Đề thi Dự trữ khối A-năm 2007
Đề II

Câu I: Cho hàm số $y = x + m + \dfrac{m}{x-2}$ (Cm)

1. Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số với m = 1.
2. Tìm m để đồ thị (Cm) có cực trị tại các điểm A, B sao cho đường thẳng AB đi qua gốc tọa độ 0.

Câu II:

1. Giải phương trình: $2\cos^2 x + 2\sqrt{3}\sin x\cos x + 1 = 3(\sin x + \sqrt{3}\cos x)$
2. Giải bất phương trình $\begin{cases} x^4 - x^3y + x^2y^2 = 1 \\ x^3y - x^2 + xy = 1 \end{cases}$

Câu III: Trong không gian Oxyz cho các điểm A(2,0,0); B(0,4,0); C(2,4,6) và đường thẳng (d) $\begin{cases} 6x - 3y + 2z = 0 \\ 6x + 3y + 2z - 24 = 0 \end{cases}$

1. Chứng minh các đường thẳng AB và OC chéo nhau.
2. Viết phương trình đường thẳng Δ // (d) và cắt các đường AB, OC.

Câu IV:

1. Trong mặt phẳng Oxy cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $4y = x^2$ và $y = x$. Tính thể tích vật thể tròn trong khi quay (H) quanh trục Ox trọn một vòng.
2. Cho x, y, z là các biến số dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \sqrt[3]{4(x^3+y^3)} + \sqrt[3]{4(x^3+z^3)} + \sqrt[3]{4(z^3+x^3)} + 2\left(\frac{x}{y^2} + \frac{y}{z^2} + \frac{z}{x^2}\right)$$

Câu Va *(cho chương trình THPT không phân ban):*

1. Trong mặt phẳng Oxy cho tam giác ABC có trọng tâm G(−2, 0) biết phương trình các cạnh AB, AC theo thứ tự là 4x + y + 14 = 0; $2x + 5y - 2 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh A, B, C.

2. Trên các cạnh AB, BC, CD, DA của hình vuông ABCD lần lượt cho 1, 2, 3 và n điểm phân biệt khác A, B, C, D. Tìm n biết số tam giác có ba đỉnh lấy từ n + 6 điểm đã cho là 439.

Câu Vb *(cho chương trình THPT phân ban):*

1. Giải phương trình $\log_4(x-1)+\dfrac{1}{\log_{2x+1}4}=\dfrac{1}{2}+\log_2\sqrt{x+2}$

2. Cho hình chóp SABC có góc $\left(\widehat{SBC,ABC}\right)=60^\circ$, ABC và SBC là các tam giác đều cạnh a. Tính theo a khoảng cách từ đỉnh B đến mp(SAC).

Bài giải

Câu I:

1. Khảo sát và vẽ đồ thị *(bạn đọc tự làm)*
2. Tìm m:

Ta có: $y=x+m+\dfrac{m}{x-2}\Rightarrow y'=1-\dfrac{m}{(x-2)^2}=\dfrac{(x-2)^2-m}{(x-2)^2}$

Đồ thị h/s có 2 cực trị $\Leftrightarrow$ y' = 0 có 2 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow (x-2)^2-m=0$ có 2 nghiệm phân biệt $\neq 2 \Leftrightarrow m>0$

Gọi A (x_1, y_1) ; B (x_2, y_2) là 2 điểm cực trị

$$y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_1=2-\sqrt{m}\Rightarrow y_1=2+m-2\sqrt{m}\\ x_2=2+\sqrt{m}\Rightarrow y_2=2+m+2\sqrt{m}\end{array}\right.$$

P/trình đường thẳng AB : $\dfrac{x-(2-\sqrt{m})}{2\sqrt{m}}=\dfrac{y-(2+m-2\sqrt{m})}{4\sqrt{m}}$ $(m>0)$

$\Leftrightarrow 2x-y-2+m=0$

AB qua gốc O (0, 0) $\Leftrightarrow -2+m=0\Leftrightarrow m=2$.

