Bám sát cấu trúc Bộ Giáo Dục và Đào tạo **ĐỀ THI TUYỂN SINH ĐẠI HỌC, CAO ĐẲNG NĂM 2009**

ĐỀ THAM KHẢO Môn thi : **TOÁN, khối B,D.** Ngày thi : ***02.03.2009***

Thi thử miễn phí thứ 2;5;CN (sau 12h30) hàng tuần

ĐỀ 03

I. PHẦN CHUNG CHO TẤT CẢ CÁC THÍ SINH (7,0 điểm)

Câu I : (2 điểm) Cho hàm số : $y = \frac{2x+3}{x-2}$ (C)

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

2. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đường thẳng $2x - y + m = 0$ cắt (C) tại 2 điểm phân biệt mà 2 tiếp tuyến của (C) tại đó song song với nhau.

Câu II: (2 điểm)

1. Giải phương trình : $(2x+1)\left(2+\sqrt{4x^2+4x+4}\right) + 3x\left(2+\sqrt{9x^2+3}\right) = 0$

2. Giải phương trình : $\sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin 2x.\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

Câu III: (1 điểm) Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\left(\sin x + \sqrt{3}\cos x\right)^3}dx$

Câu IV: (1 điểm) Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh bên bằng a ,góc ở đáy của mặt bên là α . Chứng minh : $V = \frac{2}{3}a^3\cos^2\alpha\sqrt{\sin\left(\alpha + 30^0\right)\sin\left(\alpha - 30^0\right)}$.

Câu V: (1 điểm) Chứng minh rằng phương trình $\ln(x+1) - \ln(x+2) + \frac{1}{x+2} = 0$ không có nghiệm thực.

II. PHẦN RIÊNG (3,0 điểm)

Thí sinh chỉ được làm một trong hai phần (phần 1 hoặc 2).

1. Theo chương trình Chuẩn :

Câu VI.a (2 điểm)

Trong không gian cho hai tứ diện $ABCD, A'B'C'D'$, trong đó $A(5;3;1), B(4;-1;3), C(-6;2;4), D(2;1;7)$ $A'(6;3;-1), B'(0;2;-5), C'(3;4;1)$.

1. Tìm tọa độ điểm D' sao cho hai tứ diện $ABCD, A'B'C'D'$ có cùng trọng tâm.

2. Tìm quỹ tích những điểm M sao cho $\left|3\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}\right| = \left|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}\right|$.

Câu VII.a (1 điểm) Cho x, y là hai số không âm và thỏa mãn $x + y = 1$ .Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức : $A = 3^{2x} + 3^y$

2. Theo chương trình Nâng cao :

Câu VI.b (2 điểm)

Trong không gian với hệ trục tọa độ vuông góc $Oxyz$ cho $A(2;5;3)$ và đường thẳng $(d): \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{2}$

1. Viết phương trình mặt phẳng (Q) chứa (d) sao cho khoảng cách từ A đến (Q) lớn nhất.

2. Viết phương trình mặt cầu (C) có tâm nằm trên đường thẳng (d) đồng thời tiếp xúc với hai mặt phẳng $(\alpha): 3x + 4y + 3 = 0, (\beta): 2x + 2y - z + 39 = 0$.

Câu VII.b (1 điểm) Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số : $f(x) = 2^{x+\sqrt{4-x^2}}$

GV ra đề : Nguyễn Phú Khánh Đà Lạt .

I. PHẦN CHUNG CHO TẤT CẢ CÁC THÍ SINH (7,0 điểm)

Câu I : (2 điểm) Cho hàm số : $y = \dfrac{2x+3}{x-2}$ (C)

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số. Học sinh tự làm .

2. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đường thẳng $2x - y + m = 0$ cắt (C) tại 2 điểm phân biệt mà 2 tiếp tuyến của (C) tại đó song song với nhau.

Giả sử (d) cắt (C) tại $A(x_1;y_1), B(x_2;y_2)$, tiếp tuyến tại A, B lần lượt có hệ số góc là : $y'(x_1) = \dfrac{-7}{(x_1-2)^2}$,

$y'(x_2) = \dfrac{-7}{(x_2-2)^2}$.

