

I. ĐỊNH LÝ HÀM SIN VÀ COSIN

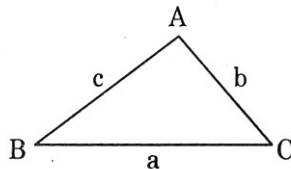
Cho ΔABC có a, b, c lần lượt là ba cạnh đối diện của $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$, R là bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC , S là diện tích ΔABC thì

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A = b^2 + c^2 - 4S \cdot \cotg A$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B = a^2 + c^2 - 4S \cdot \cotg B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C = a^2 + b^2 - 4S \cdot \cotg C$$



Bài 184 Cho ΔABC . Chứng minh:
 $A = 2B \Leftrightarrow a^2 = b^2 + bc$

Ta có: $a^2 = b^2 + bc \Leftrightarrow 4R^2 \sin^2 A = 4R^2 \sin^2 B + 4R^2 \sin B \cdot \sin C$
 $\Leftrightarrow \sin^2 A - \sin^2 B = \sin B \sin C$
 $\Leftrightarrow \frac{1}{2}(1 - \cos 2A) - \frac{1}{2}(1 - \cos 2B) = \sin B \sin C$
 $\Leftrightarrow \cos 2B - \cos 2A = 2 \sin B \sin C$
 $\Leftrightarrow -2 \sin(B + A) \sin(B - A) = 2 \sin B \sin C$
 $\Leftrightarrow \sin(B + A) \sin(A - B) = \sin B \sin C$
 $\Leftrightarrow \sin(A - B) = \sin B$ (do $\sin(A + B) = \sin C > 0$)
 $\Leftrightarrow A - B = B \vee A - B = \pi - B$ (loại)
 $\Leftrightarrow A = 2B$

Cách khác:

$$\sin^2 A - \sin^2 B = \sin B \sin C$$

$$\Leftrightarrow (\sin A - \sin B)(\sin A + \sin B) = \sin B \sin C$$

$$\Leftrightarrow 2 \cos \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2} \cdot 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} = \sin B \sin C$$

$$\Leftrightarrow \sin(B+A) \sin(A-B) = \sin B \sin C$$

$$\Leftrightarrow \sin(A-B) = \sin B$$
 (do $\sin(A+B) = \sin C > 0$)
 $\Leftrightarrow A - B = B \vee A - B = \pi - B$ (loại)
 $\Leftrightarrow A = 2B$

Bài 185: Cho ΔABC . Chứng minh: $\frac{\sin(A - B)}{\sin C} = \frac{a^2 - b^2}{c^2}$

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \frac{a^2 - b^2}{c^2} &= \frac{4R^2 \sin^2 A - 4R^2 \sin^2 B}{4R^2 \sin^2 C} \\ &= \frac{\sin^2 A - \sin^2 B}{\sin^2 C} = \frac{\frac{1}{2}(1 - \cos 2A) - \frac{1}{2}(1 - \cos 2B)}{\sin^2 C} \\ &= \frac{\cos 2B - \cos 2A}{2 \sin^2 C} = \frac{-2 \sin(A + B) \sin(B - A)}{2 \sin^2 C} \\ &= \frac{\sin(A + B) \cdot \sin(A - B)}{\sin^2 C} = \frac{\sin(A - B)}{\sin C} \\ &\quad (\text{do } \sin(A + B) = \sin C > 0) \end{aligned}$$

Bài 186: Cho ΔABC biết rằng $\text{tg} \frac{A}{2} \cdot \text{tg} \frac{B}{2} = \frac{1}{3}$.
Chứng minh $a + b = 2c$

$$\begin{aligned} \text{Ta có : } \text{tg} \frac{A}{2} \cdot \text{tg} \frac{B}{2} = \frac{1}{3} &\Leftrightarrow 3 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} = \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \\ &\quad \left(\text{do } \cos \frac{A}{2} > 0, \cos \frac{B}{2} > 0 \right) \\ &\Leftrightarrow 2 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} = \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} - \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \\ &\Leftrightarrow - \left[\cos \frac{A + B}{2} - \cos \frac{A - B}{2} \right] = \cos \frac{A + B}{2} \\ &\Leftrightarrow \cos \frac{A - B}{2} = 2 \cos \frac{A + B}{2} (*) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Mặt khác: } a + b &= 2R(\sin A + \sin B) \\ &= 4R \sin \frac{A + B}{2} \cos \frac{A - B}{2} \\ &= 8R \sin \frac{A + B}{2} \cos \frac{A + B}{2} \quad (\text{do } (*)) \\ &= 4R \sin(A + B) \\ &= 4R \sin C = 2c \end{aligned}$$

