

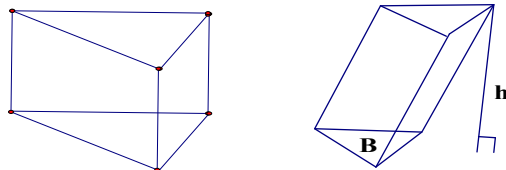
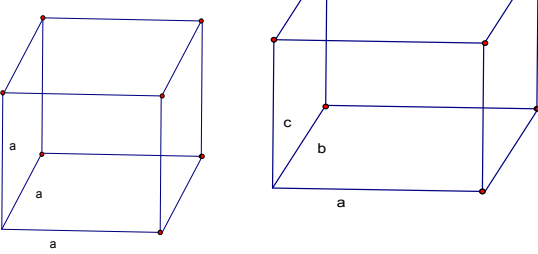
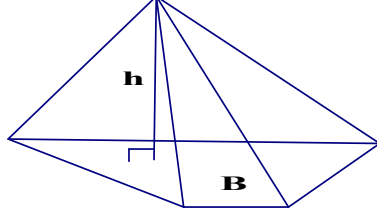
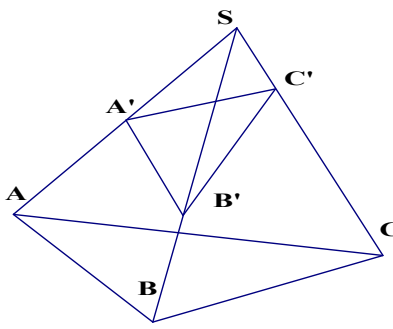
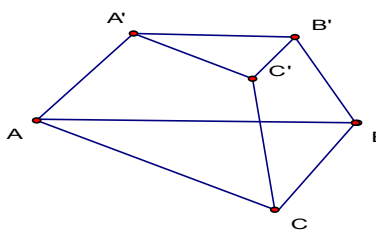
CHUYÊN ĐỀ:

**PHƯƠNG PHÁP LUYỆN TẬP
THỂ TÍCH KHỐI ĐA DIỆN**

ÔN TẬP 3 KIẾN THỨC CƠ BẢN HÌNH HỌC LỚP 12

A. THỂ TÍCH KHỐI ĐA DIỆN

I/ Các công thức thể tích của khối đa diện:

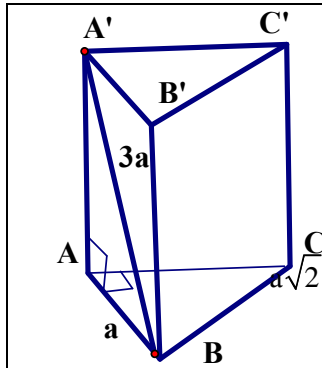
1. THỂ TÍCH KHỐI LĂNG TRỤ: $V = B.h$ với $\begin{cases} B : \text{diện tích đáy} \\ h : \text{chiều cao} \end{cases}$	
a) Thể tích khối hộp chữ nhật: $V = a.b.c$ với a, b, c là ba kích thước b) Thể tích khối lập phương: $V = a^3$ với a là độ dài cạnh	
2. THỂ TÍCH KHỐI CHÓP: $V = \frac{1}{3} B.h$ với $\begin{cases} B : \text{diện tích đáy} \\ h : \text{chiều cao} \end{cases}$	
3. TỈ SỐ THỂ TÍCH TỨ DIỆN: Cho khối tứ diện SABC và A', B', C' là các điểm tùy ý lần lượt thuộc SA, SB, SC ta có: $\frac{V_{SABC}}{V_{SA'B'C'}} = \frac{SA}{SA'} \cdot \frac{SB}{SB'} \cdot \frac{SC}{SC'}$	
4. THỂ TÍCH KHỐI CHÓP CỤT: $V = \frac{h}{3} (B + B' + \sqrt{BB'})$ với $\begin{cases} B, B' : \text{diện tích hai đáy} \\ h : \text{chiều cao} \end{cases}$	

II/ Bài tập:

LOẠI 1: THỂ TÍCH LĂNG TRỤ

1) Dạng 1: Khối lăng trụ đứng có chiều cao hay cạnh đáy

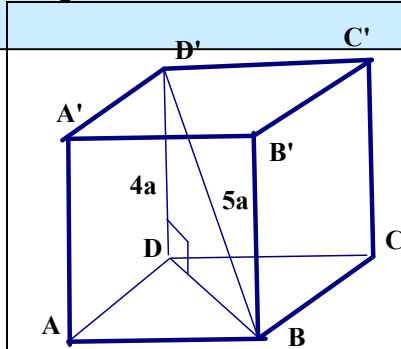
Ví dụ 1: Đáy của lăng trụ đứng tam giác $ABC.A'B'C'$ là tam giác ABC vuông cân tại A có cạnh $BC = a\sqrt{2}$ và biết $A'B = 3a$. Tính thể tích khối lăng trụ.



Lời giải:

Ta có
 $\triangle ABC$ vuông cân tại A nên $AB = AC = a$
 $ABC.A'B'C'$ là lăng trụ đứng $\Rightarrow AA' \perp AB$
 $\triangle AA'B \Rightarrow AA'^2 = A'B^2 - AB^2 = 8a^2$
 $\Rightarrow AA' = 2a\sqrt{2}$
 Vậy $V = B.h = S_{ABC} . AA' = a^3\sqrt{2}$

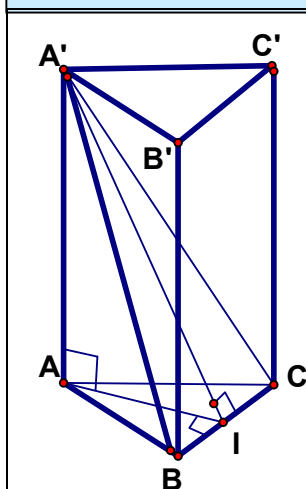
Ví dụ 2: Cho lăng trụ tứ giác đều $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bên bằng $4a$ và đường chéo $5a$. Tính thể tích khối lăng trụ này.



Lời giải:

$ABCD.A'B'C'D'$ là lăng trụ đứng nên
 $BD^2 = A'B^2 - DD'^2 = 9a^2 \Rightarrow BD = 3a$
 $ABCD$ là hình vuông $\Rightarrow AB = \frac{3a}{\sqrt{2}}$
 Suy ra $B = S_{ABCD} = \frac{9a^2}{4}$
 Vậy $V = B.h = S_{ABCD} . AA' = 9a^3$

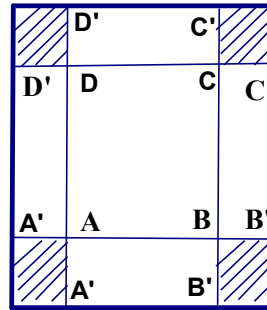
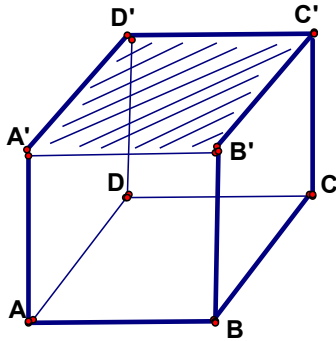
Ví dụ 3: Đáy của lăng trụ đứng tam giác $ABC.A'B'C'$ là tam giác đều cạnh $a = 4$ và biết diện tích tam giác $A'BC$ bằng 8 . Tính thể tích khối lăng trụ.



Lời giải:

Gọi I là trung điểm BC . Ta có
 $\triangle ABC$ đều nên
 $AI = \frac{AB\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$ & $AI \perp BC$
 $\Rightarrow A'I \perp BC$ (dl3 $\perp$)
 $S_{A'BC} = \frac{1}{2} BC . A'I \Rightarrow A'I = \frac{2S_{A'BC}}{BC} = 4$
 $AA' \perp (ABC) \Rightarrow AA' \perp AI$.
 $\triangle AA'I \Rightarrow AA' = \sqrt{A'I^2 - AI^2} = 2$
 Vậy : $V_{ABC.A'B'C'} = S_{ABC} . AA' = 8\sqrt{3}$

Ví dụ 4: Một tấm bìa hình vuông có cạnh 44 cm, người ta cắt bỏ đi ở mỗi góc tám bìa một hình vuông cạnh 12 cm rồi gấp lại thành một cái hộp chữ nhật không có nắp. Tính thể tích cái hộp này.

