Đề thi Dự trữ Khối D - năm 2007

Đề II

Câu I : Cho hàm số $y = \dfrac{x}{x-1}$ (C)

1. Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số.

2. Viết phương trình tiếp tuyến d của (C) sao cho d và hai tiệm cận của (C) cắt nhau tạo thành một tam giác cân.

Câu II :

1. Giải phương trình : $(1 - tgx)(1 + \sin 2x) = 1 + tgx$

2. Tìm m để hệ phương trình : $\begin{cases} 2x - y - m = 0 \\ x + \sqrt{xy} = 1 \end{cases}$ có nghiệm duy nhất

Câu III : Cho mặt phẳng (P): $x - 2y + 2z - 1 = 0$ và các đường thẳng $d_1 : \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-3}{-3} = \dfrac{z}{2}$ và $d_2 : \dfrac{x-5}{6} = \dfrac{y}{4} = \dfrac{z+5}{-5}$

1. Viết phương trình mặt phẳng (Q) chứa d_1 và (Q) $\perp$ (P).

2. Tìm các điểm $M \in d_1$, $N \in d_2$ sao cho MN // (P) và cách (P) một khoảng bằng 2.

Câu IV :

1. Tính $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x dx$

2. Giải phương trình: $\log_2 \dfrac{2^x - 1}{|x|} = 1 + x - 2^x$.

Câu Va *(cho chương trình THPT không phân ban)*

1. Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên chẵn mà mỗi số gồm 4 chữ số khác nhau.

2. Trong mặt phẳng Oxy cho các điểm A(0, 1) B(2, –1) và các đường thẳng: d_1: $(m - 1)x + (m - 2)y + 2 - m = 0$

d_2: $(2 - m)x + (m - 1)y + 3m - 5 = 0$

Chứng minh d_1 và d_2 luôn cắt nhau. Gọi $P = d_1 \cap d_2$. Tìm m sao cho $PA + PB$ lớn nhất

Câu Vb *(cho chương trình THPT phân ban)*

1. Giải phương trình: $2^{3x+1} - 7.2^{2x} + 7.2^{x} - 2 = 0$.

2. Cho lăng trụ đứng $ABCA_1B_1C_1$ có tất cả các cạnh đều bằng a. M là trung điểm của đoạn AA_1. Chứng minh $BM \perp B_1C$ và tính $d(BM, B_1C)$.

Bài Giải

Câu I.

1. Khảo sát hàm số (độc giả tự giải)

2. Ta có $y' = \dfrac{-1}{(x-1)^2} < 0, \forall x \neq 1$

Từ đồ thị ta thấy để tiếp tuyến tạo với hai tiệm cận một tam giác vuông cân ta phải có hệ số góc của tiếp tuyến là –1 tức là:

$$\frac{-1}{(x-1)^2} = -1 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 1 \Rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = 2$$

. Tại $x_1 = 0 \Rightarrow y_1 = 0 \Rightarrow$ phương trình tiếp tuyến là $y = -x$

. Tại $x_2 = 2 \Rightarrow y_2 = 2 \Rightarrow$ phương trình tiếp tuyến là $y = -x + 4$

Câu II.

1. Giải phương trình : $(1 - tgx)(1 + \sin 2x) = 1 + tgx$ (1)

Đặt: $t = tgx \Rightarrow \sin 2x = \dfrac{2t}{1+t^2}$. Pt (1) thành

$$(1-t)\left(1+\frac{2t}{1+t^2}\right) = 1+t \Leftrightarrow (1-t)(t+1)^2 = (t+1)(1+t^2)$$

$$\Leftrightarrow t+1 = 0 \text{ hay } (1-t)(t+1) = (1+t^2)$$

$$\Leftrightarrow t = -1 \text{ hay } t = 0$$

Do đó (1) $\Leftrightarrow tgx = 0$ hay $tgx = -1$

$$\Leftrightarrow x = k\pi \text{ hay } x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Cách khác

(1) $\Leftrightarrow (\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)^2 = \cos x + \sin x$

(hiển nhiên $\cos x = 0$ không là nghiệm)

$\Leftrightarrow$ cosx + sinx = 0 hay (cosx – sinx)(cosx + sinx) = 1

$\Leftrightarrow$ tgx = -1 hay cos2x = 1 $\Leftrightarrow$ $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$ hay $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$

2. Tìm m để hệ sau có nghiệm duy nhất

$$(\mathrm{I}) \begin{cases} 2x - y - m = 0 \\ x + \sqrt{xy} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y - m = 0 \\ \sqrt{xy} = 1 - x \end{cases}$$

Với điều kiện: $\begin{cases} xy \geq 0 \\ x \leq 1 \end{cases}$ ta có

$$(\mathrm{I}) \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x - m \\ xy = (1-x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x - m \\ y = \dfrac{(1-x)^2}{x} \end{cases} \quad (x \leq 1)$$

$$\Rightarrow \frac{(1-x)^2}{x} = 2x - m \Leftrightarrow x^2 + (2-m)x - 1 = 0 \quad (*)$$

(hiển nhiên x = 0 không là nghiệm của (*))

Đặt $f(x) = x^2 + (2-m)x - 1$, $(a = 1)$

ycbt $\Leftrightarrow$ tìm m để phương trình (*) có đúng 1 nghiệm thỏa $x \leq 1$

$$\Leftrightarrow af(1) < 0 \text{ hay } \begin{cases} f(1) = 0 \\ \dfrac{c}{a} = -1 > 1 (VN) \end{cases} \text{hay} \begin{cases} \Delta = 0 (vn, \text{do } ac < 0) \\ -\dfrac{b}{2a} \leq 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 2 - m < 0 \Leftrightarrow m > 2$$

Câu III.