Cách khác:
 $a + b = 2c$

$$\Leftrightarrow 2R(\sin A + \sin B) = 4R \sin C$$

$$\begin{aligned}
\Leftrightarrow 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} &= 4 \sin \frac{C}{2} \cos \frac{C}{2} \\
\Leftrightarrow \cos \frac{A-B}{2} &= 2 \sin \frac{C}{2} = 2 \cos \frac{A+B}{2} \left(\text{do } \sin \frac{A+B}{2} = \cos \frac{C}{2} \right) \\
\Leftrightarrow \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} + \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} &= 2 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} - 2 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \\
\Leftrightarrow 3 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} &= \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \\
\Leftrightarrow \operatorname{tg} \frac{A}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{B}{2} &= \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

Bài 187: Cho ΔABC , chứng minh nếu $\cot gA, \cot gB, \cot gC$ tạo một cấp số cộng thì a^2, b^2, c^2 cũng là cấp số cộng.

Ta có: $\cot gA, \cot gB, \cot gC$ là cấp số cộng $\Leftrightarrow \cot gA + \cot gC = 2 \cot gB$ (*)

Cách 1:

Ta có: (*) $\Leftrightarrow \frac{\sin(A+C)}{\sin A \sin C} = \frac{2 \cos B}{\sin B} \Leftrightarrow \sin^2 B = 2 \sin A \sin C \cos B$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \sin^2 B = -[\cos(A+C) - \cos(A-C)][-\cos(A+C)] \\
&\Leftrightarrow \sin^2 B = \cos^2(A+C) - \cos(A-C)\cos(A+C) \\
&\Leftrightarrow \sin^2 B = \cos^2 B - \frac{1}{2}[\cos 2A + \cos 2C] \\
&\Leftrightarrow \sin^2 B = (1 - \sin^2 B) - \frac{1}{2}[(1 - 2\sin^2 A) + (1 - 2\sin^2 C)] \\
&\Leftrightarrow 2\sin^2 B = \sin^2 A + \sin^2 C \\
&\Leftrightarrow \frac{2b^2}{4R^2} = \frac{a^2}{4R^2} + \frac{c^2}{4R^2} \\
&\Leftrightarrow 2b^2 = a^2 + c^2 \\
&\Leftrightarrow a^2, b^2, c^2 \text{ là cấp số cộng} \bullet
\end{aligned}$$

Cách 2:

Ta có: $a^2 = b^2 + c^2 - 2ab \cos A$

$$\Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 4 \left(\frac{1}{2} bc \sin A \right) \cdot \cot gA$$

$$\Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 4S \cot gA$$

Do đó $\cot gA = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{4S}$

Tương tự $\cot gB = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{4S}, \cot gC = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{4S}$

Do đó: (*) $\Leftrightarrow \frac{b^2 + c^2 - a^2}{4S} + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{4S} = 2 \cdot \frac{a^2 + c^2 - b^2}{4S}$

$$\Leftrightarrow 2b^2 = a^2 + c^2$$

Bài 188: Cho ΔABC có $\sin^2 B + \sin^2 C = 2\sin^2 A$
 Chứng minh $\widehat{BAC} \leq 60^\circ$.

Ta có: $\sin^2 B + \sin^2 C = 2\sin^2 A$

$$\Leftrightarrow \frac{b^2}{4R^2} + \frac{c^2}{4R^2} = \frac{2a^2}{4R^2}$$

$$\Leftrightarrow b^2 + c^2 = 2a^2 (*)$$

Do định lý hàm cosin nên ta có

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$\Leftrightarrow \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{2(b^2 + c^2) - b^2 - c^2}{4bc} \quad (\text{do } (*))$$

$$= \frac{b^2 + c^2}{4bc} \geq \frac{2bc}{4bc} = \frac{1}{2} \quad (\text{do Cauchy})$$

Vậy: $\widehat{BAC} \leq 60^\circ$.

Cách khác:

định lý hàm cosin cho

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \Rightarrow b^2 + c^2 = a^2 + 2bc \cos A$$

Do đó

$$(*) \Leftrightarrow a^2 + 2bc \cos A = 2a^2$$

$$\Leftrightarrow \cos A = \frac{a^2}{2bc} = \frac{b^2 + c^2}{4bc} \geq \frac{1}{2} \quad (\text{do Cauchy})$$

Bài 189: Cho ΔABC . Chứng minh :

$$\cot g A + \cot g B + \cot g C = \frac{R(a^2 + b^2 + c^2)}{abc}$$

Ta có: $\cot g A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{4S}$

Tương tự: $\cot g B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{4S}, \cot g C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{4S}$

$$\text{Do đó } \cot g A + \cot g B + \cot g C = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4S} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4 \frac{abc}{4R}}$$

$$= R \frac{a^2 + b^2 + c^2}{abc}$$

Bài 190: Cho ΔABC có 3 góc A, B, C tạo thành một cấp số nhân có công bội $q = 2$.
 Giả sử $A < B < C$.