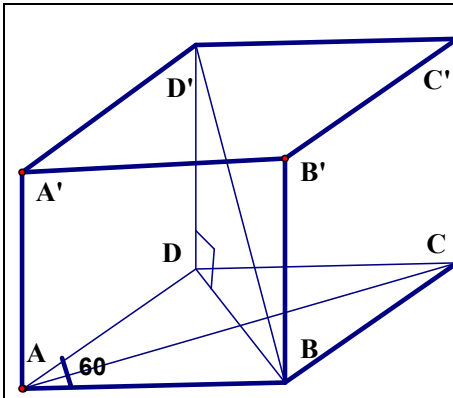


Giải

Theo đề bài, ta có
 $AA' = BB' = CC' = DD' = 12 \text{ cm}$
 nên ABCD là hình vuông có
 $AB = 44 \text{ cm} - 24 \text{ cm} = 20 \text{ cm}$
 và chiều cao hộp $h = 12 \text{ cm}$

Vậy thể tích hộp là
 $V = S_{ABCD} \cdot h = 4800 \text{ cm}^3$

Ví dụ 5: Cho hình hộp đứng có đáy là hình thoi cạnh a và có góc nhọn bằng 60° . Đường chéo lớn của đáy bằng đường chéo nhỏ của lăng trụ. Tính thể tích hình hộp.



Lời giải:

Ta có tam giác ABD đều nên: $BD = a$

$$\text{và } S_{ABCD} = 2S_{ABD} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$$

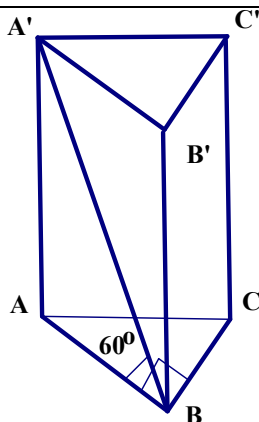
$$\text{Theo đề bài } BD' = AC = 2 \frac{a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$$

$$VDD'B \Rightarrow DD' = \sqrt{BD'^2 - BD^2} = a\sqrt{2}$$

$$\text{Vậy } V = S_{ABCD} \cdot DD' = \frac{a^3\sqrt{6}}{2}$$

2) **Dạng 2: Lăng trụ đứng có góc giữa đường thẳng và mặt phẳng.**

Ví dụ 1: Cho lăng trụ đứng tam giác ABC A'B'C' có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B với $BA = BC = a$, biết A'B hợp với đáy ABC một góc 60° . Tính thể tích lăng trụ.



Lời giải:

Ta có $A'A \perp (ABC) \Rightarrow A'A \perp AB$ & AB là hình chiếu của A'B trên đáy ABC.

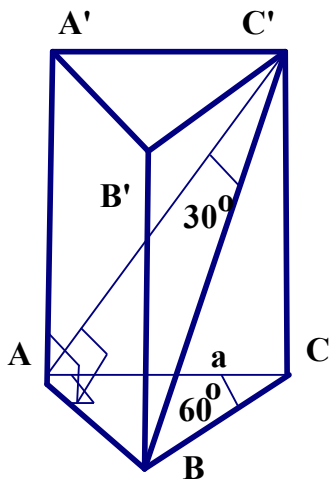
$$\text{Vậy góc}[A'B, (ABC)] = \angle ABA' = 60^\circ$$

$$VABA' \Rightarrow AA' = AB \cdot \tan 60^\circ = a\sqrt{3}$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} BA \cdot BC = \frac{a^2}{2}$$

$$\text{Vậy } V = S_{ABC} \cdot AA' = \frac{a^3\sqrt{3}}{2}$$

Ví dụ 2: Cho lăng trụ đứng tam giác ABC A'B'C' có đáy ABC là tam giác vuông tại A với $AC = a$, $\angle ACB = 60^\circ$ biết BC' hợp với (AA'C'C) một góc 30° . Tính AC' và thể tích lăng trụ.



Lời giải: $V_{ABC} \Rightarrow AB = AC \cdot \tan 60^\circ = a\sqrt{3}$.

Ta có:

$AB \perp AC$; $AB \perp AA' \Rightarrow AB \perp (AA'C'C)$
nên AC' là hình chiếu của BC' trên (AA'C'C).

Vậy góc $[BC'; (AA'C'C)] = \angle BC'A = 30^\circ$

$$V_{AC'B} \Rightarrow AC' = \frac{AB}{\tan 30^\circ} = 3a$$

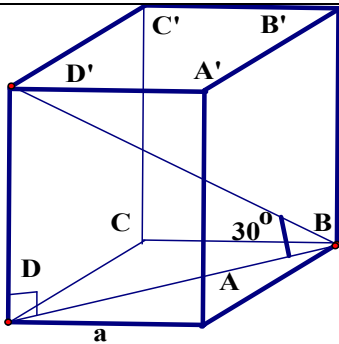
$$V = B.h = S_{ABC} \cdot AA'$$

$$V_{AA'C'} \Rightarrow AA' = \sqrt{AC'^2 - A'C'^2} = 2a\sqrt{2}$$

$$V_{ABC} \text{ là nửa tam giác đều nên } S_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Vậy } V = a^3\sqrt{6}$$

Ví dụ 3: Cho lăng trụ đứng ABCD A'B'C'D' có đáy ABCD là hình vuông cạnh a và đường chéo BD' của lăng trụ hợp với đáy ABCD một góc 30° . Tính thể tích và tổng diện tích của các mặt bên của lăng trụ.



Giải:

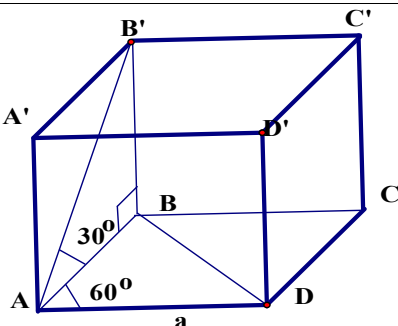
Ta có ABCD A'B'C'D' là lăng trụ đứng nên ta có: $DD' \perp (ABCD) \Rightarrow DD' \perp BD$ và BD là hình chiếu của BD' trên ABCD.

Vậy góc $[BD'; (ABCD)] = \angle BDD' = 30^\circ$

$$V_{BDD'} \Rightarrow DD' = BD \cdot \tan 30^\circ = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

$$\text{Vậy } V = S_{ABCD} \cdot DD' = \frac{a^3\sqrt{6}}{3} \quad S = 4S_{ADD'A'} = \frac{4a^2\sqrt{6}}{3}$$

Ví dụ 4: Cho hình hộp đứng ABCD A'B'C'D' có đáy ABCD là hình thoi cạnh a và $\angle BAD = 60^\circ$ biết AB' hợp với đáy (ABCD) một góc 30° . Tính thể tích của hình hộp.



Giải

$$V_{ABD} \text{ đều cạnh } a \Rightarrow S_{ABD} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

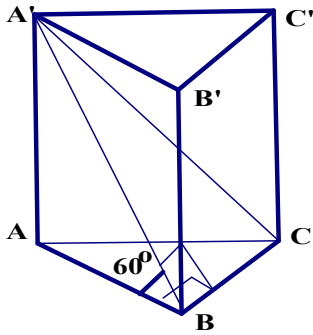
$$\Rightarrow S_{ABCD} = 2S_{ABD} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$$

$$V_{ABB'} \text{ vuông tại B} \Rightarrow BB' = AB \tan 30^\circ = a\sqrt{3}$$

$$\text{Vậy } V = B.h = S_{ABCD} \cdot BB' = \frac{3a^3}{2}$$

3) **Dạng 3:** **Lăng trụ đứng có góc giữa 2 mặt phẳng**

Ví dụ 1: Cho lăng trụ đứng tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B với $BA = BC = a$, biết $(A'BC)$ hợp với đáy (ABC) một góc 60° . Tính thể tích lăng trụ.



