

BÀI 8 : SỰ TIẾP XÚC CỦA HAI ĐƯỜNG CONG

Bài toán 1 :

Hai đường cong $(C) : y = f(x)$ và $(C') : y = g(x)$ tiếp xúc nhau khi và chỉ khi

hệ phương trình sau: $\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f'(x) = g'(x) \end{cases}$ có nghiệm.

Ví dụ 1 : Tìm tham số thực m để đường thẳng $(d) : y = m(x - 3)$ tiếp xúc với đồ thị $(C) : y = -\frac{1}{3}x^3 + 3x$.

Giải :

(d) tiếp xúc với (C) khi hệ sau : $\begin{cases} -\frac{1}{3}x^3 + 3x = m(x - 3) \\ -x^2 + 3 = m \end{cases} (*)$ có nghiệm.

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^3 - 9x^2 + 27 = 0 \\ m = -x^2 + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ 2x^2 - 3x - 9 = 0 \\ m = -x^2 + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \Rightarrow m = -6 \\ x = -\frac{3}{2} \Rightarrow m = \frac{3}{4} \end{cases}$$

Ví dụ 2 : Tìm trên trục hoành những điểm mà từ đó có thể kẻ đến đồ thị của hàm số : $y = \frac{x^2}{x-1}$ hai tiếp tuyến tạo với nhau 1 góc 45° .

Giai :

Gọi $M \in Ox \Rightarrow M(x_0; 0)$, đường thẳng đi qua M có hệ số góc là k , phương trình có dạng : $(d) : y = k(x - x_0)$.

(d) là tiếp tuyến của đồ thị khi hệ sau có nghiệm : $\begin{cases} \frac{x^2}{x-1} = k(x - x_0) \\ \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} = k \end{cases}$

$$\frac{x^2}{x-1} = \frac{x^2-2x}{(x-1)^2} (x-x_0) \Leftrightarrow x[(x_0+1)x-2x_0] = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{2x_0}{x_0+1}, x_0 \neq -1 \end{cases}$$

$$\bullet \quad x = 0 \Rightarrow k = \frac{x^2-2x}{(x-1)^2} = 0.$$

$$\bullet \quad x = \frac{2x_0}{x_0+1} \Rightarrow k = \frac{-4x_0}{(x_0+1)^2}$$

• Tiếp tuyến qua M tạo với đồ thị của hàm số : $y = \frac{x^2}{x-1}$ hai tiếp tuyến tạo

với nhau 1 góc 45^0 khi và chỉ khi

$$\tan 45^0 = \left| \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2} \right| \Rightarrow \frac{4x_0}{(x_0+1)^2} = 1 \Rightarrow x_0 = 3 \pm 2\sqrt{2}.$$

Vậy $M(3-2\sqrt{2};0), (3+2\sqrt{2};0)$

Ví dụ 3 :Tìm tất cả các điểm trên trục hoành những điểm M mà qua đó vẽ được đúng 3 tiếp tuyến đến đồ thị $(C) : y = x^3 + 3x^2$ mà trong đó có 2 tiếp tuyến vuông góc với nhau .

Giải :

Gọi $M(a;0) \in Ox$, đường thẳng (t) đi qua M và có hệ số góc

$$k \Rightarrow (t) : y = k(x-a).$$

$$(t) \text{ tiếp xúc với } (C) \text{ khi hệ sau có nghiệm : } \begin{cases} x^3 + 3x^2 = k(x-a) & (1) \\ 3x^2 + 6x = k & (2) \end{cases}$$

$$\text{Từ (1),(2) suy ra : } x^3 + 3x^2 = 3x^2 + 6x(x-a) \Leftrightarrow 2x^3 + 3(a-1)x^2 - 6ax = 0$$

$$\Leftrightarrow x[2x^2 - 3(a-1)x - 6a] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 2x^2 - 3(a-1)x - 6a = 0 \end{cases} \quad (3)$$

- $x = 0 \Rightarrow k = 0 \Rightarrow 1$ tiếp tuyến.

Qua M kẻ được 3 tiếp tuyến đến đồ thị (C) mà trong đó có 2 tiếp tuyến vuông góc với nhau.