Chứng minh: $\frac{1}{a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$

Do A, B, C là cấp số nhân có q = 2 nên B = 2A, C = 2B = 4A

$$\text{Mà } A + B + C = \pi \text{ nên } A = \frac{\pi}{7}, B = \frac{2\pi}{7}, C = \frac{4\pi}{7}$$

Cách 1:

Ta có:

$$\begin{aligned} \frac{1}{b} + \frac{1}{c} &= \frac{1}{2R \sin B} + \frac{1}{2R \sin C} \\ &= \frac{1}{2R} \left(\frac{1}{\sin \frac{2\pi}{7}} + \frac{1}{\sin \frac{4\pi}{7}} \right) \\ &= \frac{1}{2R} \frac{\sin \frac{4\pi}{7} + \sin \frac{2\pi}{7}}{\sin \frac{2\pi}{7} \sin \frac{4\pi}{7}} \\ &= \frac{1}{2R} \cdot \frac{2 \sin \frac{3\pi}{7} \cdot \cos \frac{\pi}{7}}{\sin \frac{2\pi}{7} \cdot \sin \frac{3\pi}{7}} \left(\text{do } \sin \frac{4\pi}{7} = \sin \frac{3\pi}{7} \right) \\ &= \frac{1}{R} \cdot \frac{\cos \frac{\pi}{7}}{2 \sin \frac{\pi}{7} \cdot \cos \frac{\pi}{7}} = \frac{1}{2R \sin A} \\ &= \frac{1}{a} \end{aligned}$$

Cách 2:

$$\begin{aligned} \frac{1}{a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c} &\Leftrightarrow \frac{1}{\sin A} = \frac{1}{\sin B} + \frac{1}{\sin C} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{\sin A} &= \frac{1}{\sin 2A} + \frac{1}{\sin 4A} = \frac{\sin 4A + \sin 2A}{\sin 2A \sin 4A} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{\sin A} &= \frac{2 \sin 3A \cdot \cos A}{\sin 2A \sin 4A} = \frac{2 \cos A}{\sin 2A} = \frac{2 \cos A}{2 \sin A \cos A} \\ \text{do : } \sin 3A &= \sin \frac{3\pi}{7} = \sin \frac{4\pi}{7} = \sin 4A \bullet \end{aligned}$$

Bài 191: Tính các góc của ΔABC nếu

$$\frac{\sin A}{1} = \frac{\sin B}{\sqrt{3}} = \frac{\sin C}{2}$$

Do định lý hàm sin: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$

nên : $\frac{\sin A}{1} = \frac{\sin B}{\sqrt{3}} = \frac{\sin C}{2} (*)$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{2R} = \frac{b}{2R\sqrt{3}} = \frac{c}{4R}$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{b}{\sqrt{3}} = \frac{c}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} b = a\sqrt{3} \\ c = 2a \end{cases}$$

Ta có: $c^2 = 4a^2 = (a\sqrt{3})^2 + a^2$

$$\Leftrightarrow c^2 = b^2 + a^2$$

Vậy $\triangle ABC$ vuông tại C

Thay $\sin C = 1$ vào (*) ta được

$$\frac{\sin A}{1} = \frac{\sin B}{\sqrt{3}} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin A = \frac{1}{2} \\ \sin B = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A = 30^\circ \\ B = 60^\circ \end{cases}$$

Ghi chú:

Trong tam giác ABC ta có

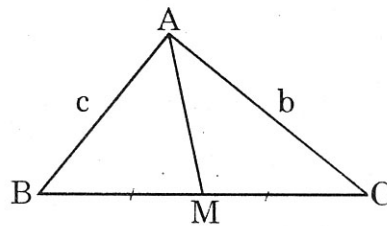
$$a = b \Leftrightarrow A = B \Leftrightarrow \sin A = \sin B \Leftrightarrow \cos A = \cos B$$

II. ĐỊNH LÝ VỀ ĐƯỜNG TRUNG TUYẾN

Cho $\triangle ABC$ có trung tuyến AM thì:

$$AB^2 + AC^2 = 2AM^2 + \frac{BC^2}{2}$$

hay : $c^2 + b^2 = 2m_a^2 + \frac{a^2}{2}$



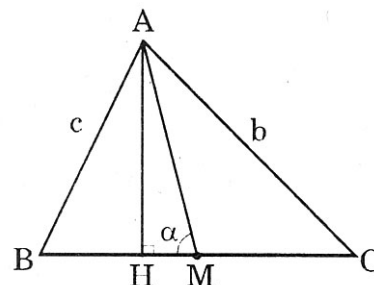
Bài 192: Cho $\triangle ABC$ có AM trung tuyến, $\angle AMB = \alpha$, $AC = b$, $AB = c$, S là diện tích $\triangle ABC$. Với $0 < \alpha < 90^\circ$