Đường thẳng $(d): y = 2x + m$ cắt (C) tại 2 điểm phân biệt mà 2 tiếp tuyến của (C) tại đó song song với nhau khi và chỉ khi phương trình : $\dfrac{2x+3}{x-2} = 2x + m$ $\quad (1)$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $y'(x_1) = y'(x_2)$

Hay phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 khác 2 thỏa mãn $\dfrac{-7}{(x_1-2)^2} = \dfrac{-7}{(x_2-2)^2} \Leftrightarrow x_1 + x_2 = 4$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = (m-6)^2 + 8(2m+3) > 0 \\ 2.2^2 + (m+6).2 - 2m - 3 \neq 0 \Leftrightarrow m = -2 \\ \dfrac{6-m}{2} = 4 \end{cases}$$

Câu II: (2 điểm)

1. Giải phương trình : $(2x+1)\left(2+\sqrt{4x^2+4x+4}\right) + 3x\left(2+\sqrt{9x^2+3}\right) = 0 \qquad (1)$

$(1) \Leftrightarrow (2x+1)\left(2+\sqrt{(2x+1)^2+3}\right) = (-3x)\left(2+\sqrt{(-3x)^2+3}\right) \Leftrightarrow f(2x+1) = f(-3x) \qquad (2)$

Xét hàm số $f(t) = t\left(2+\sqrt{t^2+3}\right)$ liên tục trên R

Ta có : $f'(t) = 2 + \sqrt{t^2+3} + t.\dfrac{t}{\sqrt{t^2+3}} > 0, \forall t \in R \Rightarrow f(t)$ liên tục và đồng biến trên R

Khi đó $(2) \Leftrightarrow 2x + 1 = -3x \Leftrightarrow x = -\dfrac{1}{5}$.

2. Giải phương trình : $\sin\left(3x - \dfrac{\pi}{4}\right) = \sin 2x.\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$

Đặt : $t = x + \dfrac{\pi}{4} \Rightarrow \begin{cases} 3x - \dfrac{\pi}{4} = 3t - \pi \Rightarrow \sin\left(3x - \dfrac{\pi}{4}\right) = \sin(3t - \pi) = -\sin 3t \\ 2x = 2t - \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow \sin 2x = \sin\left(2t - \dfrac{\pi}{2}\right) = -\sin 2t \end{cases}$

Phương trình cho viết lại : $\sin 3t = \sin 2t.\sin t \Leftrightarrow 3\sin t - 4\sin^3 t = 2\cos t.\sin^2 t$. Bài toán đến đây khá dễ dàng . Lưu ý trước khi giải bài toán này , ta cần chứng minh $\sin 3t = 3\sin t - 4\sin^3 t$.

Cách khác : Ta có thể dùng trực tiếp khai triển công thức $\sin\left(a \pm b\right) = \sin a.\sin b \pm \cos a.\cos b$

Câu III: (1 điểm) Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\left(\sin x + \sqrt{3}\cos x\right)^3} dx$

Cách 1 :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\left(\sin x + \sqrt{3}\cos x\right)^3} dx = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\left(\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)\right)^3} d\left[\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)\right]$$

Cách 2:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\left(\sin x + \sqrt{3}\cos x\right)^3} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\left[\frac{\pi}{6} - \left(\frac{\pi}{6} - x\right)\right]}{\left(\sin x + \sqrt{3}\cos x\right)^3} dx$$

Cách 3:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\left(\sin x + \sqrt{3}\cos x\right)^3} dx \quad , \quad J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\left(\sin x + \sqrt{3}\cos x\right)^3} dx$$

$$\begin{cases} I + \sqrt{3}J = \frac{1}{4}\tan\left(x - \frac{\pi}{6}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} \\ -\sqrt{3}J + I = -\frac{1}{2\left(\sin x + \sqrt{3}\cos x\right)^2}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} \end{cases} \Rightarrow I = ?$$

Cách 4 :

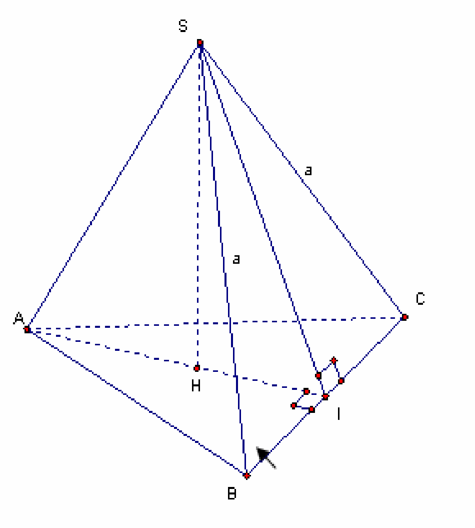
$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\left(\sin x + \sqrt{3}\cos x\right)^3} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\cos^3 x\left(\tan x + \sqrt{3}\right)^3} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\tan x}{\left(\tan x + \sqrt{3}\right)^3}.\frac{1}{\cos^2 x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\tan x}{\left(\tan x + \sqrt{3}\right)^3} d(\tan x)$$

Cách 5: Đặt : $t = \tan\frac{x}{2}$

Cách 6 : Đặt : $t = x - \frac{\pi}{6}$

Câu IV: (1 điểm) Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh bên bằng a ,góc ở đáy của mặt bên là α .