Khi đó (3) có 2 nghiệm phân biệt $x_1, x_2 \neq 0$ và $k_1 k_2 = -1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \\ \left(3x_1^2 + 6x_1\right)\left(3x_2^2 + 6x_2\right) = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ 9(a-1)^2 + 48a > 0 \\ 9(x_1 x_2)^2 + 18x_1 x_2 (x_1 + x_2) + 36x_1 x_2 = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a < -3 \vee a > -\frac{1}{3} \text{ và } a \neq 0 \\ 81a^2 - 81a(a-1) - 108a + 1 = 0 \\ \left(\begin{array}{l} \text{vì } x_1 x_2 = -3a \text{ ; } x_1 + x_2 = \frac{3(a-1)}{2} \end{array} \right) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a < -3 \vee a > -\frac{1}{3} \text{ và } a \neq 0 \\ -27a + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = \frac{1}{27}$$

Vậy $M\left(\frac{1}{27}, 0\right) \in Ox$ thỏa bài toán.

Bài toán 2 :

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị $(C) : y = f(x)$ tại điểm $M(x_0; f(x_0))$ có

dạng : $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

Ví dụ 1 : Tìm tọa độ tiếp điểm của đồ thị $(C) : y = \frac{x-4}{x-1}$ với tiếp tuyến (t) , biết rằng tiếp tuyến (t) tạo với đường thẳng $(d) : y = -2x + 2010$ góc 45° .

Giải :

- $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

- Ta có : $y' = \frac{3}{(x-1)^2}, x \neq 1$
- Gọi $M(x_0; f(x_0))$ là tọa độ tiếp điểm cần tìm thì hệ số góc tiếp tuyến (t) là $k = \frac{3}{(x_0-1)^2}, x_0 \neq 1$.
- Vì (t) và (d) tạo nhau 1 góc 45° khi $\tan 45^\circ = \left| \frac{k+2}{1-2k} \right| \Leftrightarrow \begin{cases} k = -\frac{1}{3} \\ k = 3 \end{cases}$
- * $k = -\frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{3}{(x_0-1)^2} = -\frac{1}{3}$ điều này không xảy ra.
- * $k = 3 \Leftrightarrow \frac{3}{(x_0-1)^2} = 3 \Leftrightarrow x_0^2 - 2x_0 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \Rightarrow y_0 = 4 \Rightarrow M(0; 4) \\ x_0 = 2 \Rightarrow y_0 = -2 \Rightarrow M(2; -2) \end{cases}$

Ví dụ 2 : Cho hàm số $y = \frac{2x+3}{x-2}$, có đồ thị (C) . Tìm tất cả các tham số m để đường thẳng $(t): y = 2x + m$ cắt (C) tại hai điểm phân biệt mà hai tiếp tuyến tại đó song song với nhau.

Giải :

Đường thẳng $(t): y = 2x + m$ cắt (C) tại hai điểm phân biệt mà hai tiếp tuyến tại đó song song với nhau khi và chỉ khi phương trình $\frac{2x+3}{x-2} = 2x + m$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn điều kiện $y'(x_1) = y'(x_2)$. Khi đó phương trình $g(x) = 2x^2 + (m-6)x - 2m-3 = 0$ có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 khác 2 và thỏa mãn điều kiện $-\frac{7}{(x_1-2)^2} = -\frac{7}{(x_2-2)^2} \Leftrightarrow x_1 + x_2 = 4$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = (m-6)^2 + 8(2m+3) > 0 \\ g(2) = 2.2^2 + (m-6).2 - 2m - 3 \neq 0 \Leftrightarrow m = 2. \\ -\frac{m-6}{2} = 4 \end{cases}$$

Ví dụ 3: Cho hàm số $y = \frac{2x}{x+1}$ có đồ thị là (C) . Tìm trên đồ thị (C) những điểm M , sao cho tiếp tuyến tại M cắt hai trục tọa độ Ox, Oy tại hai điểm phân biệt A, B sao cho diện tích tam giác AOB có diện tích bằng $\frac{1}{4}$.