a/ Chứng minh: $\cotg \alpha = \frac{b^2 - c^2}{4S}$

b/ Giả sử $\alpha = 45^\circ$, chứng minh: $\cotg C - \cotg B = 2$

a/ $\triangle AHM$ vuông $\Rightarrow \cotg \alpha = \frac{HM}{AH} = \frac{MB - BH}{AH}$

$$\Rightarrow \cotg \alpha = \frac{a}{2AH} - \frac{BH}{AH} \quad (1)$$



Mặt khác:
$$\frac{b^2 - c^2}{4S} = \frac{(a^2 + c^2 - 2ac \cos B) - c^2}{2AH.a}$$

Đặt $BC = a$

$$\Rightarrow \frac{b^2 - c^2}{4S} = \frac{a}{2AH} - \frac{c \cos B}{AH} = \frac{a}{2AH} - \frac{BH}{AH} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta được :
$$\cotg \alpha = \frac{b^2 - c^2}{4S}$$

Cách khác:

Gọi S_1, S_2 lần lượt là diện tích tam giác ABH và ACH

Áp dụng định lý hàm cos trong tam giác ABH và ACH ta có:

$$\cotg \alpha = \frac{AM^2 + BM^2 - c^2}{4S_1} \quad (3)$$

$$-\cotg \alpha = \frac{AM^2 + CM^2 - b^2}{4S_2} \quad (4)$$

Lấy (3) - (4) ta có :

$$\cotg \alpha = \frac{b^2 - c^2}{4S} \quad (\text{vì } S_1 = S_2 = \frac{S}{2})$$

b/Ta có:
$$\begin{aligned} \cotg C - \cotg B &= \frac{HC}{AH} - \frac{HB}{AH} = \frac{HC - HB}{AH} \\ &= \frac{(MH + MC) - (MB - MH)}{AH} \\ &= \frac{2MH}{AH} = 2 \cotg \alpha = 2 \cotg 45^\circ = 2 \end{aligned}$$

Cách khác:

Áp dụng định lý hàm cos trong tam giác ABM và ACM ta có:

$$\cotg B = \frac{BM^2 + c^2 - AM^2}{4S_1} \quad (5)$$

$$\cotg C = \frac{CM^2 + b^2 - AM^2}{4S_2} \quad (6)$$

Lấy (6) - (5) ta có :

$$\cotg C - \cotg B = \frac{b^2 - c^2}{2S} = 2 \cotg \alpha = 2 \quad (\text{vì } S_1 = S_2 = \frac{S}{2} \text{ và câu a))}$$

Bài 193 Cho $\triangle ABC$ có trung tuyến phát xuất từ B và C là m_b, m_c thỏa

$\frac{c}{b} = \frac{m_b}{m_c} \neq 1$. Chứng minh: $2\cotg A = \cotg B + \cotg C$

$$\text{Ta có: } \frac{c^2}{b^2} = \frac{m_b^2}{m_c^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{c^2}{b^2} = \frac{\frac{1}{2}\left(a^2 + c^2 - \frac{b^2}{2}\right)}{\frac{1}{2}\left(b^2 + a^2 - \frac{c^2}{2}\right)}$$

$$\Leftrightarrow b^2c^2 + a^2c^2 - \frac{c^4}{2} = a^2b^2 + b^2c^2 - \frac{b^4}{2}$$

$$\Leftrightarrow a^2c^2 - a^2b^2 = \frac{1}{2}(c^4 - b^4)$$

$$\Leftrightarrow a^2(c^2 - b^2) = \frac{1}{2}(c^2 - b^2)(c^2 + b^2)$$

$$\Leftrightarrow 2a^2 = c^2 + b^2 \quad (1) \quad \left(\text{do } \frac{c}{b} \neq 1\right)$$

Thay $b^2 + c^2 = a^2 + 2bc \cos A$ vào (1), ta có (1) thành

$$\Leftrightarrow \cos A = \frac{a^2}{2bc} = \frac{4R^2 \sin^2 A}{2(2R \sin B)(2R \sin C)}$$

$$\Leftrightarrow 2 \frac{\cos A}{\sin A} = \frac{\sin A}{\sin B \sin C} = \frac{\sin(B+C)}{\sin B \sin C}$$

$$\Leftrightarrow 2 \cotg A = \frac{\sin B \cos C + \sin C \cos B}{\sin B \sin C} = \cotg C + \cotg B$$

Bài 194: Chứng minh nếu $\triangle ABC$ có trung tuyến AA' vuông góc với trung tuyến BB' thì $\cotg C = 2(\cotg A + \cotg B)$

