x = 0 \text{ và } \sin 4x \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2} \sin^2 3x - \sin x \right)^2 + \frac{1}{4} \sin^2 3x (1 - \sin^2 3x) = 0 \text{ và } \sin 4x \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2} \sin^2 3x - \sin x \right)^2 + \frac{1}{16} \sin^2 6x = 0 \text{ và } \sin 4x \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin 4x \neq 0 \\ \frac{1}{2} \sin^2 3x = \sin x \\ \sin 3x = 0 \vee \cos 3x = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin 4x \neq 0 \\ \sin 3x = 0 \\ \sin x = 0 \text{ (VN)} \end{cases} \vee \begin{cases} \sin 4x \neq 0 \\ \frac{1}{2} = \sin x \\ \sin 3x = \pm 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin 4x \neq 0 \\ \sin x = \frac{1}{2} \\ 3 \sin x - 4 \sin^3 x = \pm 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin 4x \neq 0 \\ \sin x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin 4x \neq 0 \\ x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \vee \frac{5\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \vee x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Trường hợp 2 **Phương pháp đối lập**

Nếu $\begin{cases} A \leq M \leq B \\ A = B \end{cases}$ thì $A = B = M$

Bài 159 Giải phương trình: $\sin^4 x - \cos^4 x = |\sin x| + |\cos x|$ (*)

Ta có: (*) $\Leftrightarrow \sin^2 x - \cos^2 x = |\sin x| + |\cos x|$
 $\Leftrightarrow -\cos 2x = |\sin x| + |\cos x|$
 $\Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x \leq 0 \\ \cos^2 2x = 1 + 2|\sin x||\cos x| \end{cases}$
 $\Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x \leq 0 \\ -\sin^2 2x = 2|\sin 2x| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x \leq 0 \\ \sin 2x = 0 \text{ (} \cos 2x = \pm 1 \text{)} \end{cases}$
 $\Leftrightarrow \cos 2x = -1$
 $\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Cách khác

Ta có $\sin^4 x - \cos^4 x \leq \sin^4 x \leq |\sin x| \leq |\sin x| + |\cos x|$
Do đó (*) $\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \sin^4 x = |\sin x| \end{cases} \Leftrightarrow \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Bài 160: Giải phương trình: $(\cos 2x - \cos 4x)^2 = 6 + 2\sin 3x$ (*)

Ta có: (*) $\Leftrightarrow 4\sin^2 3x \cdot \sin^2 x = 6 + 2\sin 3x$
• Do: $\sin^2 3x \leq 1$ và $\sin^2 x \leq 1$
nên $4\sin^2 3x \sin^2 x \leq 4$
• Do $\sin 3x \geq -1$ nên $6 + 2\sin 3x \geq 4$
Vậy $4\sin^2 3x \sin^2 x \leq 4 \leq 6 + 2\sin 3x$
Dấu = của phương trình (*) đúng khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \sin^2 3x = 1 \\ \sin^2 x = 1 \\ \sin 3x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin^2 x = 1 \\ \sin 3x = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \sin 3x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Bài 161 Giải phương trình: $\frac{\cos^3 x - \sin^3 x}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}} = 2 \cos 2x (*)$

Điều kiện: $\sin x \geq 0 \wedge \cos x \geq 0$

Ta có: (*)

$$\Leftrightarrow (\cos x - \sin x)(1 + \sin x \cos x) = 2(\cos^2 x - \sin^2 x)(\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x})$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x - \sin x = 0 & (1) \\ 1 + \sin x \cos x = 2(\cos x + \sin x)(\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}) & (2) \end{cases}$$

Ta có: $\sqcup (1) \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

\sqcup Xét (2)

Ta có: khi $\sin x \geq 0$ thì $\sqrt{\sin x} \geq \sin x \geq \sin^2 x$

Tương tự $\sqrt{\cos x} \geq \cos x \geq \cos^2 x$

Vậy $\sin x + \cos x \geq 1$ và $\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x} \geq 1$