Giải :

$$\text{Gọi } M(x_0; y_0) \in (C) \Rightarrow y_0 = \frac{2x_0}{x_0+1} \Rightarrow y'_0 = \frac{2}{(x_0+1)^2}$$

$$\text{Phương trình tiếp tuyến } (t) \text{ của } (C) \text{ tại } M \text{ là : } y_0 = \frac{2}{(x_0+1)^2}x + \frac{2x_0^2}{(x_0+1)^2}.$$

Tiếp tuyến (t) cắt hai trục tọa độ Ox, Oy tại hai điểm phân biệt $A(-x_0^2; 0)$,

$$B\left(0; \frac{2x_0^2}{(x_0+1)^2}\right) \text{ sao cho diện tích tam giác } AOB \text{ có diện tích bằng } \frac{1}{4} \text{ khi đó}$$

$$\frac{1}{2} \cdot OA \cdot OB = \frac{1}{4} \Leftrightarrow OA \cdot OB = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x_0^2 \cdot \frac{2x_0^2}{(x_0+1)^2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 4x_0^2 - (x_0+1)^2 = 0$$

$$\begin{cases} 2x_0^2 + x_0 + 1 = 0 \\ 2x_0^2 - x_0 - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -\frac{1}{2} \Rightarrow M\left(-\frac{1}{2}; -2\right) \\ x_0 = 1 \Rightarrow M(1; 1) \end{cases}$$

Vậy có hai điểm thỏa mãn yêu cầu bài toán $M\left(-\frac{1}{2}; -2\right), M(1; 1)$.

Ví dụ 4 : Chứng minh rằng nếu các tiếp tuyến $(d), (t)$ của đồ thị (C) :

$y = x^3 - 6x^2 + 9x$ song song với nhau thì hai tiếp điểm A, B đối xứng nhau

qua $M(2;2)$.

Giải :

Gọi $A(x_1, y(x_1) = x_1^3 - 6x_1^2 + 9x_1)$, $B(x_2, y(x_2) = x_2^3 - 6x_2^2 + 9x_2)$ là tọa độ tiếp điểm của $(d), (t)$ và đồ thị (C) . (d) và (t) song song với nhau khi

$$y'(x_1) = y'(x_2) \Leftrightarrow 3x_1^2 - 12x_1 + 9 = 3x_2^2 - 12x_2 + 9 \Leftrightarrow x_1 + x_2 = 4.$$

$$\text{Với } x_1 + x_2 = 4 \text{ thì tồn tại } t > 0 : \begin{cases} x_1 = 2 - t \Rightarrow y(x_1) = t^3 - 3t + 2 \\ x_2 = 2 + t \Rightarrow y(x_2) = -t^3 + 3t + 2 \end{cases}$$

$$\text{Để thấy trung điểm đoạn } AB \text{ có tọa độ } \begin{cases} x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2} = 2 \\ y_0 = \frac{y(x_1) + y(x_2)}{2} = 2 \end{cases}.$$

Do đó hai tiếp điểm A, B đối xứng nhau qua $M(2;2)$.

Ví dụ 5 : Cho hàm số $y = \frac{2x^2}{x-1}$. Tìm $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ sao cho điểm

$M(1 + \sin \alpha; 9)$ nằm trên đồ thị (C) . Chứng minh rằng, tiếp tuyến của (C) tại điểm M cắt hai tiệm cận của (C) tại hai điểm A, B đối xứng nhau qua điểm M .

Giải :

Vì $M(1 + \sin \alpha; 9)$ nằm trên đồ thị (C) nên:

$$\frac{2(1 + \sin \alpha)^2}{1 + \sin \alpha - 1} = 9 \Leftrightarrow 2 \sin^2 \alpha - 5 \sin \alpha + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin \alpha = \frac{1}{2} \\ \sin \alpha = 2 \end{cases}$$

$$\text{Vì } \alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \text{ nên } \sin \alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{6} \Rightarrow M\left(\frac{3}{2}; 9\right)$$

$$\text{Tiếp tuyến của đồ thị } (C) \text{ tại điểm } M \text{ là: } y = y'\left(\frac{3}{2}\right)\left(x - \frac{3}{2}\right) + 9$$

$$\text{hay } (d) : y = -6x + 18.$$

Tiếp tuyến (d) cắt tiệm cận đứng $x = 1$ tại: $A(1;12)$

Tiếp tuyến (d) cắt tiệm cận xiên tại điểm B có tọa độ là nghiệm

$$(x; y) \text{ hệ phương trình: } \begin{cases} y = -6x + 18 \\ y = 2x + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 6 \end{cases} \Rightarrow B(2; 6)$$

$$\text{Dễ thấy: } \begin{cases} \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{3}{2} = x_M \\ \frac{y_A + y_B}{2} = 9 = y_M \end{cases}$$

Suy ra, A, B đối xứng nhau qua điểm M (*đpcm*).