$\triangle GAB$ vuông tại G có GC' trung tuyến nên $AB = 2GC'$

$$\text{Vậy } AB = \frac{2}{3}CC'$$

$$\Leftrightarrow 9c^2 = 4m_c^2$$

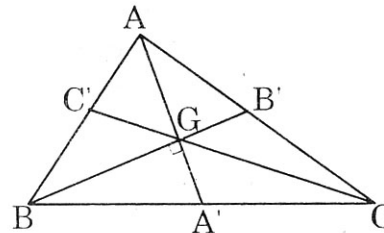
$$\Leftrightarrow 9c^2 = 2\left(b^2 + a^2 - \frac{c^2}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow 5c^2 = a^2 + b^2$$

$$\Leftrightarrow 5c^2 = c^2 + 2ab \cos C \quad (\text{do định lý hàm cos})$$

$$\Leftrightarrow 2c^2 = ab \cos C$$

$$\Leftrightarrow 2(2R \sin C)^2 = (2R \sin A)(2R \sin B) \cos C$$



$$\Leftrightarrow 2 \sin^2 C = \sin A \sin B \cos C$$

$$\Leftrightarrow \frac{2 \sin C}{\sin A \sin B} = \frac{\cos C}{\sin C}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2 \sin(A + B)}{\sin A \sin B} = \cotg C$$

$$\Leftrightarrow \frac{2(\sin A \cos B + \sin B \cos A)}{\sin A \sin B} = \cotg C$$

$$\Leftrightarrow 2(\cotg B + \cotg A) = \cotg C$$

III. DIỆN TÍCH TAM GIÁC

Gọi S : diện tích $\triangle ABC$

R : bán kính đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$

r : bán kính đường tròn nội tiếp $\triangle ABC$

p : nửa chu vi của $\triangle ABC$

thì

$$S = \frac{1}{2} a \cdot h_a = \frac{1}{2} b \cdot h_b = \frac{1}{2} c \cdot h_c$$

$$S = \frac{1}{2} ab \sin C = \frac{1}{2} ac \sin B = \frac{1}{2} bc \sin A$$

$$S = \frac{abc}{4R}$$

$$S = pr$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Bài 195: Cho $\triangle ABC$ chứng minh: $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = \frac{2S}{R^2}$

Ta có:

$$\begin{aligned} & \sin 2A + (\sin 2B + \sin 2C) \\ &= \sin 2A + 2\sin(B + C) \cdot \cos(B - C) \\ &= 2\sin A \cos A + 2\sin A \cos(B - C) \\ &= 2\sin A [\cos A + \cos(B - C)] \\ &= 2\sin A [-\cos(B + C) + \cos(B - C)] \\ &= 2\sin A \cdot [2\sin B \cdot \sin C] \\ &= 4 \cdot \frac{a}{2R} \cdot \frac{b}{2R} \cdot \frac{c}{2R} = \frac{1}{2} \frac{abc}{R^3} = \frac{1}{2} \frac{4RS}{R^3} = \frac{2S}{R^2} \end{aligned}$$

Bài 196 Cho $\triangle ABC$. Chứng minh :

$$S = \text{Diện tích } (\triangle ABC) = \frac{1}{4}(a^2 \sin 2B + b^2 \sin 2A)$$

$$\begin{aligned}
\text{Ta có : } S &= dt(\Delta ABC) = \frac{1}{2} ab \sin C \\
&= \frac{1}{2} ab \sin (A + B) \\
&= \frac{1}{2} ab [\sin A \cos B + \sin B \cos A] \\
&= \frac{1}{2} ab \left[\left(\frac{a}{b} \sin B \right) \cos B + \left(\frac{b}{a} \sin A \right) \cos A \right] \text{ (do đl hàm sin)} \\
&= \frac{1}{2} [a^2 \sin B \cos B + b^2 \sin A \cos A] \\
&= \frac{1}{4} (a^2 \sin 2B + b^2 \sin 2A)
\end{aligned}$$

Bài 197: Cho ΔABC có trọng tâm G và $\sphericalangle GAB = \alpha, \sphericalangle GBC = \beta, \sphericalangle GCA = \gamma$.

$$\text{Chứng minh: } \cot \alpha + \cot \beta + \cot \gamma = \frac{3(a^2 + b^2 + c^2)}{4S}$$