Lời giải:

Ta có $A'A \perp (ABC)$ & $BC \perp AB \Rightarrow BC \perp A'B$

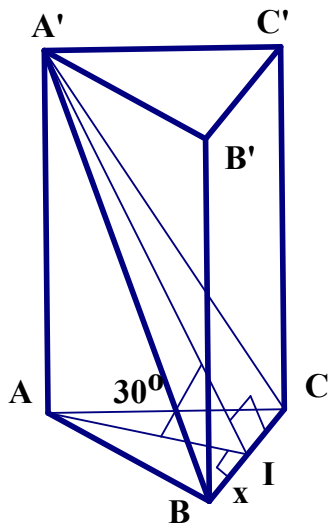
Vậy góc $[(A'BC), (ABC)] = \angle A'BA = 60^\circ$

$AA' \perp AB \Rightarrow AA' = AB \cdot \tan 60^\circ = a\sqrt{3}$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} BA \cdot BC = \frac{a^2}{2}$$

$$\text{Vậy } V = S_{ABC} \cdot AA' = \frac{a^3 \sqrt{3}}{2}$$

Ví dụ 2: Đáy của lăng trụ đứng tam giác $ABC.A'B'C'$ là tam giác đều. Mặt $(A'BC)$ tạo với đáy một góc 30° và diện tích tam giác $A'BC$ bằng 8. Tính thể tích khối lăng trụ.



Giải: ΔABC đều $\Rightarrow AI \perp BC$ mà $AA' \perp (ABC)$ nên $A'I \perp BC$ (đl 3 $\perp$).

Vậy góc $[(A'BC), (ABC)] = \angle A'IA = 30^\circ$

Giả sử $BI = x \Rightarrow AI = \frac{2x\sqrt{3}}{2} = x\sqrt{3}$. Ta có

$$\Delta A'AI : A'I = AI : \cos 30^\circ = \frac{2AI}{\sqrt{3}} = \frac{2x\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 2x$$

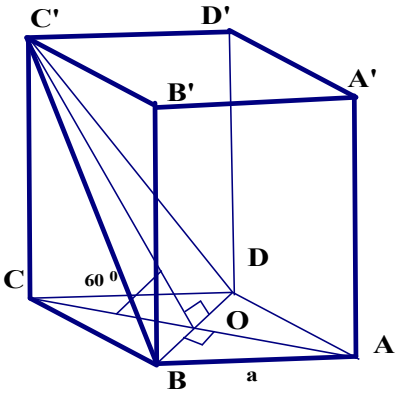
$$A'A = AI \cdot \tan 30^\circ = x\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = x$$

$$\text{Vậy } V_{ABC.A'B'C'} = \frac{1}{2} AI \cdot A'A = x^3 \sqrt{3}$$

$$\text{Mà } S_{A'BC} = BI \cdot A'I = x \cdot 2x = 8 \Rightarrow x = 2$$

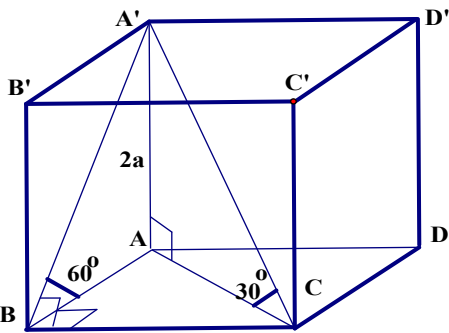
$$\text{Do đó } V_{ABC.A'B'C'} = 8\sqrt{3}$$

Ví dụ 3: Cho lăng trụ tứ giác đều $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh đáy a và mặt phẳng (BDC') hợp với đáy $(ABCD)$ một góc 60° . Tính thể tích khối hộp chữ nhật.



Gọi O là tâm của ABCD . Ta có
 ABCD là hình vuông nên $OC \perp BD$
 $CC' \perp (ABCD)$ nên $OC' \perp BD$ (đl 3 ⊥). Vậy
 góc $[(BDC'), (ABCD)] = \angle C'OC = 60^\circ$
 Ta có $V = B.h = S_{ABCD} \cdot CC'$
 ABCD là hình vuông nên $S_{ABCD} = a^2$
 $\triangle OCC'$ vuông nên $CC' = OC \cdot \tan 60^\circ = \frac{a\sqrt{6}}{2}$
 Vậy $V = \frac{a^3\sqrt{6}}{2}$

Ví dụ 4: Cho hình hộp chữ nhật ABCD A'B'C'D' có $AA' = 2a$; mặt phẳng (A'BC) hợp với đáy (ABCD) một góc 60° và A'C hợp với đáy (ABCD) một góc 30° . Tính thể tích khối hộp chữ nhật.

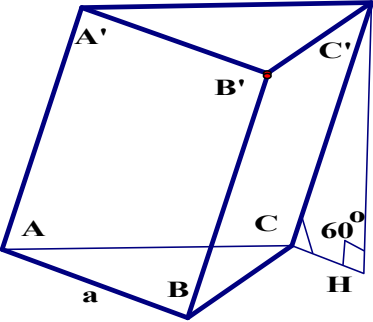


Ta có $AA' \perp (ABCD) \Rightarrow AC$ là hình chiếu của A'C trên (ABCD) .
 Vậy góc $[A'C, (ABCD)] = \angle A'CA = 30^\circ$
 $BC \perp AB \Rightarrow BC \perp A'B$ (đl 3 ⊥) .
 Vậy góc $[(A'BC), (ABCD)] = \angle A'BA = 60^\circ$
 $VA'AC \Rightarrow AC = AA' \cdot \cot 30^\circ = 2a\sqrt{3}$
 $VA'AB \Rightarrow AB = AA' \cdot \cot 60^\circ = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$
 $VABC \Rightarrow BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = \frac{4a\sqrt{6}}{3}$
 Vậy $V = AB \cdot BC \cdot AA' = \frac{16a^3\sqrt{2}}{3}$

4) Dạng 4:

Khối lăng trụ xiên

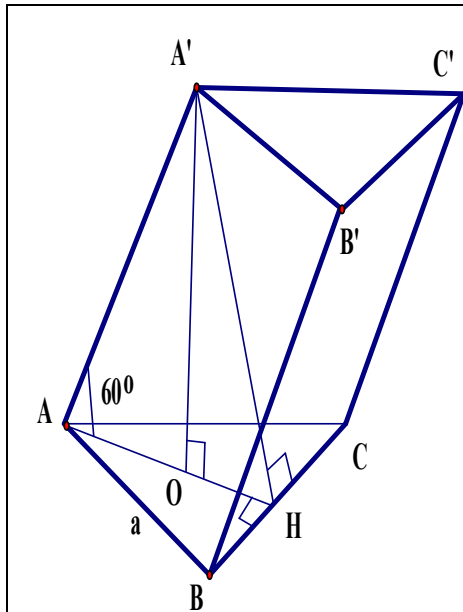
Ví dụ 1: Cho lăng trụ xiên tam giác ABC A'B'C' có đáy ABC là tam giác đều cạnh a , biết cạnh bên là $a\sqrt{3}$ và hợp với đáy ABC một góc 60° . Tính thể tích lăng trụ.



Lời giải:
 Ta có $C'H \perp (ABC) \Rightarrow CH$ là hình chiếu của CC' trên (ABC)
 Vậy góc $[CC', (ABC)] = \angle C'CH = 60^\circ$
 $VCHC' \Rightarrow C'H = CC' \cdot \sin 60^\circ = \frac{3a}{2}$
 $S_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. Vậy $V = S_{ABC} \cdot C'H = \frac{3a^3\sqrt{3}}{8}$

Ví dụ 2: Cho lăng trụ xiên tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a . Hình chiếu của A' xuống (ABC) là tâm O đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC biết AA' hợp với đáy ABC một góc 60° .

- 1) Chứng minh rằng $BB'C'C$ là hình chữ nhật.
- 2) Tính thể tích lăng trụ.