Chứng minh : $V = \frac{2}{3}a^3\cos^2\alpha\sqrt{\sin\left(\alpha + 30^0\right)\sin\left(\alpha - 30^0\right)}$.



Gọi SH, SI lần lượt là đường cao, trong đoạn của hình chóp .

Theo giả thiết , ta có $\widehat{SBC} = \alpha; SB = a$.

$$V = \frac{1}{3}S_{ABC}.SH = \frac{1}{3}\frac{BC^2\sqrt{3}}{4}SH = \frac{\sqrt{3}}{12}BC^2.SH$$

ΔSBI vuông, $BI = SB.\cos\alpha = a.\cos\alpha \rightarrow BC = 2BI = 2.a.\cos\alpha$

ΔSBH vuông, $BH = \frac{2}{3}.\frac{BC\sqrt{3}}{2} = \frac{2a\sqrt{3}}{3}\cos\alpha$

$$SH^2 = SB^2 - BH^2 = \frac{a^2}{3}\left(3 - 4\cos^2\alpha\right) \rightarrow SH = a\sqrt{\frac{3 - 4\cos^2\alpha}{3}}$$

$$V = \frac{1}{3}a^3\cos^2\alpha\sqrt{3 - 4\cos^2\alpha}$$

$$3 - 4\cos^2\alpha = 3 - 4\frac{1 + \cos 2\alpha}{2} = 2\left(\frac{1}{2} - \cos 2\alpha\right) = 2\left(\cos 60^0 - \cos 2\alpha\right)$$

$$V = \frac{2}{3}a^3\cos^2\alpha\sqrt{\sin\left(\alpha + 30^0\right)\sin\left(\alpha - 30^0\right)}$$

Câu V: (1 điểm) Chứng minh rằng phương trình $\ln(x+1) - \ln(x+2) + \frac{1}{x+2} = 0$ không có nghiệm thực.

Xét hàm số : $f(x) = \ln(x+1) - \ln(x+2) + \frac{1}{x+2}$, xác định và liên tục trên khoảng $(-1;+\infty)$.

Ta có $f'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} - \frac{1}{(x+2)^2} = \frac{1}{(x+1)(x+2)} - \frac{1}{(x+2)^2} > 0, \forall x > -1 \Rightarrow f(x)$ liên tục và đồng biến trên khoảng $(-1;+\infty)$ và $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = -\infty$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$, suy ra $f(x) < 0, \forall x > -1$. Vậy phương trình cho không có nghiệm thực.

II. PHẦN RIÊNG (3,0 điểm)

Thí sinh chỉ được làm một trong hai phần (phần 1 hoặc 2).

1. Theo chương trình Chuẩn :

Câu VI.a (2 điểm)

Trong không gian cho hai tứ diện $ABCD, A'B'C'D'$, trong đó $A(5;3;1), B(4;-1;3), C(-6;2;4), D(2;1;7)$ $A'(6;3;-1), B'(0;2;-5), C'(3;4;1)$.

1. Tìm tọa độ điểm D' sao cho hai tứ diện $ABCD, A'B'C'D'$ có cùng trọng tâm.

Giả sử $D'(x';y';z')$ là tọa độ cần tìm và G, G' lần lượt là trọng tâm của tứ diện $ABCD, A'B'C'D'$

G là trọng tâm của tứ diện $ABCD$ nên có tọa độ $G\left(\frac{5}{4};\frac{5}{4};\frac{15}{4}\right)$. Theo bài toán hai tứ diện $ABCD, A'B'C'D'$ có cùng trọng tâm, nên $G'\left(\frac{5}{4};\frac{5}{4};\frac{15}{4}\right)$

G' là trọng tâm của tứ diện $A'B'C'D'$, nên ta luôn có :

$$\begin{cases} x_{G'} = \dfrac{x_{A'} + x_{B'} + x_{C'} + x_{D'}}{4} \\ y_{G'} = \dfrac{y_{A'} + y_{B'} + y_{C'} + y_{D'}}{4} \\ z_{G'} = \dfrac{z_{A'} + z_{B'} + z_{C'} + z_{D'}}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{D'} = -4 \\ y_{D'} = -4 \\ z_{D'} = 20 \end{cases} \Rightarrow D'(-4'-4;20)$$

2. Tìm quỹ tích những điểm M sao cho $\left|3\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\right|=\left|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right|$.

Giả sử tồn tại điểm $I\left(x_0;y_0;z_0\right)$ thỏa mãn hệ thức $3\overrightarrow{IA}-2\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{ID}=\vec{0}$.