Gọi M là trung điểm BC , vẽ $MH \perp AB$

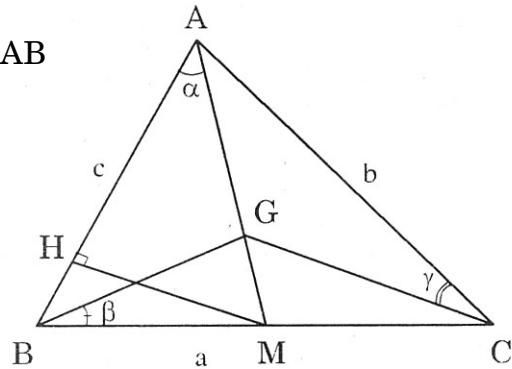
$$\Delta AMH \perp \Rightarrow \cos \alpha = \frac{AH}{AM}$$

$$\Delta BHM \perp \Rightarrow \cos B = \frac{BH}{MB} = \frac{2BH}{a}$$

Ta có: $AB = HA + HB$

$$\Leftrightarrow c = AM \cos \alpha + \frac{a}{2} \cos B$$

$$\Leftrightarrow \cos \alpha = \frac{1}{AM} \left(c - \frac{a}{2} \cos B \right) \quad (1)$$



Mặt khác do áp dụng định lý hàm sin vào ΔAMB ta có :

$$\frac{MB}{\sin \alpha} = \frac{AM}{\sin B} \Leftrightarrow \sin \alpha = \frac{1}{AM} MB \sin B = \frac{a}{2AM} \sin B \quad (2)$$

Lấy (1) chia cho (2) ta được :

$$\begin{aligned}
\cot \alpha &= \frac{c - \frac{a}{2} \cos B}{\frac{a}{2} \sin B} = \frac{2c - a \cos B}{a \cdot \frac{b}{2R}} \\
&= \frac{R(4c - 2a \cos B)}{ab} = \frac{R(4c^2 - 2ac \cos B)}{abc} \\
&= \frac{3c^2 + b^2 - a^2}{abc} = \frac{3c^2 + b^2 - a^2}{4S} \\
&\quad R
\end{aligned}$$

Chứng minh tương tự :

$$\cotg\beta = \frac{3a^2 + c^2 - b^2}{4S}$$

$$\cotg\gamma = \frac{3b^2 + a^2 - c^2}{4S}$$

Do đó:

$$\begin{aligned} \cotg\alpha + \cotg\beta + \cotg\gamma &= \frac{3c^2 + b^2 - a^2}{4S} + \frac{3a^2 + c^2 - b^2}{4S} + \frac{3b^2 + a^2 - c^2}{4S} \\ &= \frac{3(a^2 + b^2 + c^2)}{4S} \end{aligned}$$

Cách khác : Ta có $m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2)$ (*)

$$\cotg\alpha = \frac{c^2 + m_a^2 - \frac{a^2}{4}}{4S_{\Delta ABM}} = \frac{4c^2 + 4m_a^2 - a^2}{8S} \quad (a)$$

$$\text{Tương tự } \cotg\beta = \frac{4a^2 + 4m_b^2 - b^2}{8S} \quad (b), \cotg\gamma = \frac{4b^2 + 4m_c^2 - c^2}{8S} \quad (c)$$

Cộng (a), (b), (c) và kết hợp (*) ta có:

$$\cotg\alpha + \cotg\beta + \cotg\gamma = \frac{3(a^2 + b^2 + c^2)}{4S}$$

IV. BÁN KÍNH ĐƯỜNG TRÒN

Gọi R bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC

và r bán kính đường tròn nội tiếp ΔABC thì

$$\begin{aligned} R &= \frac{a}{2\sin A} = \frac{abc}{4S} \\ r &= \frac{S}{p} \\ r &= (p-a)\operatorname{tg}\frac{A}{2} = (p-b)\operatorname{tg}\frac{B}{2} = (p-c)\operatorname{tg}\frac{C}{2} \end{aligned}$$

Bài 198: Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp ΔABC .

Chứng minh:

$$a/ r = 4R \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$$

$$b/ IA \cdot IB \cdot IC = 4Rr^2$$

a/ Ta có : $\Delta IBH \perp \Rightarrow \cotg \frac{B}{2} = \frac{BH}{IH}$
 $\Rightarrow BH = r \cotg \frac{B}{2}$

Tương tự $HC = r \cotg \frac{C}{2}$

Mà : $BH + CH = BC$
 nên

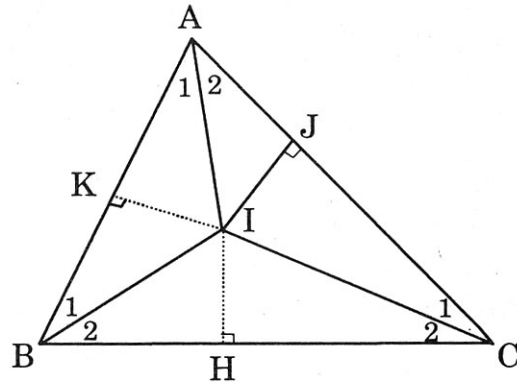
$$r \left(\cotg \frac{B}{2} + \cotg \frac{C}{2} \right) = a$$

$$\Leftrightarrow \frac{r \sin \left(\frac{B+C}{2} \right)}{\sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}} = a$$

$$\Leftrightarrow r \cos \frac{A}{2} = (2R \sin A) \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$$

$$\Leftrightarrow r \cos \frac{A}{2} = 4R \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$$

$$\Leftrightarrow r = 4R \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \quad (\text{do } \cos \frac{A}{2} > 0)$$



b/ Ta có : $\Delta \perp AKI \Rightarrow \sin \frac{A}{2} = \frac{IK}{IA} \Rightarrow IA = \frac{r}{\sin \frac{A}{2}}$