Lời giải:

1) Ta có $A'O \perp (ABC) \Rightarrow OA$ là hình chiếu của AA' trên (ABC)

Vậy $\angle[AA', (ABC)] = \angle AAO = 60^\circ$

Ta có $BB'C'C$ là hình bình hành (vì mặt bên của lăng trụ)

$AO \perp BC$ tại trung điểm H của BC nên $BC \perp A'H$ (đl 3 $\perp$)

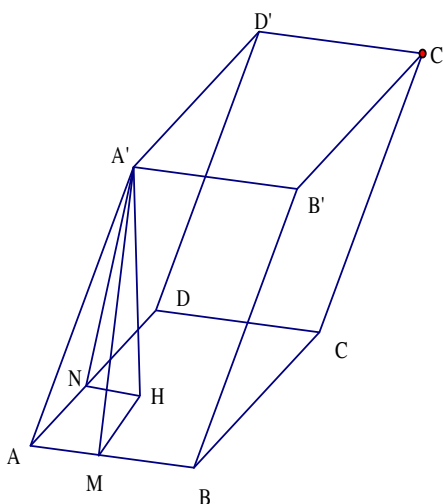
$\Rightarrow BC \perp (AA'H) \Rightarrow BC \perp AA'$ mà $AA' // BB'$ nên $BC \perp BB'$. Vậy $BB'C'C$ là hình chữ nhật.

2) V_{ABC} đều nên $AO = \frac{2}{3}AH = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

$\angle AOA' \Rightarrow A'O = AO \tan 60^\circ = a$

Vậy $V = S_{ABC} \cdot A'O = \frac{a^3\sqrt{3}}{4}$

Ví dụ 3: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình chữ nhật với $AB = \sqrt{3}$, $AD = \sqrt{7}$. Hai mặt bên $(ABB'A')$ và $(ADD'A')$ lần lượt tạo với đáy những góc 45° và 60° . Tính thể tích khối hộp nếu biết cạnh bên bằng 1.



Lời giải:

Kẻ $A'H \perp (ABCD)$, $HM \perp AB$, $HN \perp AD$
 $\Rightarrow A'M \perp AB$, $A'N \perp AD$ (đl 3 $\perp$)

$\Rightarrow \angle A'MH = 45^\circ$, $\angle A'NH = 60^\circ$

Đặt $A'H = x$. Khi đó

$$A'N = x : \sin 60^\circ = \frac{2x}{\sqrt{3}}$$

$$AN = \sqrt{AA'^2 - A'N^2} = \sqrt{\frac{3 - 4x^2}{3}} = HM$$

$$\text{Mà } HM = x \cdot \cot 45^\circ = x$$

$$\text{Nghĩa là } x = \sqrt{\frac{3 - 4x^2}{3}} \Rightarrow x = \sqrt{\frac{3}{7}}$$

$$\begin{aligned} \text{Vậy } V_{ABCD.A'B'C'D'} &= AB \cdot AD \cdot x \\ &= \sqrt{3} \cdot \sqrt{7} \cdot \sqrt{\frac{3}{7}} = 3 \end{aligned}$$

LOẠI 2: THỂ TÍCH KHỐI CHÓP

1) Dạng 1: Khối chóp có cạnh bên vuông góc với đáy

Ví dụ 1: Cho hình chóp SABC có $SB = SC = BC = CA = a$. Hai mặt (ABC) và (ASC) cùng vuông góc với (SBC). Tính thể tích hình chóp.

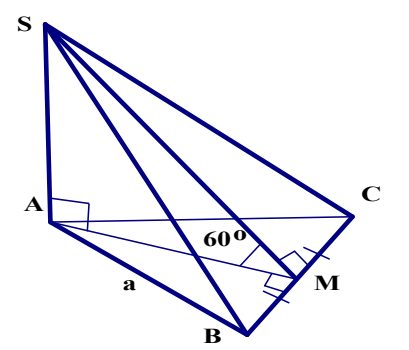
	<u>Lời giải:</u> Ta có $\begin{cases} (ABC) \perp (SBC) \\ (ASC) \perp (SBC) \end{cases} \Rightarrow AC \perp (SBC)$ Do đó $V = \frac{1}{3} S_{SBC} \cdot AC = \frac{1}{3} \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} a = \frac{a^3 \sqrt{3}}{12}$
--	---

Ví dụ 2: Cho hình chóp SABC có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B với $AC = a$ biết SA vuông góc với đáy ABC và SB hợp với đáy một góc 60° .

- 1) Chứng minh các mặt bên là tam giác vuông.
- 2) Tính thể tích hình chóp.

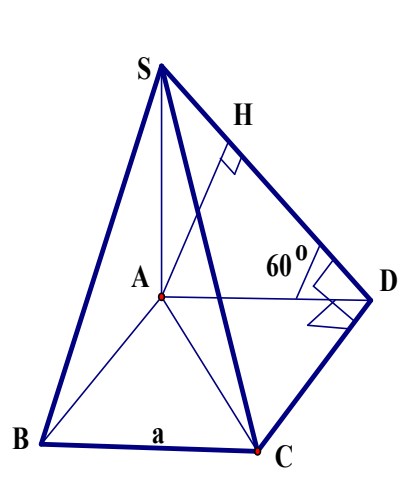
	<u>Lời giải:</u> 1) $SA \perp (ABC) \Rightarrow SA \perp AB$ & $SA \perp AC$ mà $BC \perp AB \Rightarrow BC \perp SB$ (đl 3 $\perp$). Vậy các mặt bên chóp là tam giác vuông. 2) Ta có $SA \perp (ABC) \Rightarrow AB$ là hình chiếu của SB trên (ABC). Vậy góc $[SB, (ABC)] = \angle ASB = 60^\circ$. $\triangle ABC$ vuông cân nên $BA = BC = \frac{a}{\sqrt{2}}$ $S_{ABC} = \frac{1}{2} BA \cdot BC = \frac{a^2}{4}$ $\triangle SAB \Rightarrow SA = AB \cdot \tan 60^\circ = \frac{a\sqrt{6}}{2}$ Vậy $V = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot SA = \frac{1}{3} \frac{a^2}{4} \frac{a\sqrt{6}}{2} = \frac{a^3 \sqrt{6}}{24}$
--	--

Ví dụ 3: Cho hình chóp SABC có đáy ABC là tam giác đều cạnh a biết SA vuông góc với đáy ABC và (SBC) hợp với đáy (ABC) một góc 60° . Tính thể tích hình chóp.

	<u>Lời giải:</u> M là trung điểm của BC, vì tam giác ABC đều nên $AM \perp BC \Rightarrow SA \perp BC$ (đl 3 $\perp$). Vậy góc $[(SBC); (ABC)] = \widehat{SMA} = 60^\circ$. Ta có $V = \frac{1}{3} B.h = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot SA$ $VSAM \Rightarrow SA = AM \tan 60^\circ = \frac{3a}{2}$ Vậy $V = \frac{1}{3} B.h = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot SA = \frac{a^3 \sqrt{3}}{8}$
---	---

Ví dụ 4: Cho hình chóp SABCD có đáy ABCD là hình vuông có cạnh a và SA vuông góc đáy ABCD và mặt bên (SCD) hợp với đáy một góc 60° .

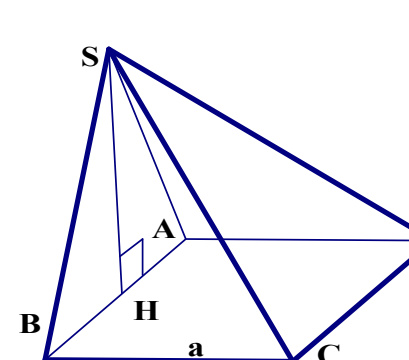
- 1) Tính thể tích hình chóp SABCD.
- 2) Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SCD).