Suy ra vế phải của (2) thì ≥ 2

Mà vế trái của (2): $1 + \frac{1}{2} \sin 2x \leq \frac{3}{2}$

Do đó (2) vô nghiệm

Vậy: (*) $\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Bài 162: Giải phương trình: $\sqrt{3 - \cos x} - \sqrt{\cos x + 1} = 2 (*)$

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } (*) &\Leftrightarrow \sqrt{3 - \cos x} = 2 + \sqrt{\cos x + 1} \\ &\Leftrightarrow 3 - \cos x = 5 + \cos x + 4\sqrt{\cos x + 1} \\ &\Leftrightarrow -2(\cos x + 1) = 4\sqrt{\cos x + 1} \end{aligned}$$

Ta có: $-2(\cos x + 1) \leq 0 \forall x$

mà $4\sqrt{\cos x + 1} \geq 0 \forall x$

Do đó dấu = của (*) xảy ra $\Leftrightarrow \cos x = -1$
 $\Leftrightarrow x = \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

Bài 163: Giải phương trình:

$$\cos 3x + \sqrt{2 - \cos^2 3x} = 2(1 + \sin^2 2x) (*)$$

Do bất đẳng thức Bunhiacốpski:

$$|AX + BY| \leq \sqrt{A^2 + B^2} \cdot \sqrt{X^2 + Y^2}$$

$$\text{nên: } |1 \cos 3x + 1 \sqrt{2 - \cos^2 3x}| \leq \sqrt{2} \cdot \sqrt{\cos^2 3x + (2 - \cos^2 3x)} = 2$$

$$\text{Dấu = xảy ra} \Leftrightarrow \cos 3x = \sqrt{2 - \cos^2 3x}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos 3x \geq 0 \\ \cos^2 3x = 2 - \cos^2 3x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos 3x \geq 0 \\ \cos 3x = \pm 1 \end{cases} \Leftrightarrow \cos 3x = 1$$

$$\text{Mặt khác: } 2(1 + \sin^2 2x) \geq 2$$

$$\text{dấu = xảy ra} \Leftrightarrow \sin 2x = 0$$

$$\text{Vậy: } \cos 3x + \sqrt{2 - \cos^2 3x} \leq 2 \leq 2(1 + \sin^2 2x)$$

dấu = của (*) chỉ xảy ra khi:

$$\cos 3x = 1 \wedge \sin 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos 3x = 1 \\ x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \text{ (có 4 đầu ngọn cung)}$$

$$\Leftrightarrow x = 2m\pi, m \in \mathbb{Z}$$

Bài 164: Giải phương trình: $\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{cotg}^2 x = 2 \sin^5 \left(x + \frac{\pi}{4} \right) (*)$

Điều kiện: $\sin 2x \neq 0$

- Do bất đẳng thức Cauchy: $\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{cotg}^2 x \geq 2$

dấu = xảy ra khi $\operatorname{tg} x = \operatorname{cotg} x$

- Mặt khác: $\sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) \leq 1$

$$\text{nên } 2 \sin^5 \left(x + \frac{\pi}{4} \right) \leq 2$$

$$\text{dấu = xảy ra khi } \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) = 1$$

$$\text{Do đó: } \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{cotg}^2 x \geq 2 \geq 2 \sin^5 \left(x + \frac{\pi}{4} \right)$$

$$\text{Dấu = của (*) xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{tg} x = \operatorname{cotg} x \\ \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{tg}^2 x = 1 \\ x = \frac{\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Trường hợp 3:

Áp dụng: Nếu $\begin{cases} A \leq M \text{ và } B \leq M \\ A + B = M + N \end{cases}$ thì $\begin{cases} A = M \\ B = N \end{cases}$

$$\sin u + \sin v = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin u = 1 \\ \sin v = 1 \end{cases}$$

$$\sin u - \sin v = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin u = 1 \\ \sin v = -1 \end{cases}$$

$$\sin u + \sin v = -2 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin u = -1 \\ \sin v = -1 \end{cases}$$

