Đề thi Dự trữ khối A-năm 2007
Đề I

Câu I: Cho hàm số $y = \dfrac{-x^2 + 4x + 3}{x - 2}$

1. Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số.
2. Chứng minh rằng tích các khoảng cách từ một điểm bất kỳ trên đồ thị hàm số đến các đường tiệm cận của nó là hằng số.

Câu II:

1. Giải phương trình: $\sin 2x + \sin x - \dfrac{1}{2\sin x} - \dfrac{1}{\sin 2x} = 2\cot g2x$
2. Tìm m để phương trình: $m\left(\sqrt{x^2 - 2x + 2} + 1\right) + x(2 - x) \le 0$ (2) có nghiệm $x \in \left[0, 1 + \sqrt{3}\right]$

Câu III: Trong không gian Oxyz cho hai điểm A (-1;3;-2), B (-3,7,-18) và mặt phẳng (P): 2x - y + z + 1 = 0

1. Viết phương trình mặt phẳng chứa AB và vuông góc với mp (P).
2. Tìm tọa độ điểm M ∈ (P) sao cho MA + MB nhỏ nhất.

Câu IV:

1. Tính $I = \displaystyle\int_0^4 \frac{\sqrt{2x + 1}}{1 + \sqrt{2x + 1}}\,dx$
2. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x + \sqrt{x^2 - 2x + 2} = 3^{y-1} + 1 \\ y + \sqrt{y^2 - 2y + 2} = 3^{x-1} + 1 \end{cases}$ $(x, y \in R)$

Câu Va *(cho chương trình THPT không phân ban):*

1. Trong mặt phẳng Oxy cho đường tròn (C) : $x^2 + y^2 = 1$. Đường tròn (C') tâm I (2,2) cắt (C) tại các điểm A, B sao cho $AB = \sqrt{2}$. Viết phương trình đường thẳng AB.
2. Có bao nhiêu số tự nhiên chẵn lớn hơn 2007 mà mỗi số gồm 4 chữ số khác nhau?

Câu Vb *(cho chương trình THPT phân ban):*

1. Giải bất phương trình: $(\log_x 8 + \log_4 x^2)\log_2 \sqrt{2x} \geq 0$

2. Cho lăng trụ đứng $ABCA_1B_1C_1$ có AB = a, AC = 2a, $AA_1 = 2a\sqrt{5}$ và $\widehat{BAC} = 120^\circ$. Gọi M là trung điểm của cạnh CC_1. Chứng minh $MB \perp MA_1$ và tính khoảng cách d từ điểm A tới mặt phẳng (A_1BM).

Bài giải

Câu I:

1. Khảo sát và vẽ đồ thị *(Bạn đọc tự làm)*
2. Gọi (C) là đồ thị của hàm số.

$M(x,y) \in (\,C\,) \Leftrightarrow\ y = -x + 2 + \dfrac{7}{x-2}$

Phương trình tiệm cận xiên $y = -x + 2 \Leftrightarrow x + y - 2 = 0$

khoảng cách từ M đến tiệm cận xiên là $\dfrac{|x+y-2|}{\sqrt{2}} = \dfrac{7}{\sqrt{2}\,|x-2|} = d_1$

khoảng cách từ M đến tiệm cận đứng là $d_2 = |x-2|$

Ta có $d_1d_2 = \dfrac{7}{\sqrt{2}\,|x-2|}|x-2| = \dfrac{7}{\sqrt{2}}$: hằng số.

Câu II:

1. Giải phương trình : $\sin 2x + \sin x - \dfrac{1}{2\sin x} - \dfrac{1}{\sin 2x} = 2\cot g2x$ (1)

(1) $\Leftrightarrow -\cos^2 2x - \cos x\cos 2x = 2\cos 2x$ và $\sin 2x \neq 0$

$\Leftrightarrow\ \cos 2x = 0 \vee 2\cos^2 x + \cos x + 1 = 0\,(VN)$

$\Leftrightarrow \cos 2x = 0 \Leftrightarrow\ 2x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{2}$

2. Đặt $t = \sqrt{x^2 - 2x + 2}\ \Leftrightarrow t^2 - 2 = x^2 - 2x$

Bpt (2) $\Leftrightarrow\ m \leq \dfrac{t^2-2}{t+1}$ $\quad (1 \leq t \leq 2), \text{do } x \in [0; 1+\sqrt{3}]$

Khảo sát $g(t) = \dfrac{t^2-2}{t+1}$ với $1 \leq t \leq 2$

$g'(t) = \dfrac{t^2+2t+2}{(t+1)^2} > 0$. Vậy g tăng trên [1,2]

Do đó, ycbt $\Leftrightarrow$ bpt $m \le \dfrac{t^2-2}{t+1}$ có nghiệm $t \in [1,2]$