	<u>Lời giải:</u> 1) Ta có $SA \perp (ABCD)$ và $CD \perp AD \Rightarrow CD \perp SD$ (đl 3 $\perp$). (1) Vậy góc $[(SCD); (ABCD)] = \widehat{SDA} = 60^\circ$. $VSAD$ vuông nên $SA = AD \cdot \tan 60^\circ = a\sqrt{3}$ Vậy $V = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot SA = \frac{1}{3} a^2 a\sqrt{3} = \frac{a^3 \sqrt{3}}{3}$ 2) Ta dựng $AH \perp SD$, vì $CD \perp (SAD)$ (do (1)) nên $CD \perp AH \Rightarrow AH \perp (SCD)$ Vậy AH là khoảng cách từ A đến (SCD). $VSAD \Rightarrow \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AD^2} = \frac{1}{3a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{4}{3a^2}$ Vậy $AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$
--	---

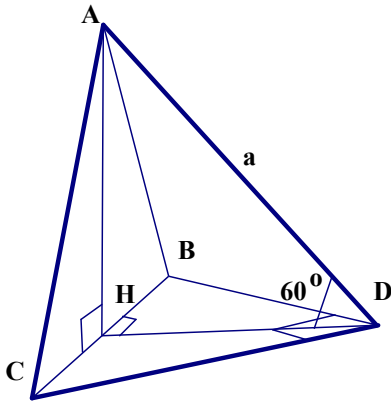
2) **Dạng 2:** **Khối chóp có một mặt bên vuông góc với đáy**

Ví dụ 1: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông có cạnh a. Mặt bên SAB là tam giác đều nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy ABCD.

- 1) Chứng minh rằng chân đường cao khối chóp trùng với trung điểm cạnh AB.
- 2) Tính thể tích khối chóp SABCD.

	<u>Lời giải:</u> 1) Gọi H là trung điểm của AB. $VSAB$ đều $\Rightarrow SH \perp AB$ mà $(SAB) \perp (ABCD) \Rightarrow SH \perp (ABCD)$ Vậy H là chân đường cao của khối chóp. 2) Ta có tam giác SAB đều nên $SA = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ suy ra $V = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot SH = \frac{a^3 \sqrt{3}}{6}$
---	--

Ví dụ 2: Cho tứ diện ABCD có ABC là tam giác đều, BCD là tam giác vuông cân tại D, $(ABC) \perp (BCD)$ và AD hợp với (BCD) một góc 60° . Tính thể tích tứ diện ABCD.



Lời giải:

Gọi H là trung điểm của BC.

Ta có tam giác ABC đều nên $AH \perp (BCD)$, mà $(ABC) \perp (BCD) \Rightarrow AH \perp (BCD)$.

Ta có $AH \perp HD \Rightarrow AH = AD \cdot \tan 60^\circ = a\sqrt{3}$

$$\& HD = AD \cdot \cot 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

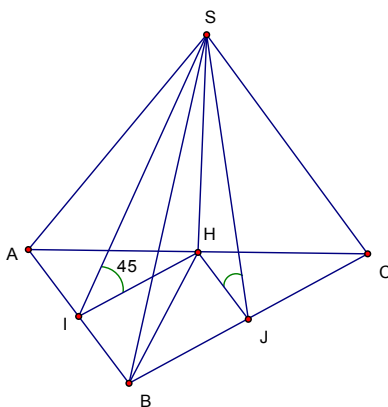
$$VBCD \Rightarrow BC = 2HD = \frac{2a\sqrt{3}}{3} \text{ suy ra}$$

$$V = \frac{1}{3} S_{BCD} \cdot AH = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} BC \cdot HD \cdot AH = \frac{a^3 \sqrt{3}}{9}$$

Ví dụ 3: Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, có $BC = a$. Mặt bên SAC vuông góc với đáy, các mặt bên còn lại đều tạo với mặt đáy một góc 45° .

a) Chứng minh rằng chân đường cao khối chóp trùng với trung điểm cạnh AC.

b) Tính thể tích khối chóp SABC.



Lời giải:

a) Kẻ $SH \perp BC$ vì $mp(SAC) \perp mp(ABC)$ nên $SH \perp mp(ABC)$.

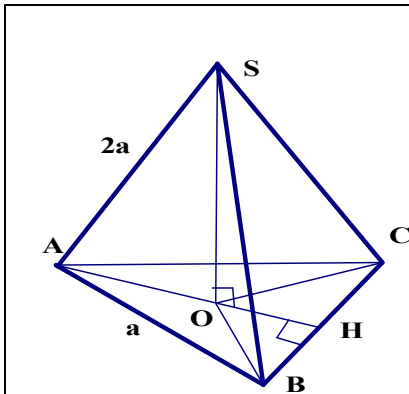
Gọi I, J là hình chiếu của H trên AB và BC $\Rightarrow SI \perp AB, SJ \perp BC$, theo giả thiết $\angle SIH = \angle SJH = 45^\circ$

Ta có: $\triangle SHI = \triangle SHJ \Rightarrow HI = HJ$ nên BH là đường phân giác của $\angle ABC$ từ đó suy ra H là trung điểm của AC.

$$b) HI = HJ = SH = \frac{a}{2} \Rightarrow V_{SABC} = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot SH = \frac{a^3}{12}$$

3) Dạng 3: **Khối chóp đều**

Ví dụ 1: Cho chóp tam giác đều SABC cạnh đáy bằng a và cạnh bên bằng 2a. Chứng minh rằng chân đường cao kẻ từ S của hình chóp là tâm của tam giác đều ABC. Tính thể tích chóp đều SABC.



Lời giải:

Dựng $SO \perp (ABC)$ Ta có $SA = SB = SC$ suy ra $OA = OB = OC$

Vậy O là tâm của tam giác đều ABC.

Ta có tam giác ABC đều nên

$$AO = \frac{2}{3}AH = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

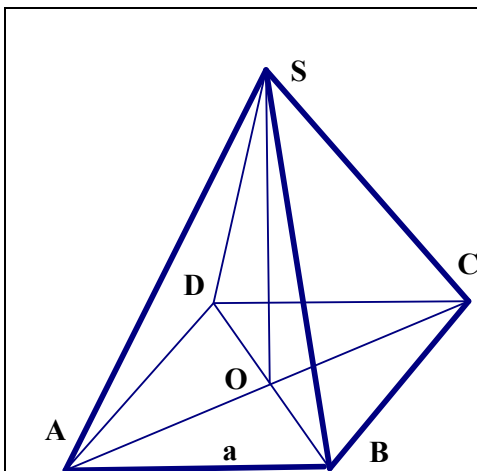
$$VSAO \Rightarrow SO^2 = SA^2 - OA^2 = \frac{11a^2}{3}$$

$$\Rightarrow SO = \frac{a\sqrt{11}}{\sqrt{3}}. \text{ Vậy } V = \frac{1}{3}S_{ABC} \cdot SO = \frac{a^3\sqrt{11}}{12}$$

Ví dụ 2: Cho khối chóp tứ giác SABCD có tất cả các cạnh có độ dài bằng a.

1) Chứng minh rằng SABCD là chóp tứ giác đều.

2) Tính thể tích khối chóp SABCD.



Lời giải:

Dựng $SO \perp (ABCD)$

Ta có $SA = SB = SC = SD$ nên

$OA = OB = OC = OD \Rightarrow ABCD$ là hình thoi có đường tròn ngoại tiếp nên ABCD là hình vuông.

Ta có $SA^2 + SB^2 = AB^2 + BC^2 = AC^2$

nên $VASC$ vuông tại S $\Rightarrow OS = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

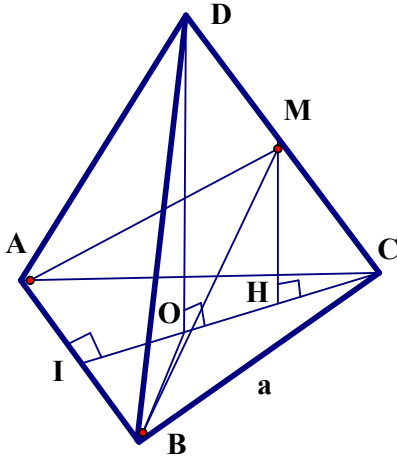
$$\Rightarrow V = \frac{1}{3}S_{ABCD} \cdot SO = \frac{1}{3}a^2 \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a^3\sqrt{2}}{6}$$

$$\text{Vậy } V = \frac{a^3\sqrt{2}}{6}$$

Ví dụ 3: Cho khối tứ diện đều ABCD cạnh bằng a, M là trung điểm DC.

a) Tính thể tích khối tứ diện đều ABCD.

b) Tính khoảng cách từ M đến mp(ABC). Suy ra thể tích hình chóp MABC.