Tương tự cho các trường hợp sau
 $\sin u \pm \cos v = \pm 2$; $\cos u \pm \cos v = \pm 2$

Bài 165: Giải phương trình: $\cos 2x + \cos \frac{3x}{4} - 2 = 0 (*)$

Ta có: $(*) \Leftrightarrow \cos 2x + \cos \frac{3x}{4} = 2$

Do $\cos 2x \leq 1$ và $\cos \frac{3x}{4} \leq 1$

nên dấu = của (*) chỉ xảy ra

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x = 1 \\ \cos \frac{3x}{4} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{8h\pi}{3}, h \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow x = 8m\pi, m \in \mathbb{Z}$$

Do: $k\pi = \frac{8h\pi}{3} \Leftrightarrow k = \frac{8h}{3}$

để k nguyên ta chọn $h = 3m (m \in \mathbb{Z})$ (thì $k = 8m$)

Cách khác

$$\begin{cases} \cos 2x = 1 \\ \cos \frac{3x}{4} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \cos \frac{3k\pi}{4} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 8m\pi, m \in \mathbb{Z}$$

Bài 166: Giải phương trình:
 $\cos 2x + \cos 4x + \cos 6x = \cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 3x + 2 (*)$

$$\begin{aligned}\cos 2x + \cos 4x + \cos 6x &= 2 \cos 3x \cos x + 2 \cos^2 3x - 1 \\ &= 2 \cos 3x (\cos x + \cos 3x) - 1 \\ &= 4 \cos 3x \cdot \cos 2x \cdot \cos x - 1\end{aligned}$$

$$\text{Vậy: } \cos 3x \cdot \cos 2x \cdot \cos x = \frac{1}{4} (\cos 2x + 6 \cos 4x + \cos 6x + 1)$$

Do đó:

$$(*) \Leftrightarrow \cos 2x + \cos 4x + \cos 6x = \frac{1}{4} (\cos 2x + \cos 4x + \cos 6x) + \frac{9}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{4} (\cos 2x + \cos 4x + \cos 6x) = \frac{9}{4}$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x + \cos 4x + \cos 6x = 3$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x = 1 & \begin{cases} 2x = k2\pi, k \in \mathbb{Z} & (1) \end{cases} \\ \cos 4x = 1 & \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 4x = 1 & (2) \end{cases} \\ \cos 6x = 1 & \begin{cases} \cos 6x = 1 & (3) \end{cases} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 2x = k2\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

(Thế (1) vào (2) và (3) ta thấy hiển nhiên thỏa)

Bài 167:

Giải phương trình:

$$\cos 2x - \sqrt{3} \sin 2x - \sqrt{3} \sin x - \cos x + 4 = 0 (*)$$

Ta có:

$$(*) \Leftrightarrow 2 = \left(-\frac{1}{2} \cos 2x + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2x \right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \sin x + \frac{1}{2} \cos x \right)$$

$$\Leftrightarrow 2 = \sin \left(2x - \frac{\pi}{6} \right) + \sin \left(x + \frac{\pi}{6} \right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin \left(2x - \frac{\pi}{6} \right) = 1 \\ \sin \left(x + \frac{\pi}{6} \right) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \\ x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + h2\pi, h \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{3} + h2\pi, h \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + h\pi, h \in \mathbb{Z}$$

Cách khác

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} \sin \left(2x - \frac{\pi}{6} \right) = 1 \\ \sin \left(x + \frac{\pi}{6} \right) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin \left(2x - \frac{\pi}{6} \right) = 1 \\ x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + h2\pi, h \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = 1 \\ x = \frac{\pi}{3} + h2\pi, h \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + h\pi, h \in \mathbb{Z}$$