Tương tự $IB = \frac{r}{\sin \frac{B}{2}} ; IC = \frac{r}{\sin \frac{C}{2}}$

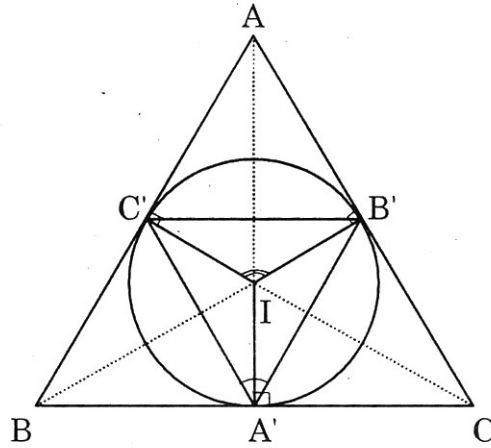
Do đó : $IA \cdot IB \cdot IC = \frac{r^3}{\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}}$

$$= \frac{r^3}{\frac{r}{4R}} = 4Rr^2 \quad (\text{do kết quả câu a})$$

Bài 199: Cho ΔABC có đường tròn nội tiếp tiếp xúc các cạnh ΔABC tại A', B', C' . $\Delta A'B'C'$ có các cạnh là a', b', c' và diện tích S' . Chứng minh:

$$a/ \frac{a'}{a} + \frac{b'}{b} = 2 \sin \frac{C}{2} \left(\sin \frac{A}{2} + \sin \frac{B}{2} \right)$$

$$b/ \frac{S'}{S} = 2 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$$



a/ Ta có : $\widehat{C'}A'B' = \frac{1}{2}\widehat{C'}IB' = \frac{1}{2}(\pi - A) = \frac{1}{2}(B + C)$

Áp dụng định lý hình sin vào $\Delta A'B'C'$

$$\frac{a'}{\sin A'} = 2r \quad (r: \text{bán kính đường tròn nội tiếp } \Delta ABC)$$

$$\Rightarrow a' = 2r \sin A' = 2r \sin \frac{B+C}{2} \quad (1)$$

$$\Delta ABC \text{ có : } a = BC = BA' + A'C$$

$$\Rightarrow a = r \cot g \frac{B}{2} + r \cot g \frac{C}{2}$$

$$\Rightarrow a = r \frac{\sin \frac{B+C}{2}}{\sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}} \quad (2)$$

Lấy $\frac{(1)}{(2)}$ ta được $\frac{a'}{a} = 2 \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$

Tương tự $\frac{b'}{b} = 2 \sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{C}{2}$

Vậy $\frac{a'}{a} + \frac{b'}{b} = 2 \sin \frac{C}{2} \left(\sin \frac{A}{2} + \sin \frac{B}{2} \right)$.

b/ Ta có: $\widehat{A'}C'B' = \frac{1}{2} \cdot \widehat{B'IA'} = \frac{1}{2}(\pi - C) = \frac{1}{2}(A + B)$

Vậy $\sin C' = \sin \frac{A+B}{2} = \cos \frac{C}{2}$

Ta có: $\frac{S'}{S} = \frac{dt(\Delta A'B'C')}{dt(\Delta ABC)} = \frac{\frac{1}{2}a'b'\sin C'}{\frac{1}{2}ab\sin C}$

$$\Rightarrow \frac{S'}{S} = \left(\frac{a'}{a}\right)\left(\frac{b'}{b}\right)\frac{\sin C'}{\sin C}$$

$$= 4 \sin \frac{B}{2} \sin^2 \frac{C}{2} \sin \frac{A}{2} \cdot \frac{\cos \frac{C}{2}}{2 \sin \frac{C}{2} \cos \frac{C}{2}}$$

$$= 2 \sin \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2} \cdot \sin \frac{A}{2}$$

Bài 200: Cho ΔABC có trọng tâm G và tâm đường tròn nội tiếp I . Biết GI vuông góc với đường phân giác trong của $\angle BCA$. Chứng minh:

$$\frac{a+b+c}{3} = \frac{2ab}{a+b}$$

Vẽ $GH \perp AC, GK \perp BC, ID \perp AC$

IG cắt AC tại L và cắt BC tại N

Ta có: $Dt(\Delta CLN) = 2Dt(\Delta LIC)$

$$= ID \cdot LC = r \cdot LC \quad (1)$$

Mặt khác:

$$Dt(\Delta CLN) = Dt(\Delta GLC) + Dt(\Delta GCN)$$

$$= \frac{1}{2}(GH \cdot LC + GK \cdot CN) \quad (2)$$

Do ΔCLN cân nên $LC = CN$

Từ (1) và (2) ta được:

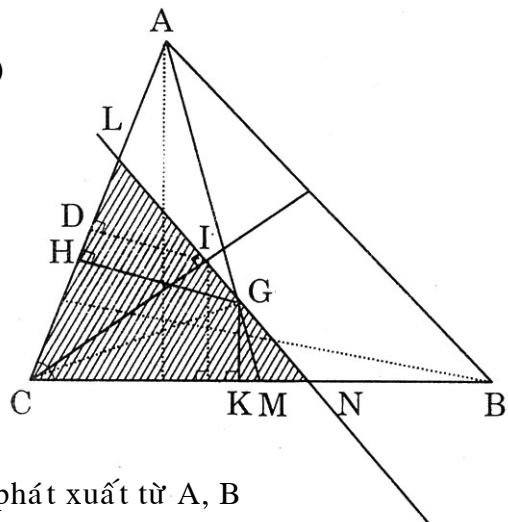
$$r \cdot LC = \frac{1}{2} LC (GH + GK)$$

$$\Leftrightarrow 2r = GH + GK$$

Gọi h_a, h_b là hai đường cao ΔABC phát xuất từ A, B

Ta có: $\frac{GK}{h_a} = \frac{MG}{MA} = \frac{1}{3}$ và $\frac{GH}{h_b} = \frac{1}{3}$

Do đó: $2r = \frac{1}{3}(h_a + h_b) \quad (3)$



Mà: $S = Dt(\triangle ABC) = pr = \frac{1}{2}a.h_a = \frac{1}{2}b.h_b$

Do đó: $h_a = \frac{2pr}{a}$ và $h_b = \frac{2pr}{b}$

Từ (3) ta có: $2r = \frac{2}{3}pr \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)$
 $\Leftrightarrow 1 = \frac{1}{3}p \left(\frac{a+b}{ab} \right)$
 $\Leftrightarrow 3 = \frac{a+b+c}{2} \cdot \frac{a+b}{ab}$
 $\Leftrightarrow \frac{2ab}{a+b} = \frac{a+b+c}{3}$

Th.S Phạm Hồng Danh (*TT luyện thi Vĩnh Viễn*)

BÀI TẬP

1. Cho ΔABC có ba cạnh là a, b, c . R và r lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp ΔABC . Chứng minh:

$$a/ (a - b) \cotg \frac{C}{2} + (b - c) \cotg \frac{A}{2} + (c - a) \cotg \frac{B}{2} = 0$$

$$b/ 1 + \frac{r}{R} = \cos A + \cos B + \cos C$$

$$c/ \text{Nếu } \cotg \frac{A}{2}, \cotg \frac{B}{2}, \cotg \frac{C}{2} \text{ là cấp số cộng thì } a, b, c \text{ cũng là cấp số cộng.}$$

$$d/ \text{Diện tích } \Delta ABC = Rr(\sin A + \sin B + \sin C)$$

$$e/ \text{Nếu } a^4 = b^4 + c^4 \text{ thì } \Delta ABC \text{ có 3 góc nhọn và } 2\sin^2 A = \text{tg}B.\text{tg}C$$

2. Nếu diện tích $(\Delta ABC) = (c + a - b)(c + b - a)$ thì $\text{tg}C = \frac{8}{15}$

3. Cho ΔABC có ba góc nhọn. Gọi A', B', C' là chân các đường cao vẽ từ A, B, C . Gọi S, R, r lần lượt là diện tích, bán kính đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp ΔABC . Gọi S', R', r' lần lượt là diện tích, bán kính đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp của $\Delta A'B'C'$. Chứng minh:

$$a/ S' = 2S \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C$$

$$b/ R' = \frac{R}{2}$$

$$c/ r' = 2R \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C$$

4. ΔABC có ba cạnh a, b, c tạo một cấp số cộng. Với $a < b < c$ Chứng minh :

$$a/ ac = 6Rr$$

$$b/ \cos \frac{A - C}{2} = 2 \sin \frac{B}{2}$$

$$c/ \text{Công sai } d = \frac{3r}{2} \left(\text{tg} \frac{C}{2} - \text{tg} \frac{A}{2} \right)$$

5. Cho ΔABC có ba góc A, B, C theo thứ tự tạo 1 cấp số nhân có công bội $q = 2$. Chứng minh:

$$a/ \frac{1}{a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

$$b/ \cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = \frac{5}{4}$$