$\Leftrightarrow \quad m \le \max\limits_{t\in[1;2]} g(t) = g(2) = \dfrac{2}{3}$

Câu III:

1. Ta có $\overrightarrow{AB} = (-2,4,-16)$ cùng phương với $\vec{a} = (-1,2,-8)$

   mp(P) có PVT $\overrightarrow{n} = (2,-1,1)$

   Ta có $[\overrightarrow{n},\vec{a}]$ = (6 ;15 ;3) cùng phương với (2;5;1)

   Phương trình mp chứa AB và vuông góc với (P) là :

   $2(x + 1) + 5(y - 3) + 1(z + 2) = 0$

   $\Leftrightarrow 2x + 5y + z - 11 = 0$

2. Tìm M $\in$ (P) sao cho MA + MB nhỏ nhất.

   Vì khoảng cách đại số của A và B cùng dấu nên A, B ở cùng phía với Mp (P). Gọi A' là điểm đối xứng với A qua (P)

   Pt AA' : $\dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y-3}{-1} = \dfrac{z+2}{1}$

   AA' cắt (P) tại H, tọa độ H là nghiệm của

   $$\begin{cases} 2x - y + z + 1 = 0 \\ \dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y-3}{-1} = \dfrac{z+2}{1} \end{cases} \Rightarrow H(1,2,-1)$$

   Vì H là trung điểm của AA' nên ta có :

   $$\begin{cases} 2x_H = x_A + x_{A'} \\ 2y_H = y_A + y_{A'} \\ 2z_H = z_A + z_{A'} \end{cases} \Rightarrow A'(3,1,0)$$

   Ta có $\overrightarrow{A'B} = (-6,6,-18)$ (cùng phương với (1;-1;3))

   Pt đường thẳng A'B : $\dfrac{x-3}{1} = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z}{3}$

Vậy tọa độ điểm M là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} 2x - y + z + 1 = 0 \\ \dfrac{x-3}{1} = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z}{3} \end{cases} \Rightarrow M(2,2,-3)$$

Câu IV:

1. Đặt $t = \sqrt{2x+1} \Rightarrow t^2 = 2x + 1 \Leftrightarrow 2tdt = 2dx \Leftrightarrow dx = tdt$

Đổi cận $t(4) = 3$, $t(0) = 1$

$$\text{Vậy } I = \int_0^4 \frac{\sqrt{2x+1}}{1+\sqrt{2x+1}}dx = \int_1^3 \frac{t^2}{1+t}dt = \int_1^3 \left(t - 1 + \frac{1}{t+1}\right)dt$$

$$= \left[\frac{t^2}{2} - t + \ln|t+1|\right]_1^3 = 2 + \ln 2$$

2. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x + \sqrt{x^2 - 2x + 2} = 3^{y-1} + 1 \\ y + \sqrt{y^2 - 2y + 2} = 3^{x-1} + 1 \end{cases} \quad (I)$$

Đặt $u = x - 1$, $v = y - 1$

$$\text{(I) thành (II)} \begin{cases} u + \sqrt{u^2+1} = 3^v \\ v + \sqrt{v^2+1} = 3^u \end{cases}$$

Xét hàm $f(x) = x + \sqrt{x^2+1}$

$$f'(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{\sqrt{x^2+1} + x}{\sqrt{x^2+1}} > \frac{|x| + x}{\sqrt{x^2+1}} \geq 0$$

Vậy f đồng biến nghiêm cách trên R.

Nếu $u > v \Rightarrow f(u) > f(v) \Rightarrow 3^v > 3^u \Rightarrow v > u$ (vô lý)

Tương tự nếu $v > u$ cũng dẫn đến vô lý

$$\text{Do đó hệ (II)} \Leftrightarrow \begin{cases} u + \sqrt{u^2+1} = 3^u \\ u = v \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = 3^u(\sqrt{u^2+1} - u) \quad (1) \\ u = v \end{cases}$$

Đặt: $g(u) = 3^u(\sqrt{u^2+1} - u)$

$$\Rightarrow g'(u) = 3^u \ln 3(\sqrt{u^2+1} - u) + 3^u\left(\frac{u}{\sqrt{u^2+1}} - 1\right)$$

$$g'(u) = 3^u\left(\sqrt{u^2+1} - u\right)\left(\ln 3 - \frac{1}{\sqrt{u^2+1}}\right) > 0, \forall u \in R$$

Vậy g(u) đồng biến nghiêm cách trên R.

Ta có g(0) = 1. Vậy u = 0 là nghiệm duy nhất của (1)

Nên (II) $\Leftrightarrow$ $u = 0 = v$

Vậy (I) $\Leftrightarrow x = y = 1$.

Câu Va:

1.Đường thẳng OI nối 2 tâm của 2 đường tròn (C), (C') là đường phân giác $y = x$. Do đó, đường AB $\perp$ đường $y = x \Rightarrow$ hệ số góc của đường thẳng AB bằng – 1.