Lời giải:

a) Gọi O là tâm của $\Delta ABC \Rightarrow DO \perp (ABC)$

$$V = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot DO$$

$$S_{ABC} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}, \quad OC = \frac{2}{3} CI = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

$$\Delta DOC \text{ vuông có : } DO = \sqrt{DC^2 - OC^2} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

$$\Rightarrow V = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{3} = \frac{a^3 \sqrt{2}}{12}$$

b) Kẻ $MH \parallel DO$, khoảng cách từ M đến mp(ABC) là MH

$$MH = \frac{1}{2} DO = \frac{a\sqrt{6}}{6}$$

$$\Rightarrow V_{MABC} = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot MH = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{6} = \frac{a^3 \sqrt{2}}{24}$$

$$\text{Vậy } V = \frac{a^3 \sqrt{2}}{24}$$

Bài tập tương tự:

Bài 1: Cho hình chóp đều SABC có cạnh bên bằng a hợp với đáy ABC một góc 60° . Tính thể tích hình chóp. Đs: $V = \frac{3a^3}{16}$

Bài 2: Cho hình chóp tam giác đều SABC có cạnh bên a, góc ở đáy của mặt bên là 45° .

1) Tính độ dài chiều cao SH của chóp SABC. Đs: $SH = \frac{a}{\sqrt{3}}$

2) Tính thể tích hình chóp SABC. Đs: $V = \frac{a^3}{6}$

Bài 3: Cho hình chóp tam giác đều SABC có cạnh đáy a và mặt bên hợp với đáy một góc 60° . Tính thể tích hình chóp SABC. Đs: $V = \frac{a^3 \sqrt{3}}{24}$

Bài 4: Cho chóp tam giác đều có đường cao h hợp với một mặt bên một góc 30° . Tính thể tích hình chóp. Đs: $V = \frac{h^3 \sqrt{3}}{3}$

Bài 5: Cho hình chóp tam giác đều có đường cao h và mặt bên có góc ở đỉnh bằng 60° . Tính thể tích hình chóp. Đs: $V = \frac{h^3 \sqrt{3}}{8}$

Bài 6: Cho hình chóp tứ giác đều SABCD có cạnh đáy a và $\angle ASB = 60^\circ$.

1) Tính tổng diện tích các mặt bên của hình chóp đều. Đs: $S = \frac{a^2 \sqrt{3}}{3}$

2) Tính thể tích hình chóp. Đs: $V = \frac{a^3 \sqrt{2}}{6}$

Bài 7: Cho hình chóp tứ giác đều SABCD có chiều cao h , góc ở đỉnh của mặt bên bằng 60° . Tính thể tích hình chóp. Đs: $V = \frac{2h^3}{3}$

Bài 8: Cho hình chóp tứ giác đều có mặt bên hợp với đáy một góc 45° và khoảng cách từ chân đường cao của chóp đến mặt bên bằng a .

Tính thể tích hình chóp.

Đs: $V = \frac{8a^3\sqrt{3}}{3}$

Bài 9: Cho hình chóp tứ giác đều có cạnh bên bằng a hợp với đáy một góc 60° .

Tính thể tích hình chóp.

Đs: $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}$

Bài 10: Cho hình chóp SABCD có tất cả các cạnh bằng nhau. Chứng minh rằng SABCD là chóp tứ giác đều. Tính cạnh của hình chóp này khi thể tích của nó bằng $V = \frac{9a^3\sqrt{2}}{2}$. Đs: $AB = 3a$

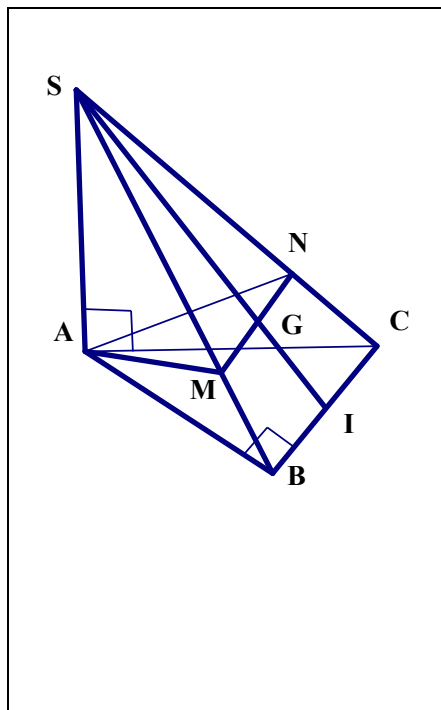
4) **Dạng 4:**

Khối chóp & phương pháp tỷ số thể tích

Ví dụ 1: Cho hình chóp S.ABC có tam giác ABC vuông cân ở B, $AC = a\sqrt{2}$, SA vuông góc với đáy ABC, $SA = a$

1) Tính thể tích của khối chóp S.ABC.

2) Gọi G là trọng tâm tam giác ABC, mặt phẳng (α) qua AG và song song với BC cắt SC, SB lần lượt tại M, N. Tính thể tích của khối chóp S.AMN



Lời giải:

a) Ta có: $V_{S.ABC} = \frac{1}{3} S_{ABC} . SA$ và $SA = a$

+ ΔABC cân có: $AC = a\sqrt{2} \Rightarrow AB = a$

$$\Rightarrow S_{ABC} = \frac{1}{2} a^2 \text{ Vậy: } V_{SABC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} a^2 \cdot a = \frac{a^3}{6}$$

b) Gọi I là trung điểm BC.

G là trọng tâm, ta có: $\frac{SG}{SI} = \frac{2}{3}$

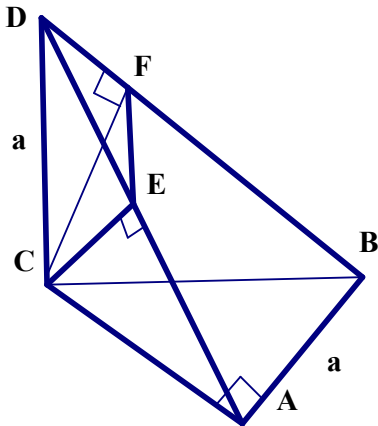
$$\alpha // BC \Rightarrow MN // BC \Rightarrow \frac{SM}{SB} = \frac{SN}{SC} = \frac{SG}{SI} = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{V_{SAMN}}{V_{SABC}} = \frac{SM}{SB} \cdot \frac{SN}{SC} = \frac{4}{9}$$

$$\text{Vậy: } V_{SAMN} = \frac{4}{9} V_{SABC} = \frac{2a^3}{27}$$

Ví dụ 2: Cho tam giác ABC vuông cân ở A và $AB = a$. Trên đường thẳng qua C và vuông góc với mặt phẳng (ABC) lấy điểm D sao cho $CD = a$. Mặt phẳng qua C vuông góc với BD, cắt BD tại F và cắt AD tại E.

- Tính thể tích khối tứ diện ABCD.
- Chứng minh $CE \perp (ABD)$
- Tính thể tích khối tứ diện CDEF.



Lời giải:

a) Tính V_{ABCD} : $V_{ABCD} = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot CD = \frac{a^3}{6}$

b) Ta có:

$$AB \perp AC, AB \perp CD \Rightarrow AB \perp (ACD) \\ \Rightarrow AB \perp EC$$

$$\text{Ta có: } DB \perp EC \Rightarrow EC \perp (ABD)$$

c) Tính V_{DCEF} : Ta có: $\frac{V_{DCEF}}{V_{DABC}} = \frac{DE}{DA} \cdot \frac{DF}{DB} (*)$

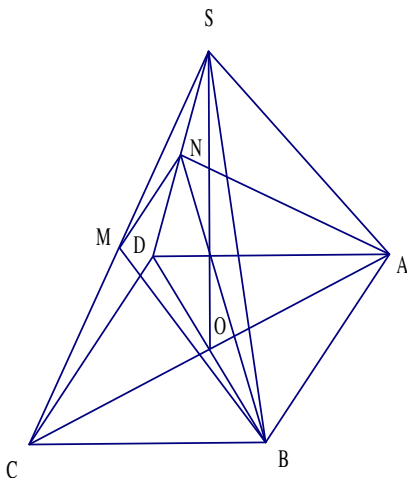
$$\text{Mà } DE \cdot DA = DC^2, \text{ chia cho } DA^2$$

$$\Rightarrow \frac{DE}{DA} = \frac{DC^2}{DA^2} = \frac{a^2}{2a^2} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Tương tự: } \frac{DF}{DB} = \frac{DC^2}{DB^2} = \frac{a^2}{DC^2 + CB^2} = \frac{1}{3}$$

$$\text{Từ (*)} \Rightarrow \frac{V_{DCEF}}{V_{DABC}} = \frac{1}{6} \cdot \text{Vậy } V_{DCEF} = \frac{1}{6} V_{ABCD} = \frac{a^3}{36}$$

Ví dụ 3: Cho khối chóp tứ giác đều SABCD. Một mặt phẳng (α) qua A, B và trung điểm M của SC. Tính tỉ số thể tích của hai phần khối chóp bị phân chia bởi mặt phẳng đó.