Ta có : $\begin{cases}\overrightarrow{IA}=\left(x_0-2;y_0-4;z_0+1\right)\\ \overrightarrow{IB}=\left(x_0-1;y_0-4;z_0+1\right)\\ \overrightarrow{IC}=\left(x_0-2;y_0-4;z_0-3\right)\\ \overrightarrow{ID}=\left(x_0-2;y_0-2;z_0+1\right)\end{cases}\Rightarrow 3\overrightarrow{IA}-2\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{ID}=\left(3x_0-8;3y_0-10;3z_0-1\right)$

Tọa độ điểm $I\left(x_0;y_0;z_0\right)$ thỏa mãn hệ thức $3\overrightarrow{IA}-2\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{ID}=\vec{0}\Leftrightarrow\begin{cases}3x_0-8=0\\3y_0-10=0\\3z_0-1=0\end{cases}\Leftrightarrow I\left(\frac{8}{3};\frac{10}{3};\frac{1}{3}\right)$.

$3\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=3\overrightarrow{MI}+\left(3\overrightarrow{IA}-2\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{ID}\right)=3\overrightarrow{MI},\forall I.\quad \overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{AB}$.

$\left|3\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\right|=\left|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right|\Leftrightarrow\left|3\overrightarrow{MI}\right|=\left|\overrightarrow{AB}\right|\Leftrightarrow MI=\frac{1}{3}AB$.

Vậy quỹ tích điểm M là mặt cầu tâm $I\left(\frac{8}{3};\frac{10}{3};\frac{1}{3}\right)$, bán kính $R=\frac{1}{3}AB=\frac{1}{3}$ và có phương trình mặt cầu :

$\left(x-\frac{8}{3}\right)^2+\left(y-\frac{10}{3}\right)^2+\left(z-\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{9}$.

Câu VII.a (1 điểm) Cho x,y là hai số không âm và thỏa mãn $x+y=1$.Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức : $A=3^{2x}+3^y$

2. Theo chương trình Nâng cao :

Câu VI.b (2 điểm)

Trong không gian với hệ trục tọa độ vuông góc $Oxyz$ cho $A(2;5;3)$ và đường thẳng $(d):\frac{x-1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z-2}{2}$

1. Viết phương trình mặt phẳng (Q) chứa (d) sao cho khoảng cách từ A đến (Q) lớn nhất.

Giả sử mặt phẳng (Q) có phương trình dạng : $ax+by+cz+d=0,a^2+b^2+c^2>0$.

(d) có vectơ chỉ phương là $\vec{u}=(2;1;2)$ và qua điểm $N(1;0;2)$,(Q) có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=(a;b;c)\neq\vec{0}$.

Mặt phẳng (Q) chứa (d) khi $\begin{cases}\vec{n}\perp\vec{u}\\N\in(Q)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2a+b+2c=0\\a+2c+d=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}d=a+b\\c=-\frac{2a+b}{2}\end{cases}\quad(1)$.

Khoảng cách từ A đến (Q): $d_{(A/(Q))}=\frac{\left|2a+5b+3c+d\right|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\frac{\left|2a+5b+3\left(-\frac{2a+b}{2}\right)+(a+b)\right|}{\sqrt{a^2+b^2+\left(-\frac{2a+b}{2}\right)^2}}$ do (1)

Thu gọn rồi chia hai trường hợp :

- $b=0$, trường hợp này không thỏa đề bài .
- $b\neq0$, chia cả tử và mẫu cho b.

Khoảng cách từ A đến (Q) lớn nhất khi $a=1,b=-4\Rightarrow c=1,d=-3$.

Mặt phẳng $(Q):x-4y+z-3=0$.

Cách khác (hay)

Gọi M là hình chiếu vuông góc của A lên đường thẳng (d), khi đó $\begin{cases} M \in (d) \\ \overrightarrow{AM} \perp \vec{u} \end{cases} \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow M(3;1;4)$.

Giả sử (P) là mặt phẳng tùy ý chứa (d), khi đó $M \in (P)$.Kẻ $AH \perp (P)$, khi đó $AH \leq AM$.

Mặt phẳng (Q)chứa (d) sao cho khoảng cách từ A đến (Q) lớn nhất chính là mặt phẳng chứa (d) đồng thời vuông góc với AM.

Vậy $(Q): \begin{cases} qua\ \ M(3;1;4) \\ vtpt\ \ \vec{n} \,/\,/ \overrightarrow{AM} = (1;-4;1) \end{cases} \Leftrightarrow (Q): x - 4y + z - 3 = 0$.

2. Viết phương trình mặt cầu (C) có tâm nằm trên đường thẳng (d) đồng thời tiếp xúc với hai mặt phẳng $(\alpha): 3x + 4y + 3 = 0, (\beta): 2x + 2y - z + 39 = 0$.

Câu VII.b (1 điểm) Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số : $f(x) = 2^{x+\sqrt{4-x^2}}$

GV ra đề : Nguyễn Phú Khánh –Đà Lạt .