Vì AB $= \sqrt{2}$ $\Rightarrow$ A, B phải là giao điểm của (C) với Ox, Oy.

Suy ra $\left[\begin{array}{l} A(0,1); B(1,0) \\ A'(-1,0); B'(0,-1) \end{array}\right.$

Suy ra phương trình AB : $y = -x + 1$ hoặc $y = -x - 1$.

***Cách khác**:* phương trình AB có dạng: $y = -x + m$.

Pt hoành độ giao điểm của AB là

$$x^2 + (-x + m)^2 = 1 \Leftrightarrow 2x^2 - 2mx + m^2 - 1 = 0 \ (2)$$

(2) có $\Delta' = 2 - m^2$, gọi x_1, x_2 là nghiệm của (2) ta có :

$$AB^2 = 2 \Leftrightarrow 2(x_1 - x_2)^2 = 2 \Leftrightarrow (x_1 - x_2)^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{4\Delta'}{a^2} = 1 \Leftrightarrow 2 - m^2 = 1 \Leftrightarrow m = \pm 1$$

Vậy phương trình AB : $y = -x \pm 1$.

2. Gọi $n = \overline{a_1a_2a_3a_4}$ là số cần lập.

. TH1 : $a_4 = 0$, ta có 8 cách chọn a_1 (vì $a_1 \geq 2$)

8 cách chọn a_2

7 cách chọn a_3

(1 cách chọn a_4)

Vậy ta có 8.8.7.1 = 448 số n.

. TH2 : $a_4 \neq 0$ vì a_4 chẵn. Ta có : 4 cách chọn a_4
7 cách chọn a_1
8 cách chọn a_2
7 cách chọn a_3

Vậy ta có 4.7.8.7 = 1568 số n

Vậy cả 2 trường hợp ta có : 448 + 1568 = 2016 số n.

Câu Vb:

1. Điều kiện x > 0 , x ≠ 1

$$(1) \Leftrightarrow \left(\frac{1}{\log_8 x} + 2\log_4 x\right)\frac{1}{2}\log_2 2x \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{\frac{1}{3}\log_2 x} + \log_2 x\right)\left(\log_2 x + 1\right) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (\log_2^2 x + 3)\left(\frac{\log_2 x + 1}{\log_2 x}\right) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{\log_2 x + 1}{\log_2 x} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \log_2 x \leq -1 \vee \log_2 x > 0 \Leftrightarrow 0 < x \leq \frac{1}{2} \vee x > 1$$

2. *(Bạn đọc tự vẽ hình)*

Chọn hệ trục Axyz sao cho: $A \equiv 0,\ C\left(-2a, 0, 0\right),\ A_1(0, 0, 2a\sqrt{5})$

$$\Rightarrow A(0;0;0), B\left(\frac{a}{2}; \frac{a\sqrt{3}}{2}; 0\right) \text{ và } M(-2a, 0, a\sqrt{5})$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{BM} = a\left(-\frac{5}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}; \sqrt{5}\right), \overrightarrow{MA_1} = a(2; 0; \sqrt{5})$$

Ta có: $\overrightarrow{BM}.\overrightarrow{MA_1} = a^2(-5+5) = 0 \Rightarrow BM \perp MA_1$

Ta có thể tích khối tứ diện AA_1BM là :

$$V=\frac{1}{6}\left|\overrightarrow{AA_1}.\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AM}\right]\right|=\frac{a^3\sqrt{15}}{3}$$

$$S_{\Delta BMA_1}=\frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MA_1}\right]\right|=3a^2\sqrt{3}$$

Suy ra khoảng cách từ A đến mp (BMA_1) bằng $d=\frac{3V}{S}=\frac{a\sqrt{5}}{3}$.

Cách khác:

+ Ta có $A_1M^2=A_1C_1^2+C_1M^2=9a^2$

$$BC^2=AB^2+AC^2-2AB.AC.\cos 120^0=7a^2$$

$$BM^2=BC^2+CM^2=12a^2$$

$$A_1B^2=A_1A^2+AB^2=21a^2=A_1M^2+MB^2$$

$\Rightarrow$ MB vuông góc với MA_1

+ Hình chóp $MABA_1$ và $CABA_1$ có chung đáy là tam giác ABA_1 và đường cao bằng nhau nên thể tích bằng nhau.

$$\Rightarrow V=V_{MABA_1}=V_{CABA_1}=\frac{1}{3}AA_1.S_{ABC}=\frac{1}{3}a^3\sqrt{15}$$

$$\Rightarrow d(a,(MBA_1))=\frac{3V}{S_{MBA_1}}=\frac{6V}{MB.MA_1}=\frac{a\sqrt{5}}{3}$$

----------@---------