Bài 168: Giải phương trình: $4 \cos x - 2 \cos 2x - \cos 4x = 1 (*)$

Ta có: $(*) \Leftrightarrow 4 \cos x - 2(2 \cos^2 x - 1) - (1 - 2 \sin^2 2x) = 1$

$$\Leftrightarrow 4 \cos x - 4 \cos^2 x + 8 \sin^2 x \cos^2 x = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos x = 0 \text{ hay } 1 - \cos x + 2 \sin^2 x \cos x = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos x = 0 \text{ hay } 1 + \cos x (2 \sin^2 x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos x = 0 \text{ hay } 1 - \cos x \cos 2x = 0 (**)$$

$$\Leftrightarrow \cos x = 0 \text{ hay } 1 - \frac{1}{2}(\cos 3x + \cos x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos x = 0 \vee \cos 3x + \cos x = 2$$

$$\Leftrightarrow \cos x = 0 \vee \begin{cases} \cos 3x = 1 \\ \cos x = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \cos x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 1 \\ 4 \cos^3 x - 3 \cos x = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \cos x = 0 \vee \cos x = 1$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi \vee x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Cách khác

$$(**) \Leftrightarrow \cos x = 0 \text{ hay } \cos x \cos 2x = 1$$

$$\Leftrightarrow \cos x = 0 \vee \begin{cases} \cos x = 1 \\ \cos 2x = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} \cos x = -1 \\ \cos 2x = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \vee \begin{cases} x = k2\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \cos 2x = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} x = \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \cos 2x = -1 \end{cases} \text{ (loại)}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi \vee x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Bài 169: Giải phương trình:

$$\operatorname{tg} 2x + \operatorname{tg} 3x + \frac{1}{\sin x \cos 2x \cos 3x} = 0 (*)$$

Điều kiện: $\sin 2x \cos 2x \cos 3x \neq 0$

Lúc đó:

$$(*) \Leftrightarrow \frac{\sin 2x}{\cos 2x} + \frac{\sin 3x}{\cos 3x} + \frac{1}{\sin x \cdot \cos 2x \cdot \cos 3x} = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin 2x \sin x \cos 3x + \sin 3x \sin x \cdot \cos 2x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin x (\sin 2x \cos 3x + \sin 3x \cos 2x) + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin x \cdot \sin 5x = -1$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2}(\cos 6x - \cos 4x) = -1$$

$$\Leftrightarrow \cos 6x - \cos 4x = 2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos 6x = 1 \\ \cos 4x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \cos 2x \\ 4t^3 - 3t = 1 \\ 2t^2 - 1 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \cos 2x \\ 4t^3 - 3t = 1 \\ t = 0 \end{cases}$$

Do đó: (*) vô nghiệm.

Cách khác

$$\Leftrightarrow \sin x \cdot \sin 5x = -1 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 1 \\ \sin 5x = -1 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} \sin x = -1 \\ \sin 5x = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \sin 5x = -1 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \sin 5x = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x \in \emptyset$$

Bài 170: Giải phương trình: $\cos^2 3x \cdot \cos 2x - \cos^2 x = 0$ (*)

$$\text{Ta có: (*)} \Leftrightarrow \frac{1}{2}(1 + \cos 6x) \cos 2x - \frac{1}{2}(1 + \cos 2x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos 6x \cos 2x = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(\cos 8x + \cos 4x) = 1$$

$$\Leftrightarrow \cos 8x + \cos 4x = 2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos 8x = 1 \\ \cos 4x = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2 \cos^2 4x - 1 = 1 \\ \cos 4x = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos^2 4x = 1 \\ \cos 4x = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \cos 4x = 1$$

$$\Leftrightarrow 4x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

Cách khác

$$\Leftrightarrow \cos 6x \cos 2x = 1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x = 1 \\ \cos 6x = 1 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} \cos 2x = -1 \\ \cos 6x = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = k2\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \cos 6x = 1 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} 2x = \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \cos 6x = -1 \end{cases}$$

$$x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

Cách khác

$$\begin{cases} \cos 8x = 1 \\ \cos 4x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 8x = 1 \\ 4x = k2\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

Trường hợp 4: DÙNG KHẢO SÁT HÀM SỐ

$y = a^x$ là hàm giảm khi $0 < a < 1$.