Lời giải:

Kẻ $MN \parallel CD$ ($N \in SD$) thì hình thang ABMN là thiết diện của khối chóp khi cắt bởi mặt phẳng (ABM).

$$+ \frac{V_{SAND}}{V_{SADB}} = \frac{SN}{SD} = \frac{1}{2} \Rightarrow V_{SANB} = \frac{1}{2} V_{SADB} = \frac{1}{4} V_{SABCD}$$

$$\frac{V_{SBMN}}{V_{SBCD}} = \frac{SM}{SC} \cdot \frac{SN}{SD} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \Rightarrow V_{SBMN} = \frac{1}{4} V_{SBCD} = \frac{1}{8} V_{SABCD}$$

$$\text{Mà } V_{SABMN} = V_{SANB} + V_{SBMN} = \frac{3}{8} V_{SABCD}.$$

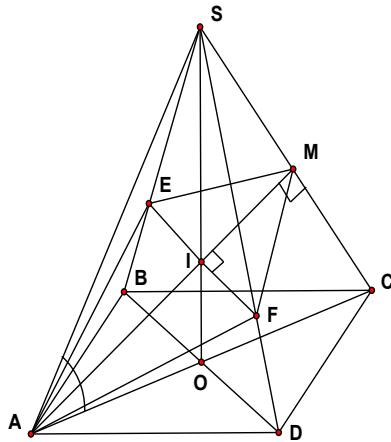
$$\text{Suy ra } V_{ABMN.ABCD} = \frac{5}{8} V_{SABCD}$$

$$\text{Do đó: } \frac{V_{SABMN}}{V_{ABMN.ABCD}} = \frac{3}{5}$$

Ví dụ 4: Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD, đáy là hình vuông cạnh a, cạnh bên tạo với đáy góc 60° . Gọi M là trung điểm SC. Mặt phẳng đi qua AM và song song với BD, cắt SB tại E và cắt SD tại F.

- Hãy xác định mp(AEMF)
- Tính thể tích khối chóp S.ABCD
- Tính thể tích khối chóp S.AEMF

d)



Lời giải:

a) Gọi $I = SO \cap AM$. Ta có $(AEMF) \parallel BD \Rightarrow EF \parallel BD$

$$b) V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot SO \text{ với } S_{ABCD} = a^2$$

$$+ \text{VSOA có : } SO = AO \cdot \tan 60^\circ = \frac{a\sqrt{6}}{2}$$

$$\text{Vậy : } V_{S.ABCD} = \frac{a^3 \sqrt{6}}{6}$$

c) Phân chia chóp tứ giác ta có

$$V_{S.AEMF} = V_{SAMF} + V_{SAME} = 2V_{SAMF}$$

$$V_{S.ABCD} = 2V_{SACD} = 2V_{SABC}$$

Xét khối chóp S.AMF và S.ACD

$$\text{Ta có : } \Rightarrow \frac{SM}{SC} = \frac{1}{2}$$

ΔSAC có trọng tâm I, $EF \parallel BD$ nên:

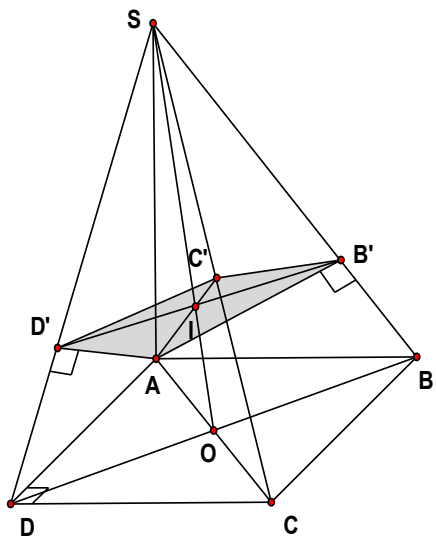
$$\Rightarrow \frac{SI}{SO} = \frac{SF}{SD} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{V_{SAMF}}{V_{SACD}} = \frac{SM}{SC} \cdot \frac{SF}{SD} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow V_{SAMF} = \frac{1}{3} V_{SACD} = \frac{1}{6} V_{SACD} = \frac{a^3 \sqrt{6}}{36}$$

$$\Rightarrow V_{S.AEMF} = 2 \frac{a^3 \sqrt{6}}{36} = \frac{a^3 \sqrt{6}}{18}$$

Ví dụ 5: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, SA vuông góc đáy, $SA = a\sqrt{2}$. Gọi B', D' là hình chiếu của A lần lượt lên SB, SD. Mặt phẳng $(AB'D')$ cắt SC tại C'.

- Tính thể tích khối chóp S.ABCD.
- Chứng minh $SC \perp (AB'D')$
- Tính thể tích khối chóp S.AB'C'D'



Lời giải:

a) Ta có: $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot SA = \frac{a^3 \sqrt{2}}{3}$

b) Ta có $BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AB'$
 & $SB \perp AB'$ Suy ra: $AB' \perp (SBC)$
 nên $AB' \perp SC$. Tương tự $AD' \perp SC$.
 Vậy $SC \perp (AB'D')$

c) Tính $V_{S.AB'C'D'}$

+ Tính $V_{S.AB'C'}$: Ta có: $\frac{V_{SAB'C'}}{V_{SABC}} = \frac{SB'}{SB} \cdot \frac{SC'}{SC} (*)$

$\triangle SAC$ vuông cân nên $\frac{SC'}{SC} = \frac{1}{2}$

Ta có: $\frac{SB'}{SB} = \frac{SA^2}{SB^2} = \frac{2a^2}{SA^2 + AB^2} = \frac{2a^2}{3a^2} = \frac{2}{3}$

Từ (*) $\Rightarrow \frac{V_{SAB'C'}}{V_{SABC}} = \frac{1}{3}$

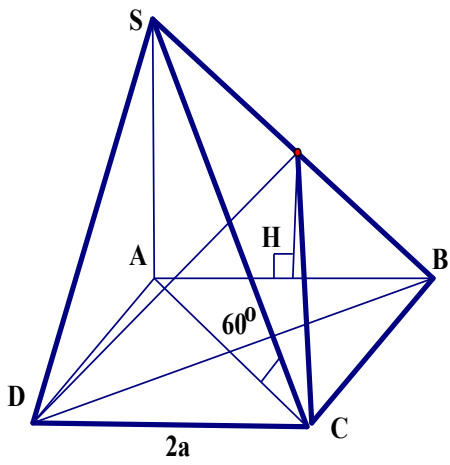
$\Rightarrow V_{SAB'C'} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^3 \sqrt{2}}{3} = \frac{a^3 \sqrt{2}}{9}$

+ $V_{S.AB'C'D'} = 2V_{S.AB'C'} = \frac{2a^3 \sqrt{2}}{9}$

5) Dạng 5: Ôn tập khối chóp và lăng trụ

Ví dụ 1: Cho hình chóp S.ABCD có ABCD là hình vuông cạnh $2a$, SA vuông góc đáy. Góc giữa SC và đáy bằng 60° và M là trung điểm của SB.

- 1) Tính thể tích của khối chóp S.ABCD.
- 2) Tính thể tích của khối chóp MBCD.