1. d_1 đi qua A(1, 3, 0), VTCP $\vec{a} = (2, -3, 2)$

Mặt phẳng (P) có PVT $\overrightarrow{n_P} = (1, -2, 2)$

M/phẳng (Q) chứa d_1 và $\perp$ (P) nên (Q) có PVT $\overrightarrow{n_Q} = [\vec{a}, \overrightarrow{n_P}] = (-2, -2, -1)$

Vậy (Q) qua A có PVT $\overrightarrow{n_Q} = (-2, -2, -1)$ nên phương trình (Q):

–2(x – 1) – 2(y – 3) – 1(z – 0) = 0 $\Leftrightarrow$ 2x + 2y + z – 8 = 0

2. P/trình tham số d_1: $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3 - 3t \\ z = 2t \end{cases}$

$M \in d_1 \Rightarrow M(1+2t, 3-3t, 2t)$

P/trình tham số d_2: $\begin{cases} x = 5+6t' \\ y = 4t' \\ z = -5-5t' \end{cases}$

$M \in d_2 \Rightarrow N(5+6t', 4t', -5-5t')$

Vậy $\overrightarrow{MN} = (6t'-2t+4, 4t'+3t-3, -5t'-2t-5)$

Mặt phẳng (P) có PVT $\overrightarrow{n_P} = (1, -2, 2)$

Vì MN // (P) $\Leftrightarrow \overrightarrow{MN}.\overrightarrow{n_P} = 0$

$\Leftrightarrow 1(6t'-2t+4) - 2(4t'+3t-3) + 2(-5t'-2t-5) = 0 \Leftrightarrow t = -t'$

. Ta lại có khoảng cách từ MN đến (P) bằng d(M, P) vì MN // (P)

$$\frac{|1+2t-2(3-3t)+2(2t)-1|}{\sqrt{1+4+4}} = 2$$

$\Leftrightarrow |-6+12t| = 6 \Leftrightarrow -6+12t = 6$ hay $-6+12t = -6 \Leftrightarrow t = 1$ hay $t = 0$

. $t = 1 \Rightarrow t' = -1 \Rightarrow M_1(3, 0, 2)$ $N_1(-1, -4, 0)$

. $t = 0 \Rightarrow t' = 0 \Rightarrow M_2(1, 3, 0)$ $N_2(5, 0, -5)$

Câu IV.

1. Tính $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x dx$

Đặt: $u = x^2 \Rightarrow du = 2xdx$; $dv = \cos x dx$, chọn $v = \sin x$

Vậy $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x dx = x^2 \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx$

Ta có $x^2 \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{4}$

$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx$; Đặt $u = x \Rightarrow du = dx$

dv = sinxdx, chọn v = – cosx

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x dx = -x\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$$

$$= \left[-x\cos x + \sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

Vậy : $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos x dx = \frac{\pi^2}{4} - 2$

2. Giải phương trình $\log_2 \frac{2^x - 1}{|x|} = 1 + x - 2^x$ (*)

Điều kiện $\begin{cases} 2^x - 1 > 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^x > 1 = 2^0 \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 0$

(*) $\Leftrightarrow \log_2 \frac{2^x - 1}{x} = 1 - 2^x + x$ và $x > 0$

$\Leftrightarrow \log_2(2^x - 1) - \log_2 x = 1 - 2^x + x$ và $x > 0$

$\Leftrightarrow (2^x - 1) + \log_2(2^x - 1) = x + \log_2 x$ (**)

Xét hàm $f(t) = t + \log_2 t$ đồng biến nghiêm cách khi $t > 0$

Do đó $f(u) = f(v) \Leftrightarrow u = v$, với $u > 0, v > 0$

Vậy từ (**) $\Leftrightarrow 2^x - 1 = x \Leftrightarrow 2^x - x - 1 = 0$ (***)

Lại xét hàm $g(x) = 2^x - x - 1$ khi $x > 0$

$g'(x) = 2^x\ln 2 - 1$, $g'(x) = 0 \Leftrightarrow 2^x = \frac{1}{\ln 2} = \log_2 e > 1$

$\Leftrightarrow x = \log_2(\log_2 e) > 0$

Ta có $g''(x) > 0$ với mọi x nên $g'(x)$ là hàm tăng trên R

$\Rightarrow g'(x) < 0, \forall x < \log_2(\log_2 e)$ và $g'(x) > 0, \forall x > \log_2(\log_2 e)$

$\Rightarrow$ g giảm nghiêm cách trên $\left(-\infty; \log_2(\log_2 e)\right]$

và g tăng nghiêm cách trên $\left[\log_2(\log_2 e); +\infty\right)$

$\Rightarrow g(x)=0$ có tối đa là 1 nghiệm trên $\left(-\infty;\log_2(\log_2 e)\right]$, và có tối đa là 1 nghiệm trên $\left[\log_2(\log_2 e);+\infty\right)$.

bằng cách thử nghiệm ta có pt $g(x)=0$ (***) có 2 nghiệm là

$x = 0$ và $x = 1$. Vì $x > 0$ nên (*) $\Leftrightarrow x = 1$.