Ví dụ 6: Gọi (d) là tiếp tuyến của đồ thị $(C) : y = \frac{2x-3}{x-2}$ tại M cắt các đường tiệm cận tại hai điểm phân biệt A, B . Tìm tọa độ điểm M sao cho đường tròn ngoại tiếp tam giác IAB có diện tích nhỏ nhất, với I là giao điểm hai tiệm cận.

Giải :

$$\text{Gọi } M(x_0; y_0) \in (C) \Rightarrow y_0 = \frac{2x_0-3}{x_0-2}, y'_0 = -\frac{1}{(x_0-2)^2}$$

$$\text{Phương trình tiếp tuyến } (d) \text{ của } (C) \text{ tại } M : y = \frac{-1}{(x_0-2)^2}(x-x_0) + \frac{2x_0-3}{x_0-2}$$

$$(d) \text{ cắt hai đường tiệm cận tại hai điểm phân biệt } A\left(2; \frac{2x_0-2}{x_0-2}\right), B(2x_0-2; 2).$$

Dễ thấy M là trung điểm AB và $I(2; 2)$ là giao điểm hai đường tiệm cận.

Tam giác IAB vuông tại I nên đường tròn ngoại tiếp tam giác IAB có diện tích

$$S = \pi IM^2 = \pi \left[(x_0-2)^2 + \left(\frac{2x_0-3}{x_0-2} - 2 \right)^2 \right] = \pi \left[(x_0-2)^2 + \frac{1}{(x_0-2)^2} \right] \geq 2\pi$$

$$\text{Dấu đẳng thức xảy ra khi } (x_0-2)^2 = \frac{1}{(x_0-2)^2} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 1 \Rightarrow y_0 = 1 \\ x_0 = 3 \Rightarrow y_0 = 3 \end{cases}$$

Vậy $M(1; 1)$ $M(3; 3)$ thỏa mãn bài toán.

Bài toán 3 :

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị $(C): y = f(x)$ đi qua điểm $M(x_1; y_1)$

Cách 1 :

- Phương trình đường thẳng (d) đi qua điểm M có hệ số góc là k có dạng :

$$y = k(x - x_1) + y_1.$$

- (d) tiếp xúc với đồ thị (C) khi hệ sau $\begin{cases} f(x) = k(x - x_1) + y_1 \\ f'(x) = k \end{cases}$ có nghiệm.

Cách 2 :

- Gọi $N(x_0; y_0)$ là tọa độ tiếp điểm của đồ thị (C) và tiếp tuyến (d) qua điểm M , nên (d) cũng có dạng $y = y'_0(x - x_0) + y_0$.
- (d) đi qua điểm M nên có phương trình : $y_1 = y'_0(x_1 - x_0) + y_0$ (*)
- Từ phương trình (*) ta tìm được tọa độ điểm $N(x_0; y_0)$, từ đây ta tìm được phương trình đường thẳng (d) .

Ví dụ 2: Cho hàm số : $y = \frac{x^4}{2} - 3x^2 + \frac{5}{2}$ có đồ thị là (C) . Giả sử $M \in (C)$ có hoành độ a . Với giá trị nào của a thì tiếp tuyến của (C) tại M cắt (C) tại 2 điểm phân biệt khác M .