Do đó ta có

$$|\sin x|^m < |\sin x|^n \Leftrightarrow n > m, \forall x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$|\cos x|^m < |\cos x|^n \Leftrightarrow n > m, \forall x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$|\sin x|^m \leq |\sin x|^n \Leftrightarrow n \geq m, \forall x$$

$$|\cos x|^m \leq |\cos x|^n \Leftrightarrow n \geq m, \forall x$$

Bài 171: Giải phương trình: $1 - \frac{x^2}{2} = \cos x$ (*)

Ta có: (*) $\Leftrightarrow 1 = \frac{x^2}{2} + \cos x$

Xét $y = \frac{x^2}{2} + \cos x$ trên \mathbb{R}

Ta có: $y' = x - \sin x$

và $y'' = 1 - \cos x \geq 0 \forall x \in \mathbb{R}$

Do đó $y'(x)$ là hàm đồng biến trên \mathbb{R}

Vậy $\forall x \in (0, \infty) : x > 0$ nên $y'(x) > y'(0) = 0$

$\forall x \in (-\infty, 0) : x < 0$ nên $y'(x) < y'(0) = 0$

Do đó:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$
y			

Vậy: $y = \frac{x^2}{2} + \cos x \geq 1 \forall x \in \mathbb{R}$

Dấu = của (*) chỉ xảy ra tại $x = 0$

Do đó (*) $\Leftrightarrow x = 0$ •

Bài 172: Giải phương trình

$$\sin^4 x + \sin^6 x = \sin^8 x + \sin^{10} x \quad (*)$$

Ta có

$$\begin{cases} \sin^4 x \geq \sin^8 x \text{ và dấu=} \text{xảy ra khi và chỉ khi } \sin^2 x = 1 \text{ hay } \sin x = 0 \\ \sin^6 x \geq \sin^{10} x \text{ và dấu=} \text{xảy ra khi và chỉ khi } \sin^2 x = 1 \text{ hay } \sin x = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 x = 1 \vee \sin x = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{2} + k2\pi \vee x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Cách khác

$$(*) \Leftrightarrow \sin^4 x = 0 \text{ hay } 1 + \sin^2 x = \sin^4 x + \sin^6 x$$

$$\Leftrightarrow \sin x = 0 \text{ hay } \sin^2 x = 1$$

BÀI TẬP**Giải các phương trình sau**

1. $\lg(\sin^2 x) - 1 + \sin^3 x = 0$
2. $\sin 4x - \cos 4x = 1 + 4\sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$
3. $\sin^2 x + \frac{1}{4} \sin^2 3x = \sin x \cdot \sin^2 3x$
4. $\pi^{\sin \sqrt{x}} = |\cos x|$
5. $2 \cos x + \sqrt{2} \sin 10x = 3\sqrt{2} + 2 \cos 28x \cdot \sin x$
6. $(\cos 4x - \cos 2x)^2 = 5 + \sin 3x$
7. $\sin x + \cos x = \sqrt{2}(2 - \sin 3x)$
8. $\sin 3x(\cos 2x - 2 \sin 3x) + \cos 3x(1 + \sin 2x - 2 \cos 3x) = 0$
9. $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x = -\sin 3x \cos 2x$
10. $2 \log_a(\cot gx) = \log_2(\cos x)$
11. $2^{\sin x} = \cos x$ với $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$
12. $\cos^{13} x + \sin^{14} x = 1$
13. $\cos 2x - \cos 6x + 4(\sin 2x + 1) = 0$
14. $\sin x + \cos x = \sqrt{2}(2 - \cos 3x)$
15. $\sin^3 x + \cos^3 x = 2 - \sin^4 x$
16. $\cos^2 x - 4 \cos x - 2x \sin x + x^2 + 3 = 0$
17. $2^{|\sin x|} + |\sin x| = \sin^2 x + \cos x$
18. $3 \cot g^2 x + 4 \cos^2 x - 2\sqrt{3} \cot gx - 4 \cos x + 2 = 0$