Câu Va.

1/ Gọi n = $\overline{a_1a_2a_3a_4}$ là số cần tìm. Vì n chẵn $\Rightarrow a_4$ chẵn.

* <u>TH1</u> : $a_4 = 0$ Ta có 1 cách chọn a_4

6 cách chọn a_1

5 cách chọn a_2

4 cách chọn a_3

Vậy ta có 1.6.5.4 = 120 số n

* <u>TH2</u> : $a_4 \neq 0$. Ta có 3 cách chọn a_4

5 cách chọn a_1

5 cách chọn a_2

4 cách chọn a_4

Vậy ta có 3.5.5.4 = 300 số n .

Tổng cộng hai trường hợp ta có : 120 + 300 = 420 số n

2. Tọa độ giao điểm P của d_1, d_2 là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases}(m-1)x+(m-2)y=m-2\\(2-m)x+(m-1)y=-3m+5\end{cases}$$

Ta có $D=\begin{vmatrix}m-1 & m-2\\2-m & m-1\end{vmatrix}=2m^2-6m+5=2\left(m-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{1}{2}>0 \quad \forall m$

Vì $D=2\left(m-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{1}{2}>0 \ \forall m$ nên d_1, d_2 luôn luôn cắt nhau.

Ta dễ thấy $A(0,1) \in d_1$; $B(2,-1) \in d_2$ và $d_1 \perp d_2$

$\Rightarrow \Delta$ APB vuông tại P $\Rightarrow$ P nằm trên đường tròn đường kính AB.

Ta có $(PA + PB)^2 \leq 2(PA^2 + PB^2) = 2AB^2 = 2(2\sqrt{2})^2 = 16$

$\Rightarrow PA + PB \leq 4$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow PA = PB \Leftrightarrow$ P là trung điểm của cung $\overset{\frown}{AB}$

Vậy Max (PA + PB) = 4 khi P là trung điểm của cung $\overset{\frown}{AB}$

$\Rightarrow$ P nằm trên đường thẳng y = x – 1 qua trung điểm I (1 ;0) của AB

và IP = $\sqrt{2}$ $\Rightarrow$ P (2 ; 1) hay P (0 ;- 1)

Vậy ycbt $\Leftrightarrow$ m = 1 v m = 2

Câu Vb.

1. Giải phương trình : $2^{3x+1} - 7.2^{2x} + 7.2^{x} - 2 = 0$

$$\Leftrightarrow 2.2^{3x} - 7.2^{2x} + 7.2^{x} - 2 = 0$$

Đặt $t = 2^x > 0$ thì (1) thành

$2t^3 - 7t^2 + 7t - 2 = 0$

$\Leftrightarrow (t-1)(2t^2 - 5t + 2) = 0 \Leftrightarrow t = 1$ hay $t = 2$ hay $t = \dfrac{1}{2}$

Do đó pt đã cho tương đương

$$2^x = 1 \text{ hay } 2^x = 2 \text{ hay } 2^x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = 0 \text{ hay } x = 1 \text{ hay } x = -1$$

2. Chọn hệ trục Oxyz sao cho

ta có A(0 ;0 ;0); A_1(0,0,a); C (- a ;0 ;0) $\Rightarrow B\left(-\dfrac{a}{2}, \dfrac{a\sqrt{3}}{2}, 0\right)$;

$B_1\left(-\dfrac{a}{2}, \dfrac{a\sqrt{3}}{2}, a\right)$;$M\left(0, 0, \dfrac{a}{2}\right)$

$$\Rightarrow \overrightarrow{BM} = \left(\frac{a}{2}, -\frac{a\sqrt{3}}{2}, \frac{a}{2}\right); \overrightarrow{CB_1} = \left(\frac{a}{2}, \frac{a\sqrt{3}}{2}, a\right)$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{BM}.\overrightarrow{CB_1} = \frac{a^2}{4} - \frac{3a^2}{4} + \frac{a^2}{2} = 0 \Rightarrow BM \perp B_1C$$

Ta có $\overrightarrow{B.B_1} = (0,0,a) \Rightarrow \quad d(BM, B_1C) = \dfrac{\left|[\overrightarrow{BM}.\overrightarrow{B_1C}].\overrightarrow{BB_1}\right|}{\left|[\overrightarrow{BM}.\overrightarrow{B_1C}]\right|} = \dfrac{a\sqrt{30}}{10}$