Lời giải:

a) Ta có $V = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot SA$

+ $S_{ABCD} = (2a)^2 = 4a^2$

+ $\triangle SAC$ có: $SA = AC \tan C = 2a\sqrt{6}$

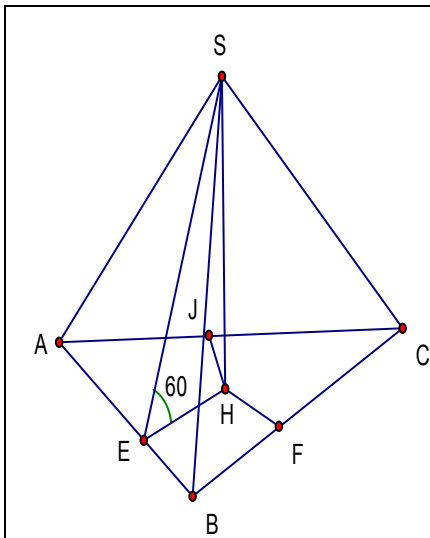
$\Rightarrow V = \frac{1}{3} 4a^2 \cdot 2a\sqrt{6} = \frac{8a^3 \sqrt{6}}{3}$

b) Kẻ $MH \parallel SA \Rightarrow MH \perp (DBC)$

Ta có: $MH = \frac{1}{2} SA$, $S_{BCD} = \frac{1}{2} S_{ABCD}$

$\Rightarrow V_{MBCD} = \frac{1}{4} V = \frac{2a^3 \sqrt{6}}{3}$

Ví dụ 2: Cho hình chóp tam giác S.ABC có $AB = 5a$, $BC = 6a$, $CA = 7a$. Các mặt bên SAB, SBC, SCA tạo với đáy một góc 60° . Tính thể tích khối chóp.



Lời giải:

Hạ $SH \perp (ABC)$, kẻ $HE \perp AB$, $HF \perp BC$, $HJ \perp AC$ suy ra $SE \perp AB$, $SF \perp BC$, $SJ \perp AC$. Ta có

$$\angle SEH = \angle SFH = \angle SJH = 60^\circ \Rightarrow$$

$\triangle SAH = \triangle SFH = \triangle SJH$ nên $HE = HF = HJ = r$ (r là bán kính đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$)

$$\text{Ta có } S_{ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$\text{với } p = \frac{a+b+c}{2} = 9a \text{ Nên } S_{ABC} = \sqrt{9 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} a^2$$

$$\text{Mặt khác } S_{ABC} = p \cdot r \Rightarrow r = \frac{S}{p} = \frac{2\sqrt{6} a}{3}$$

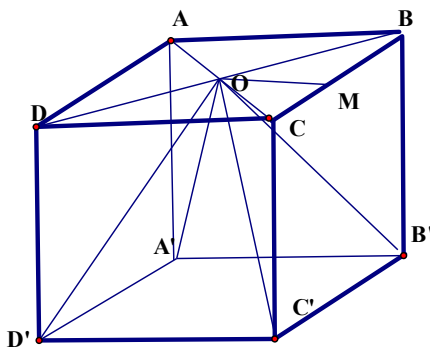
Tam giác vuông SHE:

$$SH = r \cdot \tan 60^\circ = \frac{2\sqrt{6} a}{3} \cdot \sqrt{3} = 2\sqrt{2} a$$

$$\text{Vậy } V_{SABC} = \frac{1}{3} 6\sqrt{6} a^2 \cdot 2\sqrt{2} a = 8\sqrt{3} a^3.$$

Ví dụ 3: Cho hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D' có $AB = a\sqrt{3}$, $AD = a$, $AA' = a$, O là giao điểm của AC và BD.

- Tính thể tích khối hộp chữ nhật, khối chóp OA'B'C'D'
- Tính thể tích khối OBB'C'.
- Tính độ dài đường cao đỉnh C' của tứ diện OBB'C'.



Lời giải:

a) Gọi thể tích khối hộp chữ nhật là V .

$$\text{Ta có : } V = AB \cdot AD \cdot AA' = a\sqrt{3} \cdot a^2 = a^3\sqrt{3}$$

$$\triangle ABD \text{ có : } DB = \sqrt{AB^2 + AD^2} = 2a$$

* Khối OA'B'C'D' có đáy và đường cao

$$\text{giống khối hộp nên: } \Rightarrow V_{OA'B'C'D'} = \frac{1}{3} V = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}$$

b) M là trung điểm BC $\Rightarrow OM \perp (BB'C')$

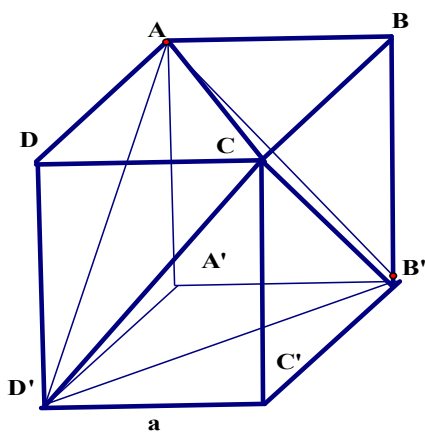
$$\Rightarrow V_{OBB'C'} = \frac{1}{3} S_{BB'C'} \cdot OM = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}$$

c) Gọi C'H là đường cao đỉnh C' của tứ diện OBB'C'. Ta có : $C'H = \frac{3V_{OBB'C'}}{S_{OBB'}}$

$$\triangle ABD \text{ có : } DB = \sqrt{AB^2 + AD^2} = 2a$$

$$\Rightarrow S_{OBB'} = \frac{1}{2} a^2 \Rightarrow C'H = 2a\sqrt{3}$$

Ví dụ 4: Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' có cạnh bằng a.
Tính thể tích khối tứ diện ACB'D'.



Lời giải:

Hình lập phương được chia thành: khối ACB'D' và bốn khối CB'D'C', BB'AC, D'ACD, AB'A'D'.

+Các khối CB'D'C', BB'AC, D'ACD, AB'A'D' có diện tích đáy và chiều cao bằng nhau nên có cùng thể tích.

$$\text{Khối CB'D'C' có } V_1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} a^2 \cdot a = \frac{1}{6} a^3$$

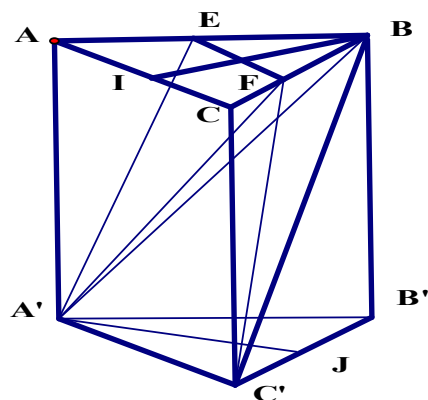
+Khối lập phương có thể tích: $V_2 = a^3$

$$\Rightarrow V_{ACB'D'} = a^3 - 4 \cdot \frac{1}{6} a^3 = \frac{1}{3} a^3$$

Ví dụ 5: Cho hình lăng trụ đứng tam giác có các cạnh bằng a

a) Tính thể tích khối tứ diện A'B'BC.

b) E là trung điểm cạnh AC, mp(A'B'E) cắt BC tại F. Tính thể tích khối CA'B'FE.



Lời giải:

a) Khối A'B'BC: Gọi I là trung điểm AB,

$$V_{A'B'BC} = \frac{1}{3} S_{A'B'B} \cdot CI = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}$$

b) Khối CA'B'FE: phân ra hai khối CEFA' và CFA'B'.

+Khối A'CEFcó đáy là CEF, đường cao

$$A'A \text{ nên } V_{A'CEF} = \frac{1}{3} S_{CEF} \cdot A'A$$

$$S_{CEF} = \frac{1}{4} S_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{16} \Rightarrow V_{A'CEF} = \frac{a^3\sqrt{3}}{48}$$

+Gọi J là trung điểm B'C'. Ta có khối A'B'CF có đáy là CFB', đường cao JA' nên

$$V_{A'B'CF} = \frac{1}{3} S_{CFB'} \cdot A'J \quad S_{CFB'} = \frac{1}{2} S_{CBB'} = \frac{a^2}{4}$$

$$\Rightarrow V_{A'B'CF} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2}{4} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^3\sqrt{3}}{24}$$

$$+ \text{ Vậy: } V_{CA'B'FE} = \frac{a^3\sqrt{3}}{16}$$