Cách khác:

$$y=\frac{x^2+(m-2)x+m}{x-2}=\frac{u}{v};\ y'=1-\frac{m}{(x-2)^2}$$

y' = 0 có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ $m>0$

Khi $m>0$, pt đường thẳng qua 2 cực trị là

$$y = \frac{u'}{v'} = 2x + m - 2$$

Do đó, ycbt $\Leftrightarrow$ $m - 2 = 0$ $\Leftrightarrow m = 2$

Câu II:

1. Giải phương trình: $2\cos^2 x + 2\sqrt{3}\sin x\cos x + 1 = 3(\sin x + \sqrt{3}\cos x)$ (1)

(1) $\Leftrightarrow 2 + \cos 2x + \sqrt{3}\sin 2x = 3(\sin x + \sqrt{3}\cos x)$

$$\Leftrightarrow 2 + 2\left(\frac{1}{2}\cos 2x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x\right) = 6\left(\frac{1}{2}\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right)$$

$$\Leftrightarrow 2 + 2\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = 6\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$$

$$\Leftrightarrow 1 + \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = 3\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$$

$$\Leftrightarrow 2\cos^2\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = 3\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = 0 \vee \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{3}{2} \text{ (loại)}$$

$$\Leftrightarrow x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{2\pi}{3} + k\pi, \quad k \in Z.$$

2. Giải hệ: $\begin{cases} x^4 - x^3y + x^2y^2 = 1 \\ x^3y - x^2 + xy = 1 \end{cases}$ (I)

$$\text{(I)} \Leftrightarrow \begin{cases} (-x^2 + xy)^2 + x^3y = 1 \\ (-x^2 + xy) + x^3y = 1 \end{cases}$$

Đặt $u = -x^2 + xy$, $v = x^3y$

(I) thành $\begin{cases} u^2 + v = 1 \\ u + v = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = -u + 1 \\ u^2 - u = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 0 \\ v = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} u = 1 \\ v = 0 \end{cases}$

Do đó hệ đã cho tương đương:

$$\begin{cases}-x^2+xy=0\\ x^3y=1\end{cases} \vee \begin{cases}-x^2+xy=1\\ x^3y=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=x\\ x^4=1\end{cases} \vee \begin{cases}y=0\\ x^2=-1(vn)\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x=1\\ y=1\end{cases} \vee \begin{cases}x=-1\\ y=-1\end{cases}$$

Câu III:

1. Ta có VTCP của đường thẳng AB là $(-2,4,0)$ hay $\vec{a}=(-1,2,0)$

   Ta có VTCP của đường thẳng OC là $(2,4,6)$ hay $\vec{b}=(1,2,3)$

   Ta có $\overrightarrow{OA}=(2,0,0)$ cùng phương với $\vec{c}=(1,0,0)$

   Ta có $\left[\vec{a},\vec{b}\right].\vec{c}=6\neq 0 \Leftrightarrow$ AB và OC chéo nhau.

2. Đường thẳng d có VTCP $(-12,\ 0,\ 36)$ hay $\vec{u}=(-1,\ 0,\ 3)$

   Ta có $\left[\vec{a},\ \vec{u}\right]=(6,3,2)$

   Phương trình mặt phẳng (α) đi qua A, có PVT $\left[\vec{a},\ \vec{u}\right]$ (α chứa AB)

   $6(x-2)+3(y-0)+2(z-0)=0$

   $\Leftrightarrow 6x+3y+2z-12=0 \quad (\alpha)$

   Ta có $\left[\vec{b},\ \vec{u}\right]=2(3,-3,1)$

   Phương trình mặt phẳng (β) qua O có PVT là $(3,-3,1)$ (β chứa OC)