Giải :

Vì $M \in (C)$ nên $M\left(a; y_M = \frac{a^4}{2} - 3a^2 + \frac{5}{2}\right)$

Tiếp tuyến tại M có hệ số góc $y'_M = 2a^3 - 6a$

Tiếp tuyến tại M có dạng :

$$y = y'_{x_M}(x - x_M) + y_M \Rightarrow (d): y = (2a^3 - 6a)(x - a) + \frac{a^4}{2} - 3a^2 + \frac{5}{2}$$

Tiếp tuyến (d) của (C) tại M cắt (C) tại 2 điểm phân biệt khác M khi phương trình sau có 3 nghiệm phân biệt :

$$\frac{x^4}{2} - 3x^2 + \frac{5}{2} = (2a^3 - 6a)(x - a) + \frac{a^4}{2} - 3a^2 + \frac{5}{2} \text{ hay phương trình}$$

$(x-a)^2(x^2+2ax+3a^3-6)=0$ có 3 nghiệm phân biệt, nghĩa là phương trình $g(x)=x^2+2ax+3a^3-6=0$ có hai nghiệm phân biệt và khác a .

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta'_{g(x)} = a^2 - (3a^2 - 6) > 0 \\ g(a) = 6a^2 - 6 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - 3 < 0 \\ a^2 \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |a| < \sqrt{3} \\ a \neq \pm 1 \end{cases}$$

Vậy giá trị a cần tìm $\begin{cases} |a| < \sqrt{3} \\ a \neq \pm 1 \end{cases}$

Bài tập tương tự :

1. Tìm m để tiếp tuyến đi qua điểm $M(2; m+2)$ của đồ thị hàm số

$y = x^3 - 3x + m$ phải đi qua gốc tọa độ O .

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1.

a) Tìm a, b biết rằng đồ thị của hàm số $f(x) = \frac{ax^2 - bx}{x-1}$ đi qua điểm $A\left(-1; \frac{5}{2}\right)$

và tiếp tuyến tại $O(0;0)$ có hệ số góc bằng -3 . Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị ứng với giá trị a, b vừa tìm được.

b) Tìm a, b biết rằng đồ thị của hàm số $f(x) = 2x^2 + ax + b$ tiếp xúc với

hypebol a) Tìm a, b biết rằng đồ thị của hàm số $y = \frac{1}{x}$ tại điểm $M\left(\frac{1}{2}; 2\right)$

2.

a) Viết phương trình của đường thẳng đi qua điểm $A(1; -2)$ và tiếp xúc với

parabol $y = x^2 - 2x$

b) Chứng minh hai đường cong $y = x^3 + \frac{5}{4}x - 2, y = x^2 + x - 2$ tiếp xúc nhau

tại M , viết phương trình tiếp tuyến chung của hai đường cong đó.

c) Chứng minh rằng các đồ thị của ba hàm số

$f(x) = -x^2 + 3x + 6, g(x) = x^3 - x^2 + 4, h(x) = x^2 + 7x + 8$ tiếp xúc nhau tại điểm $A(-1; 2)$.

d) Chứng minh rằng các đồ thị của ai hàm số

$f(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{3}{2}x, g(x) = \frac{3x}{x+2}$ tiếp xúc nhau. Xác định tiếp điểm và viết phương trình tiếp tuyến chung của hai đường cong tại điểm đó.

e) Chứng minh rằng các đồ thị của ai hàm số $f(x) = x^3 - x, g(x) = x^2 - 1$ tiếp xúc nhau. Xác định tiếp điểm và viết phương trình tiếp tuyến chung của hai đường cong tại điểm đó.

Hướng dẫn :

1.

$$a) \begin{cases} \frac{a(-1)^2 - (-1)}{-1 - 1} = \frac{5}{2} \\ f'(0) = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = -3 \end{cases}$$

$$b) a = -6, b = \frac{9}{2}$$

$$2. a) (d): y = m(x - 1) - 2 \Rightarrow m = 2 \quad (y = 2x - 4), \quad m = -2 \quad (y = -2x)$$

$$b) M\left(\frac{1}{2}; -\frac{5}{4}\right), y = 2x - \frac{9}{4}$$

c) $f(-1) = g(-1) = h(-1) = 2, f'(-1) = g'(-1) = h'(-1) = 5$, chứng tỏ tại $A(-1; 2)$ các đồ thị của ba hàm số có tiếp tuyến chung, nói khác hơn là các đồ thị của ba hàm số tiếp xúc nhau tại điểm $A(-1; 2)$.

$$d) O(0; 0), y = \frac{3}{2}x$$