   $3x-3y+z=0 \quad (\beta)$

   Vậy phương trình đường thẳng Δ song song với d cắt AB, BC là

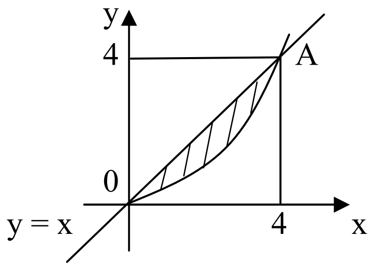
   $$\begin{cases}6x+3y+2z-12=0\\ 3x-3y+z=0\end{cases}$$

Câu IV:

1. Tọa độ giao điểm của hai đường là nghiệm của hệ

   $$\begin{cases}y=\dfrac{x^2}{4}\\ y=x\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=0\\ y=0\end{cases} v \begin{cases}x=4\\ y=4\end{cases}$$

   $$V=\pi\int_0^4\left(x^2-\frac{x^4}{16}\right)dx=\pi\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{80}\right)\Bigg|_0^4=\frac{128}{15}\pi \text{ (đvtt)}$$



2. Với x, y, z > 0 ta có

$4(x^3 + y^3) \geq (x + y)^3$ (*) Dấu = xảy ra $\Leftrightarrow x = y$

Thật vậy (*) $\Leftrightarrow 4(x + y)(x^2 - xy + y^2) \geq (x + y)^3$

$\Leftrightarrow 4(x^2 - xy + y^2) \geq (x + y)^2$ do x, y > 0

$\Leftrightarrow 3(x^2 + y^2 - 2xy) \geq 0 \Leftrightarrow (x - y)^2 \geq 0$ (đúng)

Tương tự ta có $4(y^3 + z^3) \geq (y + z)^3$ Dấu = xảy ra $\Leftrightarrow y = z$

$4(z^3 + x^3) \geq (z + x)^3$ Dấu = xảy ra $\Leftrightarrow z = x$

Do đó $\sqrt[3]{4\left(x^3+y^3\right)} + \sqrt[3]{4\left(y^3+z^3\right)} + \sqrt[3]{4\left(z^3+x^3\right)} \geq 2\left(x+y+z\right) \geq 6\sqrt[3]{xyz}$

Ta lại có $2\left(\frac{x}{y^2} + \frac{y}{z^2} + \frac{z}{x^2}\right) \geq \frac{6}{\sqrt[3]{xyz}}$ Dấu = xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z$

Vậy $P \geq 6\left(\sqrt[3]{xyz} + \frac{1}{\sqrt[3]{xyz}}\right) \geq 12$ Dấu = xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} xyz = 1 \\ x = y = z \end{cases}$

$\Leftrightarrow x = y = z = 1$

Vậy minP = 12. Đạt được khi $x = y = z = 1$

Câu Va:

1. Tọa độ A là nghiệm của hệ $\begin{cases} 4x + y + 14 = 0 \\ 2x + 5y - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow A(-4, 2)$

Vì G(–2, 0) là trọng tâm của ΔABC nên

$$\begin{cases} 3x_G = x_A + x_B + x_C \\ 3y_G = y_A + y_B + y_C \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_B + x_C = -2 \\ y_B + y_C = -2 \end{cases} \quad (1)$$

Vì $B(x_B, y_B) \in AB \Leftrightarrow y_B = -4x_B - 14$ (2)

$$C(x_C, y_C) \in AC \Leftrightarrow y_C = -\frac{2x_C}{5} + \frac{2}{5} \quad (3)$$

Thế (2) và (3) vào (1) ta có

$$\begin{cases} x_B + x_C = -2 \\ -4x_B - 14 - \dfrac{2x_C}{5} + \dfrac{2}{5} = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_B = -3 \Rightarrow y_B = -2 \\ x_C = 1 \quad \Rightarrow y_C = 0 \end{cases}$$

Vậy A(–4, 2), B(–3, –2), C(1, 0)

2. Nếu $n \le 2$ thì $n + 6 \le 8$. Do đó số tam giác có ba đỉnh được lấy từ n + 6 điểm đó không vượt qua $C_8^3 = 56 < 439$ (loại). Vậy $n \ge 3$

Vì mỗi tam giác được tạo thành ứng với 1 tổ hợp 3 chập n + 6 phần tử. Nhưng trên cạnh CD có 3 đỉnh, trên cạnh DA có n đỉnh nên số tam giác tạo thành là:

$$C_{n+6}^3 - C_3^3 - C_n^3 = \frac{(n+4)(n+5)(n+6)}{6} - 1 - \frac{(n-2)(n-1)n}{6} = 439$$

$\Leftrightarrow (n + 4)(n + 5)(n + 6) – (n – 2)(n – 1)n = 2540$

$\Leftrightarrow n^2 + 4n – 140 = 0$

$\Leftrightarrow n = -2 - \sqrt{144}$ (loại vì $n \ge 3$) v $n = -2 + \sqrt{144} = 10$

Đáp số: n = 10

Câu Vb:

1. Giải phương trình: $\log_4(x-1) + \dfrac{1}{\log_{2x+1} 4} = \dfrac{1}{2} + \log_2 \sqrt{x+2} \quad (1)$

Điều kiện $x > 1$

(1) $\Leftrightarrow \log_4(x-1) + \log_4(2x+1) - \log_4(x+2) = \dfrac{1}{2}$

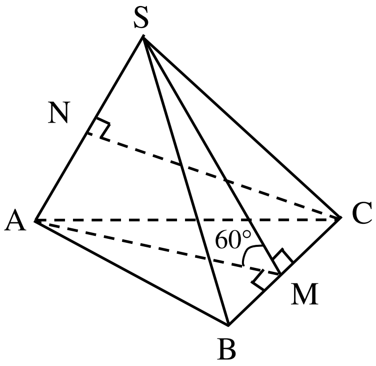
$\Leftrightarrow \log_4\left[\dfrac{(x-1)(2x+1)}{x+2}\right] = \dfrac{1}{2}$ và $x > 1$

$\Leftrightarrow \dfrac{2x^2 - x - 1}{x+2} = 2$ và $x > 1$

$\Leftrightarrow 2x^2 – 3x – 5 = 0$ và $x > 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{5}{2}$

2. Gọi M là trung điểm của BC. thì $SM \perp BC$,

$AM \perp BC \Rightarrow \widehat{SMA} = (SBC,\ ABC) = 60^\circ$



Suy ra ΔSMA đều có cạnh bằng $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

Do đó $S_{SMA} = \dfrac{1}{2}.SM.AM.\sin 60^\circ$

$$= \frac{1}{2}.\frac{3a^2}{4}.\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{16}$$

Ta có $V_{SABC} = 2V_{SBAM} = 2.\dfrac{1}{3}.BM.S_{SAM} = \dfrac{1}{3}.a.\dfrac{3a^2\sqrt{3}}{16} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{16}$

Gọi N là trung điểm của đoạn SA. Ta có $CN \perp SA$

$\Rightarrow CN = \dfrac{a\sqrt{13}}{4}$ (vì ΔSCN vuông tại N)

$$\Rightarrow S_{SCA} = \frac{1}{2}.AS.CN = \frac{1}{2}.\frac{a\sqrt{3}}{2}.\frac{a\sqrt{13}}{4} = \frac{a^2\sqrt{39}}{16}$$

Ta có $V_{SABC} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{16} = \dfrac{1}{3}.S_{SCA}.d(B,\ SAC) = \dfrac{1}{3}.\dfrac{a^2\sqrt{39}}{16}.d(B,\ SAC)$

$$\Rightarrow d(B, SAC) = a^3\sqrt{3}\frac{3}{a^2\sqrt{39}} = \frac{3a}{\sqrt{13}}$$

----------@---------